
BIBLIOTECA · DEL · DUQUE · DE · OSUNA

S. L.

DE MAXIMIS, ET MINIMIS LIBRI DVO.



DE MAXIMIS ET MINIMIS

GEOMETRICA DIVINATIO

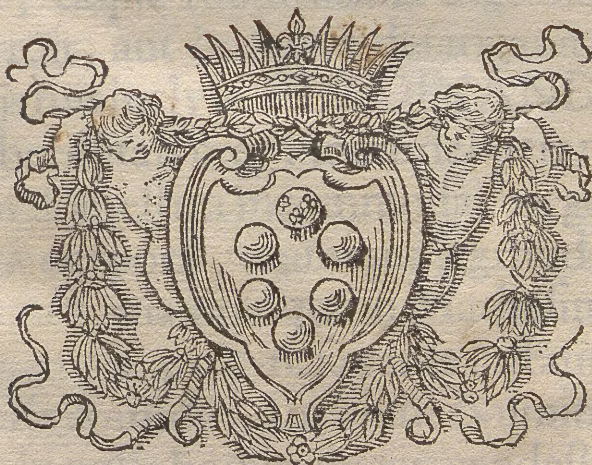
IN QVINTVM CONICORVM APOLLONII PERGÆI *ADHVC DESIDERATVM.*

AD SERENISSIMVM FERDINANDVM II. MAGNVMDVCEM ETRVRIÆ.

LIBER PRIMVS.

AVCTORE VINCENTIO VIVIANI.

Godin 1752





FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ.

SVPERIORVM PERMISSV.





SERENISSIMO
FERDINANDO II.
MAGNODVCI ETRVRIÆ.



RANDE opus aggredior, dicerem etiam tua Celsitudine nõ indignum, SERENISSIME MAGNEDVX, si meis viribus absolui posse crediderim. MAGNI GEOMETRÆ APOLLONII Conicorum diuinas propè dixerim meditationes per tot secula temporum iniuria nobis ablatas proprio Marte restituere, Herculeus equidem labor est, & qui diu plurima, eaque robustissima ingenia, aut ab incœpto deterruit, aut in opere defatigauit. Audeo tamen auspicijs tuis inclyte FERDINANDE; & quod negatum imbecillitati meę timere debueram (quam per per tot annos domestica incommoda, negotia publica, & grauissimæ corporis, animique ægritudines exagitarunt) gloriæ tuæ, maximoque in Mathesim, cognatasque scientias, atque artes, te fauente instauratas, amori seruatum fuisse confido. Ibi enim Numinis fauor clariùs elucet, vbi nulla hominum virtus adest. In re tam ardua conatus mei si felici euentu caruerint, nisi laudem, profectò excusationem inuenient. At si fortuna

hilari

hilari vultu votis meis arriserit, de tuo patrocinio, ac munificentia, pro tam illustri beneficio, non tantùm hæc ætas, quæ te præsentem vnà mecum admiratur, verùm etiam magnificè loquetur grata posteritas. Hęc igitur quidquid sunt, benignè, vt soles, intuere. Si MINIMA, quod reor, sterilis ingenij fœtum vt foueas; si MAXIMA, vt tuæ vegetę lucis prolem regalibus vlnis accipias. Atque interim plurimos, beatosque annos bono publico viue.

Florentiæ. Octauo Calendas Ianuarij 1658.

SER.[MÆ] CELS.[NIS] TVÆ

Humillimus, Addictissimus, Obstrictissimus Seruus, & Cliens

Vincentius Viuiani.



IN DIVINATIONEM GEOMETRICAM DE MAXIMIS, ET MINIMIS PRÆFATIO.

AMICE LECTOR.

NEMO omnium nescit, qui eruditionis aliquid degustarint, ac geometricis potissimùm studijs animum intenderint, meditationes Conicas, tum antiquissimas esse, tum ab APOLLONIO Pergæo (qui ad annos fermè nongentos nunc supra mille sub Ptolomeo Euergete floruit) omnia ea vsquequaque fuisse collecta, quæ sparsim antea in eo genere commentati fuerant Aristeas Geometra, Eudoxus Cnidius, Menæchmus, Euclides, Conon, Trasideus, Nicoteles, & quod aliqui tradunt Archimedes etiam, ac Dositheus, multique alij vetustiores, quorum nomina cum scriptis periere. Hos inter APOLLONIVS, vtilissimam hanc, admirabilemque doctrinam egregiè illustrauit, ampliauitque octo libris comprehensam, vt ipse ad Eudemum præfatur. Id autem tam felici supra cæteros excellentia perfecit, iure vt ab omnibus sui æui Mathematicis MAGNVS GEOMETRA audierit.

Neque illud nos fugit, ad vsque Pappi Alexandrini tempora, hos octo libros peruenisse, qui necessaria nobis Lemmata ad eorum notionem construxit. Eutocius quoq; Ascalonites Pappo iunior, prẹter commentaria in quatuor APOLLONII priores, reliquas curas in totidem reliquos Anthemo promittit. Cæterùm ex quo Eutocius floruit, annos, vt aliqui tradunt, à condita saluta circiter CCCCLXXX. integram librorum familiam fuisse visam nemo prodidit, sed quatuor posterioribus inuidiosa vetustate diuulsis, priores tantùm meliori concordia superfuisse creditum hactenus.

Hanc ego notitiam tacitus intra me condidi, atque iam tum, cum

prima

prima Conicæ Matheſeos elementa balbutire didici, annis duodeuiginti iam expletis, ſtatim ea cura in animo ſedit (mihi equidem vni placere certum, ac prurienti genio obſecundare) inueſtigandi quid APOLLONIO propoſitum in libris deperditis, & qua in parte Conicæ theoriæ verſarentur. Quinti autem libri hypotheſis præcipuè me trahebat, vbi ex prima APOLLONII epiſtola ad Eudemum de MINIMIS, & MAXIMIS magna ſui parte agi non ignorabatur, deque MINIMIS, & MAXIMIS lineis ad ipſas Coni-ſectionum peripherias, referente Eutocio. Qua autem ratione, aut quid ſpeciatim colligeretur in ipſo quinti argumento, diuinationi, & coniecturæ tantùm relinquebatur. In hac ergo cogitatione defixus, ſuſceptam Spartam exornare vehementiori in dies ſtudio contendebam, ac biennij ſpatio cæmenta abundè creuerant hiſce mox libris condendis; noua ſcilicet quotidie ſuccurrebant huius diuinationis occaſione, quæ cupiditatem, & laborem intenderent, donec paulatim in hunc, maioremque numerum aucta, ad vniuerſam de MAXIMIS, & MINIMIS pertractationem ſe ſe extenderint. Sed vix diuinæ huius Geometriæ auguſtiſſimum limen ſubieram, cum inuidis caſibus, domeſticis præſertim turbamentis iactatus, pedem illinc cogor referre, indolique reſponſare; per trina iam luſtra in alias curas proiectus, quæ inuita Matheſi ſuſcipiuntur. Quare, & priuatis concoquendis negotijs diſtentus, & publicis auocatus, dum alia qualiſcunque operæ meæ obſequia SERENISS. MAGNODVCI præſtare debeo, morbis ad hæc ſæpe incurrentibus; atque incerta vſus valetudine, non hanc tantùm de MAXIMIS, & MINIMIS ritè diſponere, ac perficere quiui, verùm nec aliam vllam è geometricis meis commentationibus; quarum tamen, nec pauca ſchedulis commendaueram, vti per tempus ſubſeciuum, & curis ſubtractum multiplicibus, furari induſtriam licuerat. Id vnum ſolatio fuit, hæc cum Amicis participaſſe honeſtiſſimis, ſicuti factum memini tredecim plus minus ab hinc annis: cum Amicis inquam, & huiuſce ſtudij amatoribus, quibuſque haud retuſum erat palatum ad noua hæc veritatum ſcitamenta. Vnus vtinam, vt credere pium eſt, tardior Diuorum Comes (cur autem inuideo?) mihi teſtis ſupereſſet Amicorum optimus, ac ſuauiſſimus, cui nihil iam eſt, quod pro illius meritis in me ingentibus reddam, præter grati animi ingenuam profeſſionem, ac ſi quid mihi erit vnquam vocis, aut ſoni præſtantiſſimarum eius virtutum fidam omni tempore commemorationē; Braccium loquor Manettum, cuius laudes piaculum eſt ignorare, ſiue generis nobilitatem, cum morum elegantia ſumma probitate coniunctam,

ctam, siue eruditionis ornamenta cum Mathematicæ studio, scientiaque spectemus; dicam cumulatissimè, haud vltimum inter Auditores Galilei Galilei: quantum Heroa nomina? quantum Florentiæ decus, lumen seculi, ingeniorum phœnicem, sydus, Solemq; vniuersæ Matheseos? quale dixerim numen, ac genium corrigendæ Geographię, Astronomię nouis phænomenis ope telescopij detectis illustrandæ, vindicandęque Philosophiæ, in orbis admirationem, ac posteritatis regulam natum? Ex huius officina prodiens Manettus, non aliter coloratus apparuisse debuit. Quod vel mihi æternum incutiat ruborem, ac morsu pœnitentiæ assiduò animum lancinet, si tantillum cogito profectum meum sub eodem Præceptore Galileo, ad cuius sapientissimi oris dictata, laris, & mensæ, horarumque omnium communionem per annos fere tres interiùs admitti contigerit.

Testis alter accedat, quem vocare ad officium possit Prætor incolumem, ac præsentem (ita illum fata diu seruent) Illustrissimus, & Clarissimus Senator Andreas Arrighettus, cum quo dudum meos hosce labores communicatos volui, eiusque examini, atque emunctissimo iudicio submittere; vt ille non tantùm eo tempore, sed hodię quoque Conicas disciplinas memoriæ feliciter recolit, quas Iuuenis attentè excolebat, cum totus Mathematicis addictus artibus eundem Galileum assectabatur. Atqui ob hanc eximiam laudem, ac reliquas virtutes illustribus hodie, primæque notæ muneribus meritò in Patria fungitur.

Ab eadem classe alium arcesso, qui pro me aram tangat; Florentinum Patricium Carolum Datum: illum Matheseos, illum liberæ, indeprauatæq; Philosophiæ nobilem amatorem; cuius in ore, Græca, Latina, Etrusca sedet facundia; quem vnum inter paucissimos huiusce Vrbis demiror, qui & suæ eruditionis exemplo, & opera, fauore, officijs in alios, genus omne bonarum artium earundemque cultores mirificè amplectatur, ac foueat. Nouit Italia, nouit Europa hominem, noscet breui vniuersus literatorum Orbis ex amœnissimis doctissimisque lucubrationibus, quas ipse in dies eruditissimè molitur.

Hic, de meis hisce fœtibus Parente ipso magis sollicitus, quoties verecundiam hanc meam, edendique morositatem increpuit? quoties desidiam, metumque exprobrauit? quoties monuit vt pusillum aliquod, dummodo nouum populi iudicio committerem? quoties à multis annis refractario pudori calcar hortationis impegit, vt ab hoc saltem Commentario de MAXIMIS, & MINIMIS periclitari famam inciperem, quem magis affectum compositumque sciebat? At ego

nihil edere obstinatus, moliri aliquid lætus, ingenium, geniumque meum ea cunctatione pascebam; Amicos verò cariores detinebam noui subinde aliquid è meis nugis ad eorum examen afferendo.

Sed circa initium proximè elapsi Mensis Iunij, currentis anni 1658. Ioannes Alphonsus Borellus Pisis reuersus, qua in Vrbe, & Academia Clarissimus Matheseos Professor publicè docet, Romam cogitabat. Causa illi profectionis mihi hæc longiùs narrandi.

Inter cætera Augustæ Domus instrumenta, quibus SEREN. FERDINANDVS II. MAGNVS ETRVRIÆ DVX, vel ad inuidiam potentissimorum Regum prætiosè nobilitatur, loculi asseruantur Codicum MM. SS. quos è Medicea Romæ Bibliotheca magnis pridem sumptibus collectos Florentiam transtulerunt. Arabicus inter hos comparebat latina supernè inscriptione. APOLLONII PERGÆI CONICORVM LIBRI OCTO.

Iuu. Sat. 8. „ *Exclamare libet populus, quod clamat Osiri*
„ *Inuento.*

Hunc Borello sæpius tractare licuit, sæpius diligenti oculo intueri. E' numero, ac dictinctione librorum, è collatione diagrammatum, quæ proximè congruebant tum in Arabico, tum in prioribus quatuor, quos antea habebamus, atque è reliquorum tandem examine, quibus consimilis facies, similiaque lineamenta Conica, haud immeritò conijciebat integros esse APOLLONII libros diu deploratos, diu requisitos.

Orat igitur SERENISS. MAGNVMDVCEM, adnitenteque SERENISS. LEOPOLDO FRATRE, Parente musarum inclyto, vnico, atq; aureo, si non aurei seculi Mecœnate; exorat sibi, vt Romam deferre liceat, tum APOLLONIVM, tum libellos alios quosdam geometricos, interpretem illic facilè nacturus inter Viros Propagandæ Fidei, cui fidem veri detectam penitus exploratamque deberet.

Commodùm Florentiæ peregrinabantur Maronitæ nonnulli, quos huic operæ aptos statim sensit PRINCEPS idem LEOPOLDVS. Accersiti coram interpretantur, vt mihi narratũ est. Ex proęmio Operis, & cuiusque libri initio, Propositionumque aliquot explanatione rem sicuti erat agnoscunt; præter quatuor iam editos APOLLONII libros, tres quoque proximos posteriores adesse, compendij tamen factos, nescio cuius Arabis diligentia. Nunquam antea huc penetratum, aut cognitionis tam certæ lucrifactum, quamlibet aliàs Viris, & Arabicæ linguæ peritis, & Geometriæ consultissimis sæpe conatis eruere: accurante pręsertim SERENISS. eodem LEOPOLDO,

cuius

cuius illa inter innumeras magnanimo in pectore cura adolescit, noui instar Triptolemi sparsis literarum, ac beneficientiæ seminibus, mortale genus quotidie altiùs demereri. Indicante autem Maronita adesse Romæ, vbi per Æstatem agere Borellus decreuerat, Abrahamum Ecchellensem natione Arabem, linguarum verò orientalium peritia oppidò celebrem, neq; Matheseos ignarum; tunc idem Borellus (quandoque SERENISS. MAGNODVCI placuisset, APOLLONIVM, ac reliqua scripta fidei suæ committere, & Abrahamo ocium foret interpretandi) suam vltrò operam in rebus geometricis adhibere pollicitus est. Satis superque se adprobauerat Abrahami peritia, qui linguarum orientalium Doctor, tunc Romæ, olim in Pisano Lyceo meruerat. Nec minus spectata erat suæ SERENISSIMÆ CELSITVDINI Borelli præstantia in geometricis, ac philosophicis studijs.

Non cunctanter ergo SERENISS. MAGNVSDVX scripta Borello credidit, & qua solet augusta sapientia bonas artes tutari, ac fouere, operis aggressionem nutu firmat, suique SERENISSIMI NOMINIS auspicio, ac maiestate fundari permittit.

Hæc omnia acta sunt intra dies octo, vel minus, quibus Borellus Florentiæ permansit. Ego hinc procul, cum insigne hoc cemelium Reipublicæ literariæ detectum. Reuerso, seduli Amici statim nunciant, ac Borellus deinceps rem totam mihi ore confirmat, paulò ante quàm peteret Romam. Exultabam animo, ac plenus gaudij gestiebam, fortunatum verè me sentiens, quod hac ætate spirarem, cum magnus Geometriæ spiritus redderetur hoc reperto thesauro.

Nec propterea cessabant Amici, quibus res meę cordi erant, hortationes, ac stimulos subdere, vt hanc saltem de MAXIMIS, & MINIMIS lucubrationem publici iuris facerem; de qua actum esse omnino videbam, tunc iam repertis APOLLONII libris; atq; animum ab ea prorsus auerteram tineis iam pertundenda, aut Veneris Marito donanda. Raró interim, aut nunquam auditum fatebantur, mihi sanè (vt illis videbatur) improsperum: non modò librum per duodecim iam secula consepultum reuiuisci me viuo, qui eidem aliquatenus supplendo non indiligenter vacaueram; sed & illud damnabant qualescunque hos labores meos delituisse, qui diu pridem vulgari, ante APOLLONIVM repertum, ac studiosorum manibus teri potuissent. Acriùs inquam instare Amici, neque incitamenta remittere; vno ore adhortari, vt properatò colligerem, disponerem, meorumque editionem anteuerterem. Non deerant autem illis speciosa acumina ad impellendum. Quod enim ad me; priùs fuisse hæc excogitata, quàm

 illa

illa APOLLONII reperta. Facilè etiam persuadere ignarum me, vel ipsius Arabici alphabeti, nec vnquam mihi tractatas, aut cognitas noui libri figuras. Esto aiebant me tantùm collineasse ad eundem cum APOLLONIO scopum (quamuis latè se fundat mea de MAXIMIS, & MINIMIS ratiocinatio) non ne plures viæ eandem ducunt Corinthum? Quod si ab eo penitus abeam, dum plura consector geometrica, emolumenti inde tamen aliquid accedet literis, ac eo saltem nomine, quia nouum commendabitur.

Fateor autem, mihi alioquin pertinaci deditionem hæc exprimere incipiebant: vehementiùs tamen acriores stimuli aliundè accedentes: sed digito compesce labellum.

Inter hæc Borellus sub octaua Iunij, ni fallor, Romam contendit, cum suo illo diues noui APOLLONII viatico. At ego delinita obstinatione meis velut ad lucem disponendis sensim incumbo, quod Viris CCLL. Senat. Arrighetto, ac Dato bona fide patefacio; nec præstantissimo Adolescenti Laurentio Magalotto celatum volui, insimul ratus, amicitiæ candori labem inferre, si hæc mea qualiacunque inuenta felicissimum, atque admirabile prorsus ingenium latuissent, Mathematicis non minus, quàm Philosophicis, atque Anatomicis studijs impensè addictum; Iurisprudentiæ sacris initiatum; Musis, quà latinis, quà Etruscis apprimè carum; ad omnia egregia æque natum, nullisque demum equestrium exercitationum decoribus destitutum, qui ingenuum, & ornatissimum Patricium decent, è cuius tam clara Adolescentiæ Aurora fulgentissimum Virilitatis meridiem Patria hæc meritò auguratur.

Sic pluteos, & scrinia compilans mea confusas pagellas in meliorem ordinem digero, aptiora huic tractatui seligo, atque in classes partita tribus distinguo fasciculis.

Sed interim agrum petens Solem cogor pati noxium, & immodicum, qui febri statim iniecta acutissima penè ad necem me afflixit; fuitque dies Iunij decimus octauus cum quindenis alijs inter meos egritudinum fastos, magnis februalibus nimiùm quantùm nefastos. Diù inops virium omnem studiorum curam abieceram: nec caput, nec mens constabat paginis recensendis, quæ multo punice, multaq; litura indigebant, multa etiam perscriptione; quippe adumbraueram meditationes, & confusanea opera, nequid interim deperiret, tantummodo innueram.

Nescio autē quo pacto labores hi mei SERENISS. LEOPOLDO suboluere, qui partitè mox de tota illorum ratione, ac processu à me

con-

condocefactus, non animos tantùm mihi fecit, sed iussit, vt omnibus modis publicarem. Verùm necesse esse prorsus admonuit, à nemine ignorari diu mihi fuisse in pugillaribus meis hunc tractatum affectum ante APOLLONII libros nuper detectos; ac prudenter suggessit publica testatione fidem confestim facere scriptis meis; quatenus saltem constaret à me priùs detecta, atq; habita, quàm vllus Arabici APOLLONII apex in latinum verteretur. Adiecit se veritatis prædem affuturum vbi opus esset, me præter Arabicæ linguæ ignorationem nunquam APOLLONIVM hunc cõtrectasse, aut particulare quidquam ex eo nouisse. Neque hàc steterunt memoranda SERENISS. CELSIT. beneficia, vt æquissimæ causæ patrocinaretur. Ne quà suspicionis labecula (si qui forte sunt) parùm æquos mihi homines nutriat, SERENISS. idem PRINCEPS videre ipse, ac perpendere voluit enunciata omnia, ac lineas veluti numerare, quæcunque huic tractationi insererentur, ac singulis fasciculis, Mediceo ante sigillo obsignatis testationem inuictam his verbis propria manu exaratis insculpere.

In primo.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero quarantotto mezi fogli di dimostrazioni geometriche d'vn trattato de MASSIMI, e MINIMI intorno alle Sezioni Coniche, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

In secundo verò.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero cinquantotto mezi fogli di dimostrazioni geometriche intorno a materie Coniche attenenti al trattato de MASSIMI, e MINIMI, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

In tertio denique.

Adì 8. Luglio 1658. furon veduti da me gli appresso numero sessantanoue mezi fogli di dimostrazioni geometriche d'vn trattato de MASSIMI, e MINIMI intorno a Problemi, e Teoremi varij, il tutto, come ne gli altri fasci scritto in forma di bozza, di mano di Vincenzio Viuiani, fermati col mio Sigillo.

Il Principe Leopoldo mano prop.

Tam sapientis, tam inclyti, tam generosi Principis verendo testimonio probatus, faustoque iussu excitatus, quanta animi alacritate opus aggredior, exactiori forma, atque ordine contexendum.

Roma

Roma tunc literæ à Borello vigesima nona Iunij nunciante inter alia, feliciter incæptam APOLLONII versionem, cuius proximæ Hebdomade specimen missurus foret ad SERENISS. LEOPOLDVM, vt illinc de vniuerso opere spem egregiam conciperet. Nona Iulij à me responsum, atque vnà significatum quid statuissem de meis laboribus publico dandis, paucisque narratum, quid, quantùmque SERENISS. LEOPOLDVS egerit, & qua eius summa benignitate, ac præsidio ad hæc animarer. Insimul orabam, ne quid vel minimum, posthac super libris APOLLONII repertis ad me scriberet. Iisdem præcibus SERENISS. LEOPOLDVM adij, vt sacrum me, atque intestabilem, & omni indignum colloquio censeret de eadem re. Iterum Borellus ad me vigesima eiusdem Mensis, silentium paciscens, atque institutum meum laudans (euicerant quippe Amicorum consilia, ac PRINCIPIS iussa) Conicas speculationes typis mandandi, diserta subdens verba.

Ed io trà gli altri testifico, che ella non hà hauuto minima notizia di questi vltimi libri d'APOLLONIO.

Magnis quotidie incrementis Romano semone, vt Romę par erat, Grecus Auctor, nuper Arabs loquebatur. At Borellus mihi Harpocrates de condicto. Florentiam deinde reuertitur exeunte Octobri. Eapse reditus die, SERENISS. MAGNVSDVX (qua in omnes incredibili humanitate ad miraculum vsque, ac disciplinâ Regnantium vti solet) Borellum, me præsente, de silentio admonuit, donec meus prodiret liber; atqui ille mecum inuiolatè seruauit, quod cum alijs quoque ab eo factum non dubito.

His itaque in antecessum fide vti optima maxima expositis, abundè ostensum puto, ante APOLLONIVM repertum per trina iam lustra meas hasce, qualescunque cogitationes fuisse lucubratas. Inde incorruptissimi testes Arrighettus, & Datus adstruunt. Magalottus ab ipsa statim inuentione mihi accersitus confirmat. Arabicæ linguæ fateor sum ignarissimus, quod mihi iniurato, vel incredulus credat Apella. Neque APOLLONII posteriores versasse vnquam libros, aut ex ijs me nouisse quidquam, etiam Borellus sponsor accedit.

Poteram solennem ab his formam testandi, ex iure Quiritum exigere huic præfationi subscribendam, sed omnium instar, ac veluti pro muro æneo veritatis, extitit mihi SERENISS. LEOPOLDI lucidissima asseueratio, cui radios suos Apollo submittit, atque illa olim, quæ apud Sagram de veritate concedant.

Interea non desinam Lector quin te rogem, vt quæ hìc legeris, ijs

qui

qui non legerint, vbi res ferat indicare ne fugias. Expedit enim existimationis meæ causa, totam hanc facti seriem, quàm latissimè in vulgus manare; alioquin silentium hìc perdet Amyclas.

Sed inhęreamus ei, quod magis interest; si etenim eũdem, aut pręter propter cum APOLLONIO scopum attigisse fors mihi dederit (optare debeam, nec ne, equidem nescio) nemo sanus ignorat, quid æra lupinis distent, nemo præstantissimi Scriptoris ingenium, doctrinam, soliditatem, nemo tenuitatem meam, & curtam domi supellectilem. Ille omnium fermè, qui ante se de Conicis scripserunt videndi commoditate vsus; ego illius tantùm ductu, & auspicijs mea hæc exequi conabar, vt & prioribus quatuor eiusdem libris, hoc est prætiosissimæ vesti, nisi complementum, atque integritatem, segmenta, & lacinias saltim adnecterem.

Quod si contra, vel in totum, vel ex parte ab eiusdem APOLLONII instituto aberrauero, non tamen erit pœnitendi prorsus laboris, noui aliquid in eodem argumento Geometriæ Conicæ per me affulsisse. Neque ignoro multa, ne dicam infinita veritatum genera, admirandasque MAXIMORVM, & MINIMORVM contemplationes à me fuisse relictas: sed memento benigne Lector, & finitum omnibus, & mihi infirmissimum datum ingenium; multisque iam annis (quod ijs notum, qui mea norunt) partìm cum morbis, partìm cum morborum reliquijs conflictatum, aut curis fuisse distractum alienissimis; cum tamen hæc studia magnis olim Auctoribus creuerint, qui serenitatem, atque ocium, fortunæ lautiori debebant, vel munijs opportunioribus artes illas excolebant. Nec mirere interim si tot Menses excurrerint, ex quo imperata hæc editio institui cæpit. Paucioribus absoluebatur, si valetudo, ac quies annuebant. Sed neque tu à me expetis Lector, neque ego impossibilia capesso.

Vtere interim, ac si tanti sunt, fruere primitijs hisce meis, quales iamdiu sterili in agello prouenerunt, quas tamen non ita extenuabo, vt solent cæteri, qui pręfantur; sunt enim non mea, sed Naturæ admirabilia opera, ac veritates, sicuti admirabilis illa, ac vera semper est; ego detexi tantùm, ac geometrico ordine concinnaui.

At enim multis alijs erudita hæc incessit libido APOLLONII Conica, quá deficiunt, restituendi supplendique. Et quidem non viles animas, sed mentes nobiliores, atq; eminentissimi nominis, comperatæq; auctoritatis in geometrico puluere exacuit. Ex his Abbas Maurolicus Messanensis, duobus libris, quintum, & sextum APOLLONII tunc irrepertos supplere, ipsorumq; argumenta diuinare conatus est,

(quo

(quo autem felici euentu equidem nescio) atq; hi libri commentarijs subijciuntur in quatuor APOLLONII priores. Alter fuit Claudius Mydorgius Patricius Parisinus, eiusdem APOLLONII sextum, pleno illo exactissimæ doctrinæ acumine inuestigans, quod bini duo libri postremi è quatuor hactenus à Mydorgio editis satis declarant. Vterque sanè tam doctis laboribus magnam sibi industriæ famam circumdedit. Non vitio tamen vllus mihi vertat, si ijsdem molitionibus Adolescentiæ annos ego quoq; impenderim. Etenim ipsa de MAXIMIS & MINIMIS speculatio, quo ad me intacta penitus ad hunc diem vocari potest, nisi quid minimum apud quintum eiusdem Maurolici proximis hisce Mensibus à me notatum excipiam, vti & pauca nonnulla sparsim postea à me reperta in Atlantico verè opere summi Geometræ Gregorij à Sancto Vincentio è doctissima, spectatissima, nec vnquam satis laudata SOCIETATE IESV.

Sed velim Lector antequam ista aggrediar, illa, quæ nuper retuli, apud laudatos Auctores adire ne recuses; erit enim mox fortasse, vt non tota temeritate me oneres.

Quæ autem fata meos maneant libellos, nescio ante vesperum.

De MAXIMIS, & MINIMIS ago; MAXIMA non anhelo, de MINIMIS cum Prætore non curo; si vtraque componuntur, aurea mediocritas nascitur; hac ero contentus.

Neque indictum tandem huius libri titulum volo. DIVINATIONEM voco; verè enim solius diuinantis est, quid speciatim APOLLONIO propositum fuerit assequi, quaue methodo, solo audito nomine de MAXIMIS, & MINIMIS. Non sum ego Discipulus Tagis, aut Verna Sibillę; diuinaculum tamen, ac Prophetam dum ago vehementer cupio, vt hi labores non tantùm in hac florentissima Patria mea sint accepti, sed exteris quoque non iniucundi, omnino autem Reipublicæ literariæ vtiles. Hæc summa votorum. Vale.

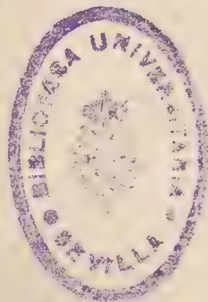
Scribebam Florentiæ Octauo Idus Decembris 1658.

TVI

Amantissimus

Vincentius Viuiani.

VINCENTII VIVIANI
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
Geometrica diuinatio in V. conic. Apoll. Pergæi.



LIBER PRIMVS.

MONITVM.



NTEQVAM institutum opus aggrediamur, siquidem in ipso frequenter accidet vti, proferreque affectiones propositionum 11.12. *ac* 13. *primi conic. non erit fortasse omninò incongruum meas earundem demonstrationes hic exhibere, quales olim, cum primùm ad elementa conica me conuerterem, aliter ac breuius vnico tantùm Theoremate concludi posse animaduerti, easque proponi enunciationibus, vti rebar genuinis, ac proximis ad trium coni-sectionum, Parabolæ, nempe, Hyperbolæ, & Ellipsis laterum inuentionem. Verùm antea mihi detur, vt quibusdam morem gerens, qui tres prædictas Apollonij propositiones difficiles admodum existimant, ob nimium in ea vsum* 23. *sexti Elementorum; earundem demonstrationes singillatim afferre possim eodem penitus modo, quo aliquibus, voce, & scriptis explicare solitus fui, hoc est sine composita proportione, quam, nescio qua ratione fastidiant.*

Stantibus igitur ijsdem hypotesibus, expositionibus, ac constructionibus prædictarum Apoll. propositionum, adhibitisque figuris, quæ ibi in Commandini versione.

QVo ad 11. primi conic. post ea verba *Rectangulum igitur MLN æquale est quadrato KL sequatur sic.*

Itaque, quoniam quadratum BC ad rectangulum BAC est vt HF ad FA ex constructione, & rectangulum BAC ad rectangulum ACB vt AB ad BC, vel vt ablata BF ad ablatam BG, hoc est vt reliqua FA ad reliquam GC, siue ad LN, ergo ex æquo quadratum BC ad rectangulum ACB, vel recta BC ad CA, vel BG ad GF, vel ML ad LF, erit vt HF ad LN, ideoque rectangulum sub extremis ML, LN, siue quadratum KL æquatur rectangulo HFL. *Vocetur autem huiusmodi sectio &c.* vt ibi vsque ad finem.

Quo ad 12. primi post ea verba, *ergo rectangulum RNS æquale est MN quadrato*, sic dicatur.

Itaque, quoniam rectangulum BKC ad quadratum AK est vt LF ad FH per construtionem, vel vt XN ad NH, & quadratum AK ad rectangulum AKC est vt AK ad KC, vel HG ad GC, vel HN ad NS, ergo ex æquali rectangulum BKC ad rectangulum AKC, siue recta BK ad KA, siue BG ad GF, vel RN ad NF, est vt XN ad NS, ac propterea rectangulum sub extremis RN, NS, hoc est quadratum MN æquale rectangulo sub medijs XN, NF: *linea igitur MN potest spatium XF, &c.* vt ibi vsque ad finem.

Quo tandem ad 13. primi post ea verba *ergo rectangulum PMR æquale est LM quadrato* legatur sic.

Cumque sit rectangulum BKC ad quadratum AK ita HE ad ED ex construtione, vel XM ad MD, & vt quadratum AK ad rectangulum AKC ita AK ad KC, vel DG ad GC, vel vt DM ad MR, erit ex æquo rectangulum BKC ad rectangulum AKC, vel BK ad KA, siue BG ad GE, vel PM ad ME vt XM ad MR, quare rectangulum sub extremis PM, MR, vel quadratum ML æquatur rectangulo XME sub medijs. *Linea igitur LM potest spatinm MO &c.* vsque ad finem.

Sed iam ad propositas Apollonij propositiones accedamus, quas simul sequenti Theoremate amplectemur, itemque sine composita proportione demonstrabimus.

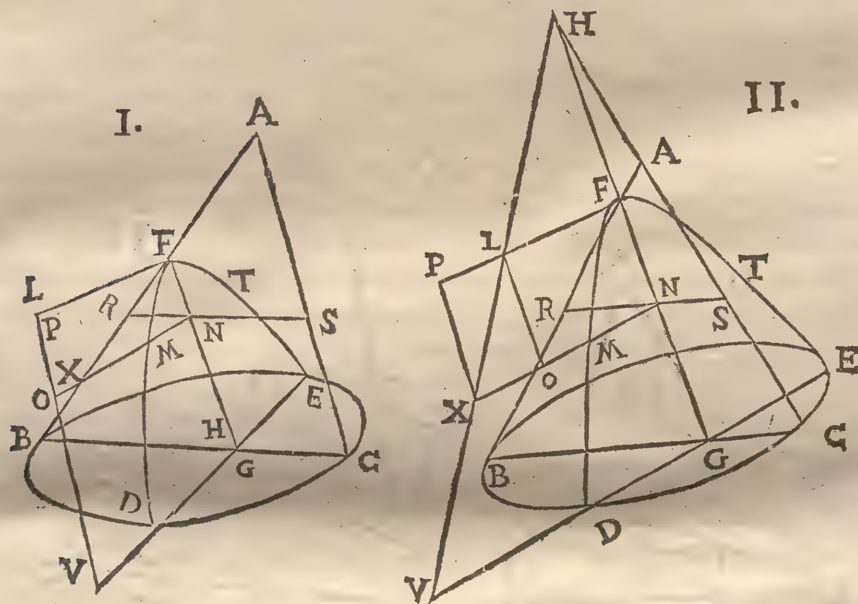
THEOR. I. PROP. I.

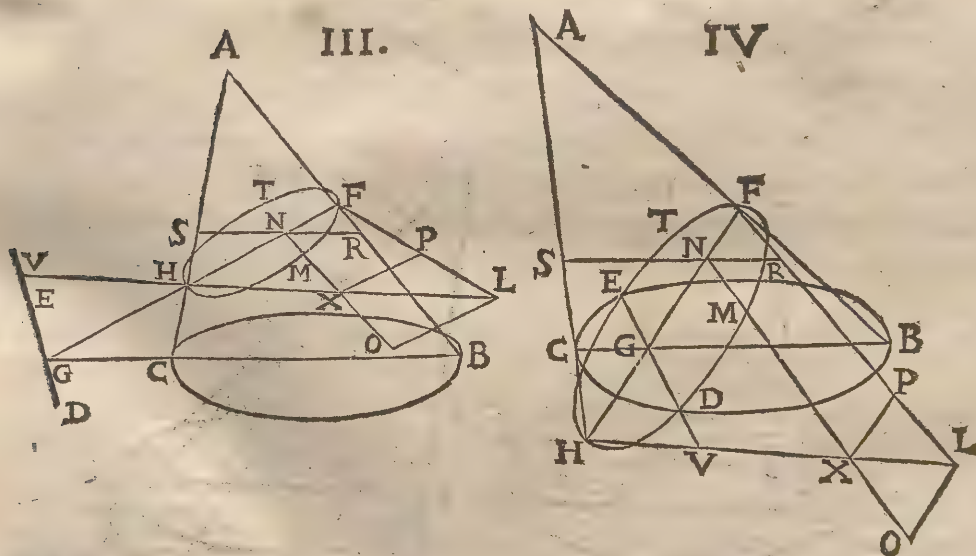
Prop. 11, 12. 13, primi conic.

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano basi coni non æquidistante, quorum communis sectio conueniat, vel cum vno tantum, vel cum vtroque latere trianguli per axem vltra, vel infra sui ipsius verticem, planum verò, in quo est basis coni, & secans planum, conueniant secundum rectam lineam, quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ indirectum ipsi constituitur, & fiat, vt rectangulum segmentorum diametri sectionis inter latera, & basim trianguli per axem interceptorum, ad rectangulum segmentorum basis, ita sectionis diameter ad aliam: recta linea, quę à sectione coni ducitur æquidistans communi sectioni plani secantis, & basis coni vsque ad sectionis diametrum, poterit rectangulum adiacens lineæ quarto loco inuentæ, latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abscinditur, inter ipsam, & verticem sectionis interiectam (si tamen sectionis diameter ęquidistet alterutri laterum triãguli per axem) sed ipsum excedet (si cum vtroque latere vltra verticẽ conueniat) vel ab eo deficiet, (si ijsdem lateribus infra verticem occurrat) rectangulo simili similiterque posito ei, quod continetur prædicto diametri segmento, & quarta inuenta, iuxta quam possunt, quæ ad diametrum applicantur.

Sit conus, cuius vertex A, basis circulus BC, & secetur plano per axem, quod sectionem faciat triangulum BAC, secetur autem & altero plano,

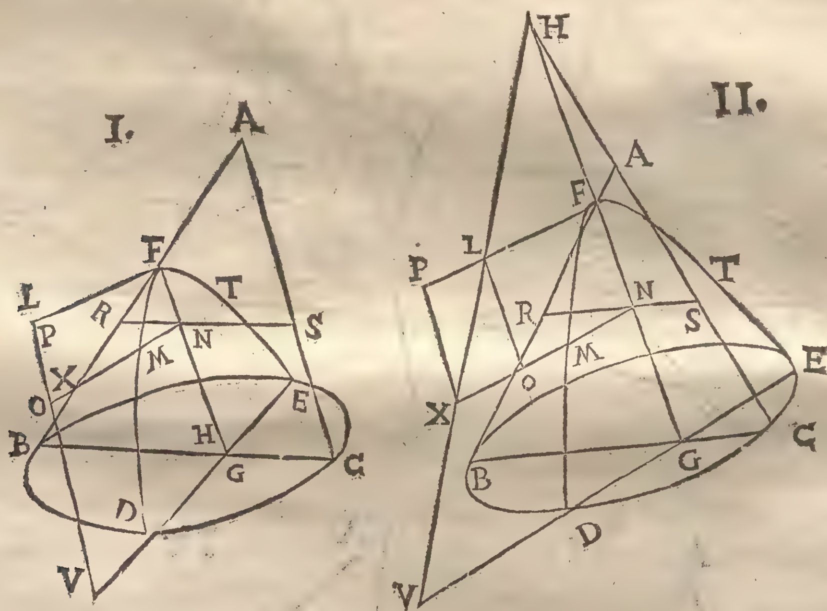
plano, quorum communis ſectio F G vel alterutri laterum trianguli per axem, nempe AC æquidiſtet, vt in prima figura, vel cum vtroque latere in F, H, extra verticem coni, vt in ſecunda; ſiue infra verticem, vt in tertia, & quarta conueniat, & ſecans planum baſi non æquidiſtet, faciatque ſectionem in ſuperficie coni lineam MFT, & communis ſectio plani ſecantis, atq; eius in quo eſt baſis coni ſit DGE perpendicularis ad baſim trianguli per axē BC, vel ad eam, quæ indirectum ipſi conſtituitur, vt in quarta figura; & fiat in prima figura, vt quadratum FG, in reliquis verò, vt rectangulum HGF,

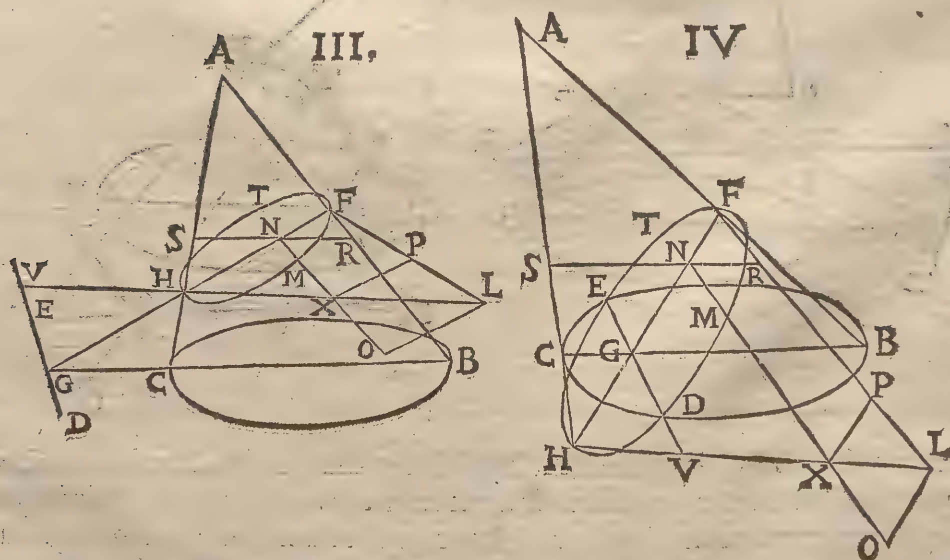




ad rectangulum BGC, ita linea HF, ſegmentum diametri ſectionis, ad aliam FL, quæ (facilitatis, & commoditatis gratia tantùm ad ea, quæ à nobis in poſterum ſunt pertractanda, non quod hanc, vel aliam poſitionem requirat propoſiti demonſtratio, poteſt enim ipſa FL cum diametro FH, ad quemcunque angulum conſtitui) concipiatur applicari ex F, ſectionis vertice, ordi-

natim ductę DE ęquidiſtans. Patet hic ipſam FL ſectionem contingere in F, per 17. primi conic. (quæ huic aptè præponi poterat, cum ipſa, ope tantum præcedentium ſeptimæ, & decimæ eiuſdem Libri demonſtretur). Sumatur præterea in ſectione quodlibet punctum M, per quod agatur MN æquidiſtans ipſi DE, vel FL, & producta conueniat in prima figura cum LV parallela ad FG, in reliquis verò cum iuncta HL in X; & per L, X ipſi FN æquidiſtantes ducantur LO, XP. Dico lineam MN poſſe rectangulum ſub FN, & NO, quod quidem adiacet lineæ quarto loco inuentæ FL, latitudinē habens FN in prima figura, in ſecunda verò prædictum rectangulum excedens, & in tertia, & quarta ab eo deficiens rectangulo ſub LO, & OX ſimili ei, quod ſub HF, & FL continetur.





Ducatur

Ducatur enim per N linea RNS parallela ad BC, est autem & MN ipsi DE æquidistans, quare angulus RNM æqualis [a] erit angulo BGD, nempe rectus, & planum transiens per MN, RS [b] æquidistabit plano per BCDE, hoc est basi coni; si igitur planum per MNRS producatur sectio circulus [c] erit, cuius diameter RNS, atque est ad ipsam perpendicularis MN, ergo rectangulum RNS æquale est quadrato MN, vti rectangulum BGC æquale est quadrato DG.

[a] 10. Vndec. Elem.
[b] 15. Vndec. Elem.
[c] 4. primi conic.

Iam cum sit NX parallela ad GV, & NS ad GC, erit in prima figura GV ad NX, vt GC ad NS, ob æqualitatem; in reliquis verò erit GV ad NX, vt GH ad HN, vel GC ad NS, ob triangulorum similitudinem; quare permutando in omnibus, GV ad GC, erit vt NX ad NS.

Amplius cum in prima figura factum sit vt quadratum FG ad rectãgulum BGC, siue ad quadratum GD, ita recta HF ad FL, vel ad GV ei æqualem, ob parallelogrammum FV, erit FG ad GV, vt GV ad GD; quare rectangulum FGV æquatur quadrato DG, siue rectangulo BGC. Item in reliquis figuris, cum factum sit vt rectangulum HGF, ad rectangulum BGC, ita recta HF ad FL, vel HG ad GV, & idem rectangulum HGF ad rectangulum FGV sit vt eadem HG ad GV, erit rectangulum BGC æquale rectangulo FGV: cum ergo in singulis figuris rectangulum BGC æquale sit rectangulo FGV, erit BG ad GF, siue RN ad NF, vt VG ad GC, siue vt XN ad NS: rectangulum ergo RNS, siue quadratum MN æquatur rectangulo XNF. Linea igitur MN potest rectangulum sub XN, & NF, quod adiacet lineæ FL, latitudinem habens FN, in prima figura, sed in secunda ipsum rectangulum excedit, & in tertia & quarta ab eodem deficit, rectangulo sub LO, & OX, simili ei, quod sub HF, & FL continetur. Quod erat demonstrandum.

Definitiones Primæ.

I.

Sectio DFE, cuius diameter FG in prima figura æquidistat AC vni laterum trianguli per axem, vocatur PARABOLE.

II.

Et cuius diameter in secunda figura occrrrit vtrique lateri trianguli per axẽ, dicitur HYPERBOLE.

III.

Et cuius diameter, in tertia, & quarta conuenit cum vtroque latere infra verticem trianguli per axem, ELLIPSIS nuncupatur.

IV.

Segmentum verò HF diametri sectionis inter latera trianguli per axem interceptum, in secunda, tertia, & quarta, dicitur LATVS TRANSVERSVM Hyperbolæ, vel Ellipsis, quod in sequentibus intelligatur semper extra Hyperbolen ex ipsius vertice in directum positum cum diametro, licet in constructionibus expresse non dicatur.

V.

In omnibus autem figuris linea FL, quarto loco inuenta, dicitur LATVS RECTVM sectionis, quod deinceps concipiatur semper contingenter applicari ex sectionis vertice, siue ordinatim ductis æquidistans.

Ambo

VI.

Ambo simul latera FL, FH, FIGVRÆ LATERA nuncupantur.

VII.

Recta verò LV æquidistans diametro sectionis FG, vt & recta HL, figuræ latera sub tendens dicitur FIGVRAM DETERMINANS, seu REGVLATRIX, vel REGVLA.

VIII.

Segmenta insuper diametrorum NF, GF, licet ab ipso Apollonio dicantur latitudines, vocentur potius ALTITVDINES, ita vt NF dicatur altitudo propria semi-applicatæ MN &c.

IX.

Rectæ autem NX, GV, quæ recto lateri FL, siue ordinatim ductis æquidistant, & inter sectionis diametrum, & regulam intercipiuntur, vocentur LATITVDINES, rectangulorum nempe FNX, FGV, quibus semi-applicatarum quadrata NM, GD æqualia sunt ostensa, ita vt XM sit latitudo propria semi-applicatæ MN &c. quæ semi-applicatæ indifferenter, ac sępius dicentur applicatæ, vel ordinatim ductæ.

COROLL.

HInc patet, in quacunque coni-sectione, quamlibet semi-applicatam esse mediam proportionalem inter propriam altitudinem, propriamque latitudinem: hoc est quadratum cuiuscunque semi-applicatæ æquari rectangulo sub propria altitudine, ac propria latitudinę contento: ostensum est enim tàm in Parabola, quàm in Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo, quadratum semi-applicatæ MN æquari rectangulo FX, quod sub altitudine propria FN, ac sub propria latitudine NX continetur.

MONITVM.



IC animaduertendum est in hac propositione nos sub contrariam coni-sectionem non exclusisse, quam Apollonius in eius quinta primi expendens, circulum esse demonstrauit, quoniam ex eo, quod superius dictum fuit, elicitur huic etiam competere eandem Ellipsis proprietatem, videlicet ordinatè applicatarum potentias æquari rectangulis, rectæ lineæ quarto loco inuentæ applicatis, latitudinem habentibus ea diametri segmenta, quæ inter ipsas applicatas, ac sectionis verticem intercipiuntur, deficientibusque rectangulis similibus contento sub transuerso rectoque latere, quæ latera in hac sub contraria sectione inter se sunt æqualia, ac penitus eadem cum diametro vnius circuli: quamobrem circulus nihil aliud esse videtur quàm Ellipsis æqualium laterum, habens tamen transuersum latus, quod vicem gerit axis linearum ad ipsum ordinatè ductarum.

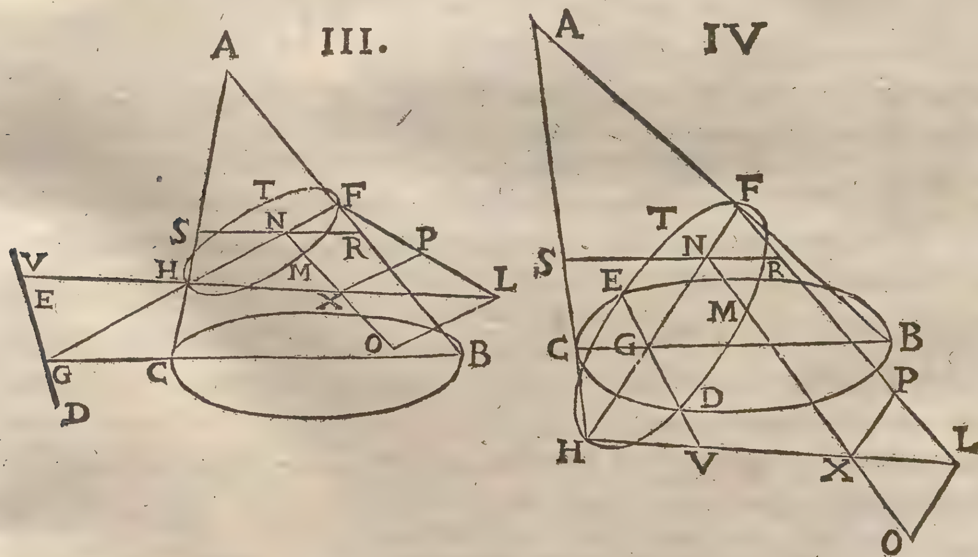
Immo si nostri esset instituti, hic quoque demonstrare possemus non tantum

omnes

omnes Ellipsis affectiones circulo communes esse, sed ferè omnes etiam Hyperbolæ, magnaque pars Parabolæ, præmittendo tamen nouas quasdam animaduersiones, cautionesque perutiles, nemini, quod sciam, adhuc cognitas, præcipuèque vtendo methodo ab ipso Apollonio satis diuersa, certàque industria propositionum figuris characteres disponendo, ad hoc vt eadem demonstratio cuiulibet coni-sectioni simul inseruiat, non absimili modo ab eo, quo in superiori Theoremate vsi sumus, ex quibus maximum doctrinæ conicæ compendium oriretur; sed quoniam id, plus laboris, ac temporis, quam ingenij requireret, libenter opus relinquo ijs, quibus multum ocij suppetit, & quos magis iuuat in alienas lucubrationes commentaria scribere, quàm vel ipsas latiùs promouere, vel nouas meditari, ac geometricè demonstrare.

Quod autem in Apollonij subcontraria sectione transuersum, rectumque latus reperiatur eadem methodo, rationeque illorum rectangulorum qua vtimur in præcedenti, quodque hæc ipsa latera inter se sint æqualia manifestum fiet ex eo, quod mox demonstrabimus non tantum in prædicta sectione subcontraria, quæ recta est plano trianguli per axem recto plano basis coni scaleni, sed etiam ei, quæ secat planum basis coni secundum rectam lineam perpendicularem basi cuiuscunq; trianguli per axem non isoscelis, vel ei, quæ ipsi basi indirectum producitur, dummodò talis sectio ex ipsomet triangulo, triangulum auferat sibi simile, sed subcontrariè positum.

Repetitis igitur duabus vltimis præcedentibus figuris, intelligatur conũ ABC scalenum esse, sectumque plano per axem, quodcunque trian-

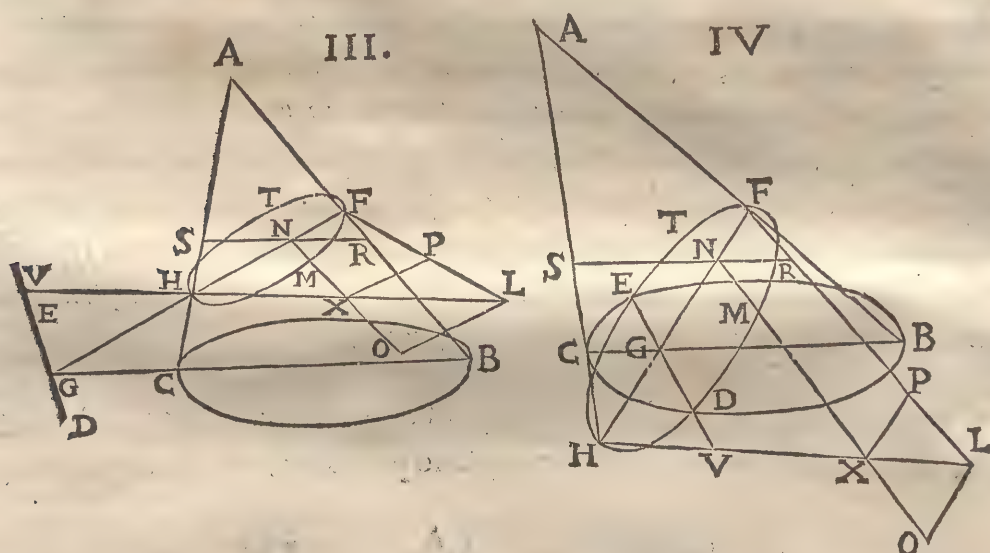


gulum efficiente ABC, dummodo non sit æquicrure, (quod per doctrinam lib. secundi Sereni, vnicum est) habens idcircò vnum latus altero maius,

sitque

ſitque ipſum AB, quod ſecetur quacunque recta linea FN intra angulum BAC, efficiens angulum AFN æqualē angulo ACB. Iam dico rectam FN productam cum reliquo latere AC conuenire, cumque baſi BC ad partem minoris lateris AC.

Quoniam cum in triangulo BAC ſint anguli A, C, minores duobus rectis, permutato C in F, erunt anguli FAC, AFN duobus rectis minores, ex quo rectæ AC, FN conuenient ſimul in H, & reliquus angulus ABC in triangulo BAC æquabitur reliquo angulo AHF in triangulo HAF, hoc eſt triangula BAC, HAF erunt ſub contrariè poſita. Amplius cum ſit BA maior AC, erit HA maior AF, propter ſimilitudinem triangulorum BAC, HAF, vnde angulus AFH erit maior angulo AHF, ſiue angulo ABC, ſed anguli BFH, AFH ſunt duobus rectis æquales, quare anguli BFH, ABC minores erunt duobus rectis, ideoqne FH, BC ſimul conuenient, vt in G. Nunc verò con-



cipiatur per rectam FHG duci planum ſecans triangulum per axem ABC, communiſque ſectio huius ſecantis plani cum plano baſis coni ſit recta DGE perpendicularis baſi BC trianguli per axem, & cum conica ſuperficie ſectionem efficiens MFTH, cuius diameter ſit FH. Itaque iam ſuperiùs oſtenſum eſt, ſi fiat vt rectangulum FGH ad rectangulum BGC, ita diameter FH ad aliam lineam FL, quæ ex F ordinatim in ſectione ductis æquidiſtet, iungaturque HL, quadratum cuiuſcunque applicatæ MN parallelæ communi ſectioni DE, æquari rectangulo NP, applicato rectę FL deficientique rectangulo LX ſimili rectangulo ſub HF, FL. Quod verò talia latera HF, FL inter ſe ſint æqualia ita oſtenditur.

Cum ſit enim angulus AFH æqualis angulo ACB, erit conſequens BFG conſequenti HCG æqualis, eſtque angulus BGF æqualis angulo HGC, cum in tertia figura idem ſint, in quarta verò ſint ad verticem, quare in triangulis BGF, HGC circa æquales angulos ad G erunt latera proportionalia, ſiue vt FG ad GB ita CG ad GH, ideoque rectangulum FGH æquale erit rectangulo BGC, ſed vt rectangulum FGH ad BGC, ita tranſuerſum HF ad rectum FL,

ctum FL, istaque rectangula æqualia ostensa sunt, vnde latera quoq; HF, FL æqualia erunt. Quod demonstrandum erat.

Sed quoniam [a] est vt transuersum HF ad rectum FL ita rectangulum HNF ad quadratum NM, atque hæc ipsa latera æqualia sunt ostensa, ergo rectangulum HNF æquabitur quadrato NM; quare in qualibet subcontraria sectione MFTH, deducta, vt in præcedenti, ex triangulo per axem coni scaleni, quod tamen non sit æquicrure, rectangula sub segmentis diametri sunt semper æqualia quadratis eorum ordinatè applicatarum, quæ quando cum diametro FH rectos angulos constituent, (quod eueniet cum communis sectio DGE perpendicularis fuerit, non solùm basi BGC trianguli per axem, sed etiam rectæ FHG communi sectioni plani secantis cum prædicto triangulo, hoc est quando triangulum per axem BAC rectum fuerit basi coni BC, nam tunc DGE communis sectio plani secantis FH cum plano basis coni BC, cum posita sit perpendicularis rectæ BGC, quæ est communis sectio trianguli per axem cum plano basis coni, perpendicularis etiam [b] erit plano trianguli BAC, vnde cum recta GHF rectos angulos faciet, ideoq; omnes in sectione MFT ordinatim ductæ, siue ipsi DGE æquidistantes eidem GFH erunt perpendiculares) Ellipsim efficient æqualium laterum circa axim FH, quæ eadem erit, ac circulus diametri FH. Si verò prædictæ applicatæ ad obliquos angulos diametrum secabunt (quod accidet cum DGE obliquè secat rectam FHG) tunc ipsa sectio erit pariter Ellipsis æqualium laterum, sed eius transuersum latus, diameter erit non autem axis.

[a] 21. primi conic.

[b] 4. def. lib. 11. Elem.

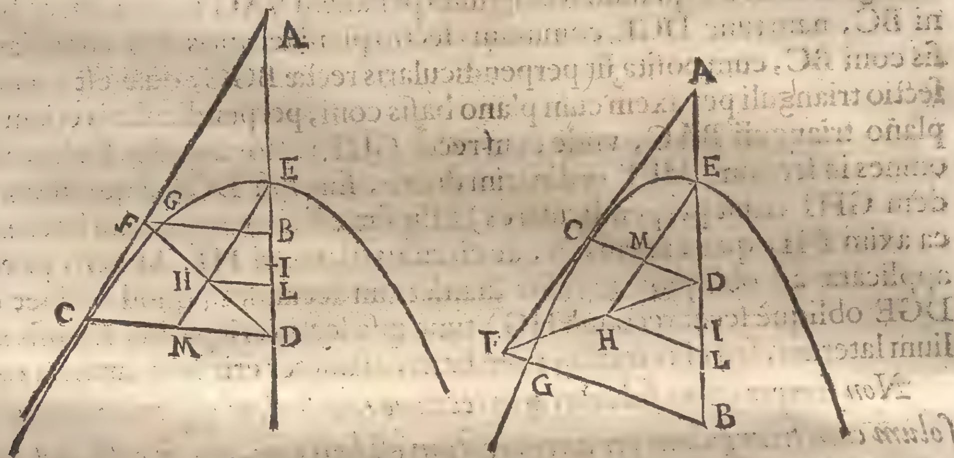
Non semper igitur subcontraria sectione coni scaleni efficitur circulus, sed solùm cum triangulum per axem rectum est basi coni, quo in casu, vt visum est, ei debetur eadem proprietas, ac Ellipsi, æqualium tamen laterum circa axim. In sectionibus autem subcontrarijs cuiuslibet alterius trianguli per axem (dummodo non sit triangulum æquicrure, quia tunc communis sectio plani secantis cum ipso triangulo non conueniet cum basi eiusdem trianguli, sed ei æquidistat) oritur Ellipsis æqualium item laterum, sed circa diametrum, quæ obliquè secat applicatas. Hinc ergo liquidò constat in superiori propositione opus non fuisse subcontrariam sectionem reijcere, vti fit ab ipso Apoll. in 13. primi, atque ab alijs doctrinam conicam pertractantibus: sed hæc obiter delibasse sufficiat; quo etiam nomine liceat mihi insequentes demonstrationes proferre, non tam vt desiderio obsequar hominis mihi amicissimi, quam vt alteri cuidam, quocum iam ab hinc multis annis illas, nec non plures alias communicaui, in mentem redigam, eas, non eius, sed quidquid sunt ingenioli mei esse inuenta; atque ita periculo occurram, ne ille, non dicam fidei, sed memoriæ forsan defectu sibi eas asciscat. Hoc autem audentiùs faciam, cum eæ non omnino ab instituto opere sint alienæ, versantur enim circà tangentes coni-sectionum ab Apoll. acutissimè quidem inuentas, ac negatiuè ostensas in eius 33. ac 34. primi, à me autem nescio an breuiùs, euidentiùs certè affirmatiuèque demonstratas, ac Problematicè propositas, vt in sequentibus.

PROBL. I. PROP. II.

Datæ Parabolæ per punctum in ea datum lineam contingentem ducere.

Prop. 33. primi conic.

Sit Parabole, cuius diameter AB, & datum in ea punctum sit C. Oportet ex C Parabolæ contingentem rectam lineam ducere. Applicetur ordinatim recta CD, & diametri segmento DE æqualis ponatur EA, iungaturque ACF. Dico ipsam esse tangentem quæsitam.



Sumpto enim in sectione quolibet puncto G, per eum applicetur BGF rectam AC secans in F, diametrum verò in B, & iuncta DF ex E vertice ducatur EHM parallela ad AF secans DF in H, & CD in M, sitque HL ipsi FB æquidistans. Iam cum sit AE æqualis ED, erit FH æqualis HD, ob parallelas AF, EH; itemque BL æqualis LB ob æquidistantes BF, LH: quare sumpta EI media geometrica inter DE, & EB ipsa EI minor erit media arithmetica EL. Ampliùs quadratum GB ad CD *a* est vt linea EB ad ED, vel vt quadratum mediæ geometricæ EI ad quadratum ED, ergo & linea GB ad CD erit vt EI ad ED, cumque sit EI minor EL, habebit EI ad ED: siue GB ad CD, minorem rationem quàm EL ad ED, vel quàm EH ad EM, seu quàm AF ad AC, vel quàm FB ad eandem CD, ergo GB minor est FB: quare punctum F cadit extra Parabolen, & sic de quolibet alio puncto rectæ ACF. Vnde ipsa ACF Parabolen contingit in C. Quod faciendum erat.

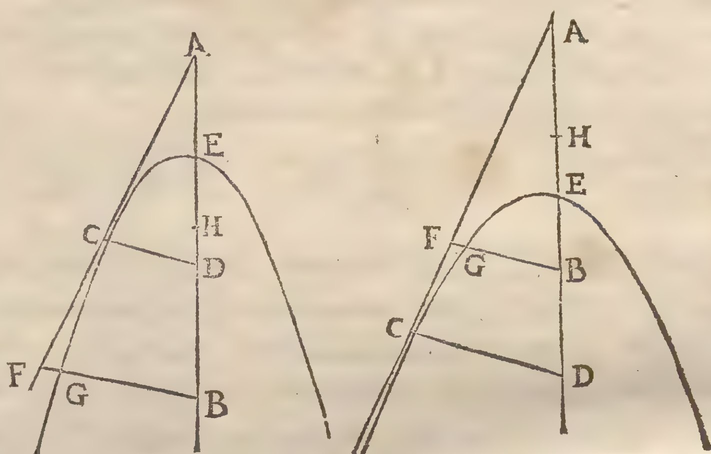
a 20. primi conic.

ALITER.

Iisdem positis, dico iterum punctum F cadere extra Parabolen. Nam secta AB bifariam in H, cum eadem quoque inæqualiter secta sit in E (nã cum sit DE æqualis EA, erit in prima figura BE maior EA, & in secunda BE minor EA) erit rectangulum AHB maius rectangulo AEB, ac propterea quadratum EA ad rectangulum AHB, siue ad quadratum AH minorem ha-

bebit

bebit rationem quàm idem quadratum E A ad rectangulum A E B, & quatuor quadrata E A; siue vnicum quadratum A D, ad quatuor quadrata A H, siue ad vnicum quadratum A B minorem habebit rationem quàm quadratum E A ad rectangulum A E B, sed quadratum A D ad A B est vt quadratum C D ad F B, & quadratum E A ad rectangulum A E B est vt quadratum E D ad rectangulum B E D, cum sit A E æqualis E D, vel vt recta E D ad rectam E B, vel vt *a* quadratum C D ad quadratum G B, quare quadratum C D ad F B minorem habebit rationem quàm idem quadratum C D ad quadratum G B, ergo quadratum F B maius est quadrato G B, vnde punctum F cadit extra Parabolen, & sic de quolibet alio puncto rectæ A C F, præter C. Quare ducta est per datum punctum C recta A C F Parabolen contingens. Quod erat faciendum.

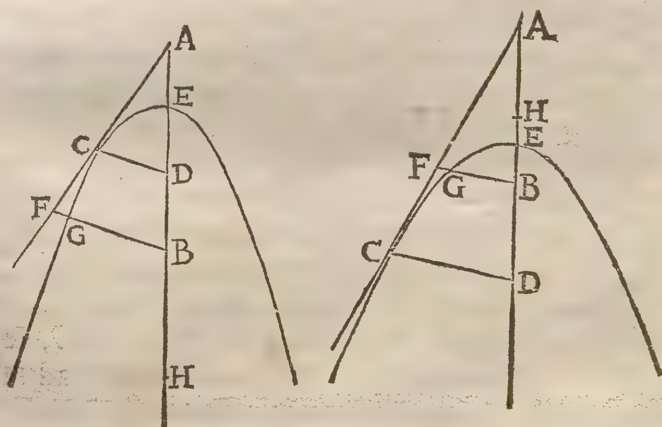


a 20. primi conic.

ALITER.

Positis ijsdem. Dico iterum, vt supra.

Sumatur enim post D A, A B tertia proportionalis A H, erit aggregatum extremarum A D, A H maius quàm duplum mediæ A B, siue maius quàm duplum A E cum E B, sed est A D dupla ad A E, ergo A H erit maior quàm dupla E B, sed est A D dupla D E, ergo A D ad D E minorem habet rationem quàm A H ad E B, & permutando D A ad A H minorem habet rationem quàm D E ad E B, sed D A ad A H, est vt quadratum D A ad quadratum A B, vel vt quadratum D C ad quadratum B F, & D E ad E B, *b* est vt quadratum D C ad quadratum B G, ergo quadratum D C ad quadratum B F minorem habet rationem quàm idem quadratum



b ibidem.

dratum D C ad quadratum B G, quare quadratum B F maius est quadrato B G; ideoque punctum F cadit extra sectionem, vt & quodcunque aliud punctum rectæ A C F, præter C. Erit ergo recta A C F Parabolen contingens in in C. Quod erat faciendum.

MONITVM.

P*Ropositio 34. primi conic. licet ab Apollonio negatiuè sit demonstrata, facilè tamen ad affirmatiuam reducitur, si ex ipsa in principio demantur ea verba*. Si enim fieri potest, secet vt E C F, *ad finem verò*. Quod fieri non potest; *nam ibi linea H G ostenditur minor G F, vnde punctum F cadet extra sectionem, & sic quodcunque aliud punctum rectæ E C H præter C, quare ipsa E C H sectionem continget in C: sed vt clariùs idem pateat, en afferemus nostram directè conclusam demonstrationem, de qua in præcedenti Monito, præmisso tantùm (vice propositionis 169. septimi Pappi, qua indiget Apolloniana propositio) sequenti Lemmate, in quo interim duæ simul circuli proprietates detegentur haud iniucundæ.*

LEMMA I. PROP. III.

Si circuli diameter A B inæqualiter secetur in C, & ad minorem partem C B producatur, ita vt sit A D ad D B, vt A C ad C B, & ex C erigatur perpendicularis C E, iungaturque D E. Dico quadratum ipsius D E æquari rectangulo A D B.

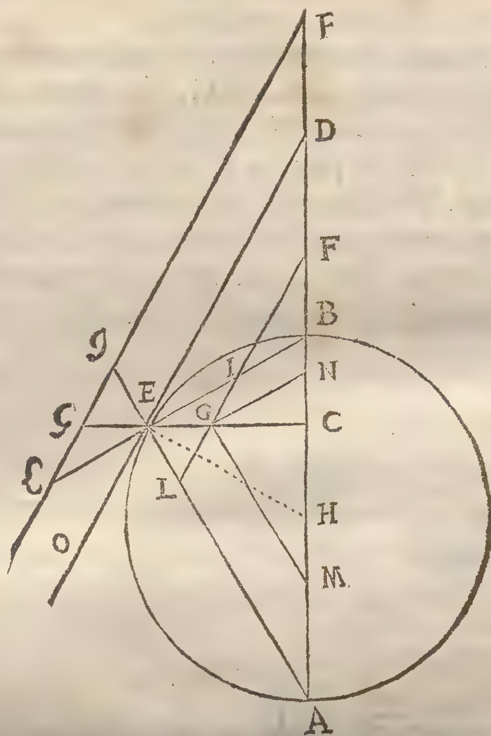
Si verò in recto angulo D C E, quælibet alia subtensa F G applicetur ipsi D E æquidistans, productam diametri partem secans in F, aut infra D, aut supra, & perpendicularem C E in G. Dico ampliùs quadratum applicatæ F G semper excedere rectangulum A F B.

QVò ad primum, sit circuli centrum H, & iungatur H E.
Iam cum sit A D ad D B, vt A C ad C B, erit componendo A D cum D B ad D B, vt A B ad B C, & sumptis antecedentium subduplis, erit H D ad D B, vt H B ad B C, & per conuersionem rationis D H ad H B, vt B H ad H C, vel vt D H ad H E (ipsi H B æqualis) ita H E ad H C: quare triangula D H E, E H C, cum habeant circa communem angulnm H latera proportionalia, similia erunt, vnde angulus D E H æquabitur angulo E C H, siue rectus erit, ideoque D E circulum continget, hoc est quadratum D E æquabitur rectangulo A D B. Quod primò, &c.

Ampliùs iungantur E B, E A, quas, recta F G producta secet, in I & L, &

L, & cadat primùm applicata F G infra contingentem D E, sitque G M ipsi E A, & G N ipsi E B parallela.

Iam cum sit G F parallela ad E D, G M ad E A, & G N ad E B, erit triangulum A D E simile triãgulo M F G, & triangulum E D B simile triangulo G F N, quare vt A D ad D E, ita M F ad F G, & vt E D ad D B, ita G F ad F N; suntque A D, D E, D B continuę proportionales, vnde M F, F G, F N, erunt quoque proportionales, siue rectangulum M F N ęquabitur quadrato F G.



Præterea cum B E circulum contingat, & E B secet, erit angulus D E B æqualis angulo B A E, sed (cum triangula B E C, B A E in semicirculo sint similia) est quoque angulus B E C, æqualis lis angulo B A E, ergo angulus D E B, siue alternus E I G æqualis erit angulo B E C, ergo linea G I ipsi G E æqualis. Item angulus O E A æquatur angulo A B E in alterna portione, siue angulo A E C, estque angulus O E A alterno G L E æqualis, vnde anguli A E C, G L E æquales erunt, quare linea G L æqualis eidem G E; erunt ergo L G, G I inter se æquales, sed est G F maior I F, habebit ergo L G ad G F minorem rationem quàm G I ad I F, & componendo L F, ad F G, siue A F ad F M minorem rationem quàm G F ad F I, vel quàm N F ad F B, quare rectangnlum sub extremis A F, F B, minus [a] erit rectangulo sub medijs M F, F N, siue minus quadrato F G. Quod demonstrandum erat.

[a] 16. sept. Pappi.

Idem penitùs ostendetur, quando applicata *F G* productæ diametro occurrat vltra D; nam adhibitis angulis ad verticem E, alternisque parallelarum, item demonstrabitur *I G* ipsi *G L* æqualem esse, & ex *G* facta simili constructione, demonstratio, & conclusio omninò erit eadem, ac supra.

PROBL. II. PROP. IV.

Datæ Hyperbolæ, vel Ellipsi, per punctum in ea datum contingentem lineam ducere.

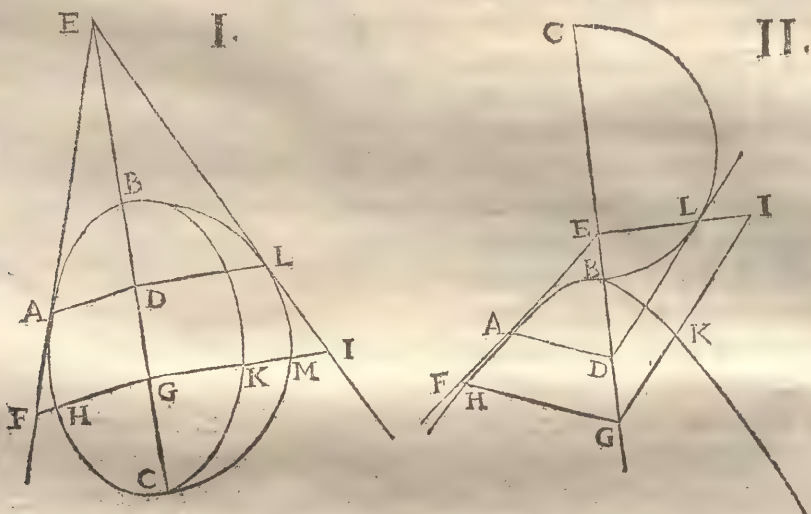
Prop. 34. primi conic.

SIt Ellipsis, vel Hyperbolæ A B K, cuius transuersum latus sit B C, & datum in sectione punctum sit A, extra verticem B: oportet ex A datæ sectioni contingentem lineam ducere.

Ex

Ex dato puncto A ordinatim applicetur A D, occurrens diametro in D, & fiat vt CD ad DB, ita CE ad EB, iungaturque EA: dico ipsam EA sectionem contingere.

Etenim sumpto in ea quocunque puncto F, vel supra, vel infra A, ordinatim agatur FHG, sectionem secans in H, diametrum in G, & super transuerso B C describatur semicirculus B L C, cuius diametto B C in Ellipsi ex puncto D erigatur perpendicularis D L, iungaturque E L, quæ, per Lemma antecedens, erit ipsi circulo contingens in L. At in Hyperbola ex E puncto ducta sit diametro CB perpendicularis EL, iungaturque D L, quæ item, ob præmissum Lemma, semi-circulum BLC continget in L, & ex G ipsi DL æquidistans ducatur GI semi-circulum



primæ figuræ secans in M, in qua cum sit ELI contingens in L, erit applicata G I maior G M, siue quadratum G I maius quadrato G M, vel maius rectangulo CGB, sed est quoque, per idem Lemma, quadratum GI (in secunda figura) maius rectangulo CGB, quare in vtraque figura quadratum GI ad quadratum DL, vel quadratum GE ad quadratum ED, vel quadratnm GF ad quadratum DA, maiorem habebit rationem quàm rectangulum CGB ad idem quadratum DL, vel ad rectangulum CDB, sed vt rectangulum CGB ad rectangulum C D B, ita [a] quadratum G H ad quadratum D A, ergo quadratum G F ad quadratum D A maiorem habet rationem quàm quadratum G H ad idem quadratum D A; quare quadratum GF maius est quadrato GH: vnde punctum F cadit extra sectionem, & sic de quibuslibet alijs punctis rectæ EAF, præter A. Ducta est ergo E A sectionem contingens in A. Quod erat faciendum.

[a] 21. primi conic.

MONI-

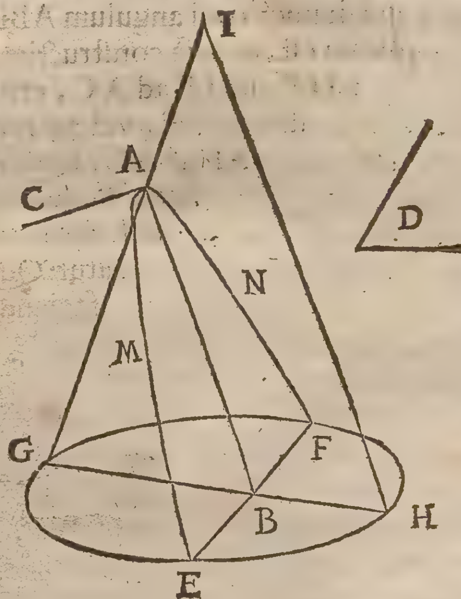
MONITVM.



T aliquando ad rem nostram accedamus, quoniam in hac de MAXIMIS, & MINIMIS tractatione frequenter nobis est opus conicas sectiones circa datam diametrum, per datum verticem, cum datis lateribus, cumque applicatis angulum dato æqualem cum diametro efficientibus describere, quæ omnia quidem nos docet Apoll. in 52. 53. 54. primi conic. ad quas itaque vsu exigente confugiendum esset; attamen cum hæ sint forsan longissimæ, ac difficillimæ omnium demonstrationum in quatuor conicorum libris contentarum, eò quod ipsarum quælibet in duos casus distribuatur, variaque ibi Lemmata requirantur à Pappo, Eutocio, & Commandino suppleta; consentaneum visum est nostras hic quoque horum problematum solutiones afferre, quæ expeditiores, admodumque faciles nobis videntur, vniuersaliter singulas ostendendo, absque vsu prædictorum, vel aliorum Lemmatum, vt mox videre licet.

PROBL. III. PROP. V.

Data in quodam plano recta linea ad vnum punctum terminata, inuenire in dato plano coni-sectionem, quæ Parabole appellatur, cuius diameter sit data linea, vertex eius terminus, rectum verò latus sit altera quædam linea magnitudine data, & ad diametrũ ordinatim ductæ in dato angulo applicentur. Prop. 52. pri. con.



SIt in subiecto plano recta linea A B data positione ad punctum A terminata, altera autem recta magnitudine data sit AC, & datus angulus sit D. Oportet in subiecto plano Parabolen describere, cuius diameter sit AB vertex A, rectum figuræ latus sit AC, & ordinatim ductæ ad diametrũ in angulo D applicentur.

Sumatur in AB quodcunque punctum B, per quod in subiecto plano, in quo AB, ducatur recta EBF ad angulum ABF, qui dato D sit æqualis, sumanturque hinc inde B E, & B F inter se æquales, vtraque verò sit media proportionalis inter B A, & datam AC, & per rectã EF intelligatur quodcunque planum GEHF, quod non sit idem cum plano per rectas E F, AB

tran-

transseunte, & horum communis sectio sit recta E F, cui in plano GEH perpendicularis ducatur recta GBH ad vtramque partem plani A E F producta, in qua sumpto quocunq; puncto G, fiat, vt G B ad B E, ita B E ad BH; (& erit rectangulum BGH æquale quadrato BE, vel BF) iungaturque GBA, & per H in plano per HG, & GA ducto agatur recta H I ipsi BA parallela.

Itaque cum GH, EF in vno sint plano, ac inter se perpendiculares, sitque rectangulum GBH æquale quadrato vtriusque EB, BF, si circa G H, tanquam diametrum describatur circulus GEHF, ipse transibit per E, & F. Si ergo intelligatur recta IAG circa peripheriam circuli GE, HF conuerti, manente eius extremo puncto I, describetur conus IGH cuius vertex I, basis circulus GH, & communis sectio conicæ superficiei cum subiecto plano erit linea EMANF, quam dico esse Parabolen quæsitam.

Conus enim IGH, cuius vertex I, & basis diameter GH secatur plano per axem describens triãgulum GIH; secatur autem, & altero plano EAF(quod est datum subiectum planum) basi coni non æquidistante, cum eam secet, secante basim coni secundum rectam lineam EF, quæ ad GH basim trianguli per axem est perpendicularis, atque est AB diameter sectionis EAF vni laterum H I trianguli per axem æquidistans, talis sectio E A F per primam huius erit Parabolæ, cuius diameter A B, vertex A, & ordinatim ducta EF, quæ ipsi diametro ad angulum ABF, dato angulo D æqualem, applicata est, ex ipsa constructione. Et cum factum sit vt AB, ad BE, ita BE ad A C, erit quadratum AB ad quadratum BE, vel ad rectangulum GBH, vt AB ad AC. Quare AC erit rectum latus Parabolæ EMANF, descriptæ vti quærebatur: Quod erat faciendum.

* * *

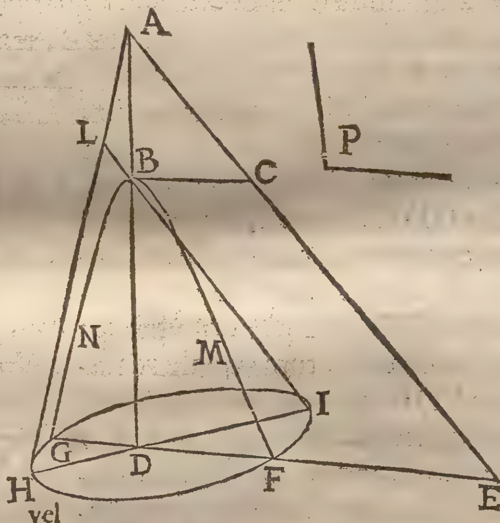
PRO-

PROBL. IV. PROP. VI.

Data in quodam plano recta linea terminata, quæ ad alteram partem in infinitum producatur: inuenire in dato plano coni-sectionem, quę dicitur Hyperbole, cuius diameter sit producta linea, vertex eius terminus, transuersum latus sit data linea terminata, rectum verò sit alia quæcunque data linea finita, & ad ipsius diametro ordinatim ductæ efficiant angulos dato angulo æquales. Prop. 53. primi conic.

Sint datæ rectæ lineæ terminatæ AB, BC, quæ in subiecto plano ad angulum ABC, dato angulo P æqualem constituantur, & harum altera AB sit vtcunque producta ad BD: oportet in subiecto plano Hyperbolen describere, cuius diameter sit BD, vertex B, transuersum latus AB rectum BC, & ordinatim ductæ ad diametru BD constituant angulos, dato, angulo P æquales.

Iungatur AC, & producatur, sumaturq; in BD quodlibet punctum D, per quod agatur in subiecto plano recta linea DE ipsi BC parallela, à qua, hinc inde producta, demantur partes DF, DG, quæ sint mediæ proportionales inter BD, & DE; & per rectam FG intelligatur planum IFHG, diuersum à plano, quod per AD, & FG transit, quorum cõmunis sectio sit recta FG, cui per D in plano IFHG perpendicularis ducatur IDH, in qua, ad partes I, sumptum sit quodcunque punctum I, & fiat vt ID ad DF, ita DF ad DH; & erit rectangulum IDH æquale quadrato DF, vel quadrato DG, sed rectæ IH, FG se mutuò secant ad rectos angulos in D, quare si circa IH circulus describatur, transibit ipse per puncta FG. Tandem iungatur HA, & IB producatur secans AH in L, & intelligatur conus cuius vertex L, basis circulus IH, & cõmunis sectio superficiei conicæ cum subiecto plano sit linea FMBNG. Dico hanc esse quæsitam Hyperbolen.



Conus enim LIH, cuius vertex L, & diameter basis, IH, plano per axem secatur triangulum faciens LIH, & secatur altero plano (quod est datum planum subiectum) secante basim coni secundum rectam lineam FG, quæ ad IH basim trianguli per axem, est perpendicularis, & communis sectio subiecti plani, & trianguli per axem, hoc est DB, producta ad B conuenit cum altero latere HL extra verticem producto in puncto A, erit, per primam huius, sectio FBG Hyperbole, cuius vertex B, diameter BD, & ordinatim ductæ FG cum diametro BD, ad angulum FDB, angulo CBA, seu dato P æqualem applicantur, ex constructione. Cumque factum sit vt BD, ad DF ita DF ad DE, erit rectangulum EDB æquale quadrato DF, siue rectangulo

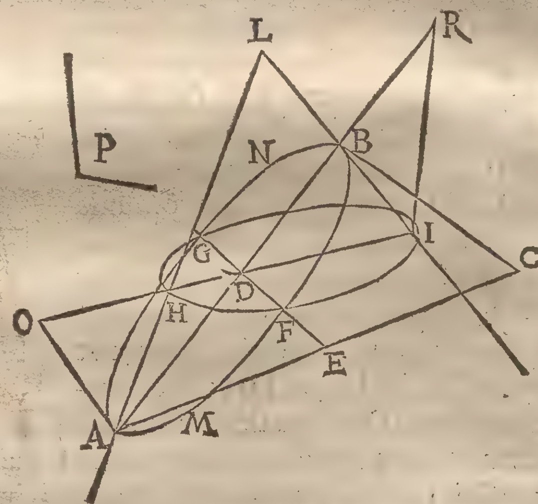
IDH: quare rectangulum ADB ad rectangulum EDB, erit vt idem ADB ad IDH, sed ADB ad EDB, est vt AD ad DE, vel vt AB ad BC, ergo rectangulum quoque ADB ad rectangulum IDH, erit vt AB ad BC. Sequitur ergo vt AB sit transuersum latus, & BC rectum descriptæ Hyperbolæ, vt in prima huius ostensum est. Quod erat faciendum.

PROBL. V. PROP. VII.

Prop. 54. pri. con. Duabus datis in subiecto plano rectis lineis terminatis, inuenire in eodem plano circa ipsarum alteram, tanquam circà diametrum, coni-sectionem, quæ Ellipsis appellatur, cuius transuersum latus sit prædicta diameter, rectum verò latus sit altera data linea, & ad diametro ordinatim ductæ in dato angulo applicentur.

SInt datæ in subiecto plano terminatę rectæ lineæ AB, BC, quæ ad datum angulum P componantur. Oportet in subiecto plano Ellipsim describere, cuius diameter sit AB, vertex B, transuersum latus AB, rectum BC, & ad diametro AB ordinatım ductæ constituant angulos dato, angulo P æquales.

Iungatur AC, sumaturque in AB quodcunque punctum D, à quo ducatur, in subiecto plano, recta GDFE ipsi BC parallela, è qua ex vtraque parte abscindantur DF, DG mediæ proportionales inter BD, & DE; erit vtriusq; ipsarum quadratum ęquale rectãgulo EDB: per rectam autem FG intelligatur secans planum IFGHG ad vtramque partem subiecti plani productum, quorum communis sectio sit recta FG, cui per D in plano secante IFHG, perpendicularis ducatur IDH hic inde producta.



Iam, vel est CB non maior BA, vel maior. Si non maior, erit quoque ED non maior ipsa DA. Itaque ex educta IDH infra subiectum planum dematur DI, quæ maior sit ipsa DB, iungatur IB, & ex A ducatur AO parallela ad IB, secans IDH in O, & fiat vt ID ad DF, ita DF ad aliam DH; erit rectangulum IDH æquale quadrato DF, siue rectangulo EDB, sed rectangulum EDB est non maius rectangulo ADB (nam est ED non maior recta DA) ergo rectangulum IDH erit non maius rectangulo BDA, sed rectangulum IDO maius est rectangulo BDA (nam cum sit vt ID ad DB, ita OD ad DA, sitque ID maior DB ex constructione, erit quoque DO maior DA) quare IDH rectangulum minus erit rectangulo IDO, hoc est linea DH minor DO; vnde punctum H est inter D, & O, siue inter parallelas IB, AO; quare iuncta AH, & producta secabit productam IB ad partes B, L, vt putà in L.

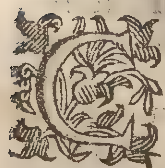
Si

Si verò CB fuerit maior BA, erit quoque ED maior DA, & tunc ex educta IDH ſupra ſubiectum planum dematur DH, quæ minor ſit ipſa DA, & iungatur AH, & fiat vt HD ad DF, ita DF ad DI; erit rectangulum HDI æquale quadrato DF, ſiue rectangulo EDB, ſed rectangulum EDB maius eſt rectangulo ADB, cum ſit ED maior DA, quare rectangulum HDI maius erit rectangulo ADB. Iam ex I ducatur IR parallela ad AH, ſecans productam AD in R; erit HD ad DA, vt ID ad DR; ſed HD facta eſt minor DA, ergo & ID erit minor DR; vnde rectangulum ſub maioribus AD, DR, maius erit rectangulo ſub minoribus HD, DI; ſed rectangulum HDI demonſtratum eſt maius rectangulo ADB, ergo rectangulum ADR eò amplius maius erit rectangulo ADB: vnde recta BR maior erit recta DB, hoc eſt punctum B cadet inter D, & R, ſiue inter parallelas AH, IR; quare iuncta IB, & producta conueniet cum producta AH ad partes B, H, veluti in L.

His itaque constructis, & demonſtratis; cum factum ſit vt ID ad DF, vel ad DG, ita DG ad DH, ſi circa diametrum IH in plano ſecante deſcribatur circulus ipſe tranſibit per puncta F, G: ſi ergo intelligatur deſcriptus conus, cuius vertex L, baſis circulus IFHG; & in infinitum productus infra baſim, communis ſectio eius conicæ ſuperficiei cum ſubiecto plano ſit linea AMF, BGNA. Dico hanc eſſe Ellipſim quæſitam.

Eſt enim conus ILH ſectus plano per axem, triangulum faciens LIH, & ſecatur altero plano FBGA, (nempe ſubiecto plano) quod baſi non æquidiſtat (cum ſe mutuò ſecent ſecundum rectam FG) & communis ſectio baſis coni IH, & ſecantis plani BA eſt recta linea FG, quæ ad IH baſim trianguli per axem eſt ducta perpendicularis, erit, per primam huius, ſectio AMFBGN Ellipſis, cuius vertex B, diameter BA, cui ordinatim ductæ, qualis eſt FG, ad datum angulum P applicantur ex constructione. Cumque factum ſit vt ED ad DF, ita DF ad DB, erit rectangulum EDB æquale quadrato DF, ſiue rectangulo IDH, vnde rectangulum ADB, ad rectangulum EDB, erit vt idem rectangulum ADB, ad rectangulum IDH; ſed rectangulum ADB ad EDB, eſt vt AD ad DE, vel vt AB ad BC, ergo rectangulum ADB, ad rectangulum IDH, erit vt AB ad BC: vnde AB eſt latus tranſuerſum, BC verò rectum deſcriptæ Ellipſis BFAG, vt ex prima huius. Quod erat faciendum.

MONITVM.



Vm ad MAXIMARVM, MINIMARVMque coni-ſectionum inſcriptibilium, ac circumſcriptibilium inuentionem nobis ſit opus admirandam illam affectionem propagare circa lineas ſemper magis, ac magis inter ſe accedentes, nunquam verò ſimul coeuntes, ab ipſo Apollonio præcipuè animaduerſam inter curuam Hyperbolæ, rectamque lineam, quàm ipſe Aſymptoton appellauit, neceſsè quidem videretur, ad hoc vt integram huius argumenti doctrinam hic ſimul habeatur, addere nunc, primam, ſecundam, decimam tertiam, ac decimam quartam ſecundi conicorum ad prædictam Aſymptoton ſpectantes; ſed

 quoniam

quoniam harum quoque habemus demonstrationes breuiores, & affirmatiuas, non indirectas, quales ab Apollonio exhibentur in prima, secunda, ac decima tertia, ne nostri libelli molem aliunde transcriptis demonstrationibus augere velle videamur, apponemus hic proprias, ita procedendo.

THEOR. II. PROP. VIII.

Prop. 1. 2 secundi conic. Si Hyperbolen recta linea ad verticem contingat, & ab ipsa ex vertice ad vtramque partem diametri sumatur æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, quæ à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur cum sectione non conuenient; (quæ in posterum cum Apollonio vocentur ASYMPTOTI) nec erit altera asymptoton, quæ diuidat angulum ab ipsis factum.

Sit Hyperbole, cuius diameter, & transuersum latus AB, centrum C, & rectum figuræ latus BF, linea verò DE, sectionem contingat in B, & quartæ parti figuræ, quæ à lateribus AB, BF continetur æquale sit quadratum vtriusque ipsarum BD, BE, & iunctæ CD, CE producantur. Dico primum eas cum sectione numquam conuenire.

Nam in altera ipsarum, vt in CD, infra contingentem, sumpto quolibet puncto G, ab eo ordinatim applicetur GIH sectionem, ac diametrum secans in I, H, quæ ipsi DB æquidistabit. Et quoniam est vt latus AB ad BF, ita quadratum AB ad rectangulum ABF, vel sumptis horum sub-quadruplis, ita quadratum CB ad quadratum BD, vel quadratum CH ad quadratum HG, & vt idem latus AB ad BF ita *a* est rectangulum AHB ad quadratum HI, erit quadratum CH ad HG, vt rectangulum AHB ad quadratum HI, & permutando quadratum CH ad rectangulum AHB, vt quadratum GH, ad HI, sed quadratum CH maius est rectangulo AHB (cum eius excessus sit quadratum CB, nam est AB secta bifariam in C, & ei adiecta est quædam BH) quare & quadratum GH quadrato IH maius erit, hoc est punctum G cadet extra Hyperbolen, & hoc semper de omnibus punctis rectarum CDG, CEL quamuis in infinitum productarum. Sunt igitur lineæ CD, CE sectioni nunquam occurrentes. Quod erat primò demonstrandum; talesque lineæ vocentur ASYMPTOTI.

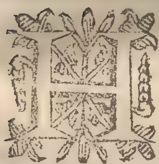
a 21. primi conic.

Amplius, ijsdem manentibus, dico quamlibet aliam CM, quæ diuidat angulum DCE, necessariò Hyperbolen secare. Ducta enim BM, ex vertice B, parallela ad CD, conueniet cum CM; nam & ipsa CM cum altera æquidistantium CD conuenit in C: occurrat ergo in M, per quod ordinatim appli-

plicetur NMO sectionem, ac diametrum secans in N, O.

Quoniam igitur eodem pænitus argumento, quo superius demonstratum est rectangulum AHB ad quadratum HI, esse vt quadratum CB ad BD, est quoque rectangulum AOB ad quadratum ON, vt idem quadratum CB ad BD, vel vt quadratum BO ad OM, erit permutando, rectangulum AOB ad quadratum BO, vt quadratum NO ad OM, sed rectangulum AOB superat quadratum BO, (excessus enim est rectangulum ABO) ergo & quadratum NO, maius est quadrato MO; sed punctum N est in ipsa sectione, quare punctum M cadit intra: ideoque iuncta CM sectionem prius secat. Non est ergo altera asymptotos, quæ diuidat angulum ab asymptotis factum. Quod erat secundò demonstrandum.

MONITVM.



His itaque præostensis, ipsarum ope, ac tertiæ secundi conicorum demonstremus aliter decimam quartam eiusdem, absq; auxilio præcedentium 5. 10. 12. ac 13. quibus ipsa 14. indiget, præmisso tantum sequenti Lemmate.

LEMMA II. PROP. IX.

Sit rectangulum ABD æquale quadrato BC. Dico addita quacunque BE, rectangulum AED maius esse quadrato EC.

CVm enim rectangulum ABD æquale sit quadrato mediæ BC, erit AB ad BC, vt BC ad BD, & diuidendo, & permutando AC ad CD, vt CB ad BD. Et cum sit DB minor DE, habebit CD ad DB maiorem rationem quam ad DE, & componendo CB ad BD, hoc est AC ad CD maiorem [a] habebit rationem quam CE ad ED, & permutando AC ad CE [b] maiorem rationem quam CD ad DE, & componendo AE ad EC [c] maiorem quam EC ad ED. Si fiat ergo vt AE ad EC, ita EC ad EF, habebit quoque EC ad EF maiorem rationem quam EC ad ED, vnde EF erit minor ED, sed (cum factum sit AE ad EC, vt EC ad EF) rectangulum AEF æquale est quadrato EC, quare rectangulum AED maius erit quadrato EC. Quod erat &c.

A C D B E F

a 28. quinti elem.
b 27. quinti elem.
c 28. quinti elem.

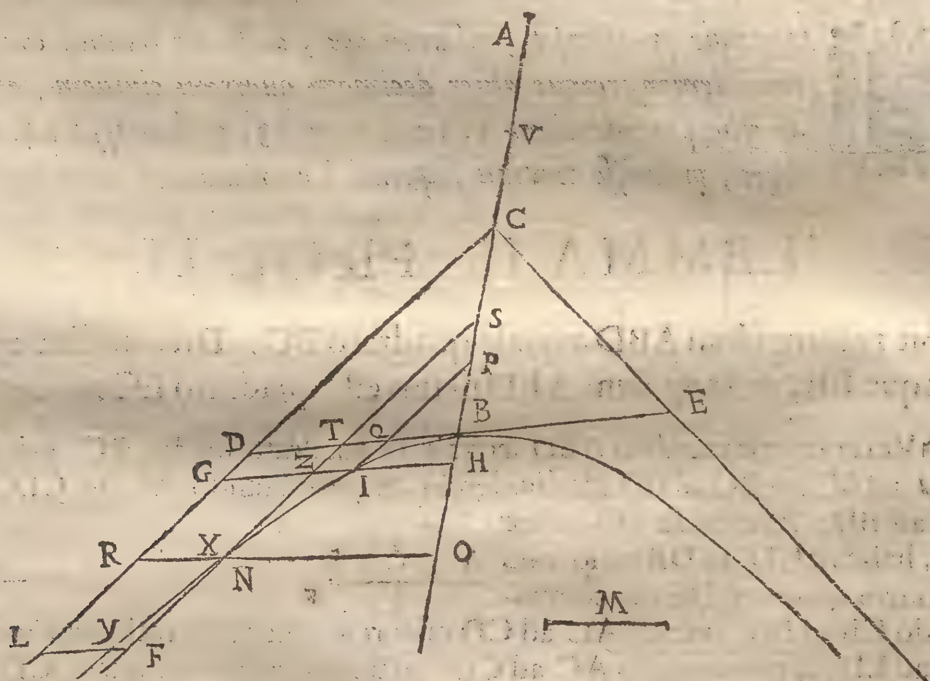
THEOR. III. PROP. X.

Asymptoti, & sectio in infinitum productæ ad se propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo. Prop. 14. sec. con.

SIt Hyperbole, cuius asymptoti CD, CE; & datum interuallum sit M. Dico asymptotos CD, CE, & sectionem productas, ad se se propius accedere, & ad interuallum peruenire minus dato interuallo M.

Nam

Nam ſit quæcunque recta DBE ſectionem contingens in B: patet per 3. ſec. conic. ipſam DE cum vtraque aſymptoto conuenire, & ad tactum B ſecari bifariam, & quadratum vtriuſque portionis DB, BE æquale eſſe quartę parti figuræ, quæ ad diametrum CB per tactum ducta conſtituitur; quare ſi fiat CA æqualis CB, appliceturque quælibet GIH ipſi DB æquidiſtans, aſymptoton, ſectionem, ac diametrum ſecans in G, I, H, & per I ducatur IP parallela ad CD, ſecans diametrum in P infra C (nam punctum I eſt intra angulum GCH) erit vt in præcedenti oſtenſum fuit rectangulum AHB ad quadratum HI vt quadratum CB ad quadratum BD, vel vt quadratum PH ad quadratum HI; vnde rectangulum AHB æquale erit quadrato HP, ſiue recta HP erit media proportionalis inter AH & HB; hoc eſt punctum P cadet inter C & B; quare IP, quæ ipſi GC æquidiſtat contingentem BD ſecabit in Q, eritque BD maior DQ, ſiue maior intercepta GI.



Iam applicata infra G qualibet alia RN diametro occurrens in O, ex N ducta ſit NS parallela ad RC, quæ contingentem BD, ac diametrum ſecabit vt ſupra in T & S. Cumque rectangulum AHB ſit æquale quadrato HP, vt modò oſtendimus, ſitque in directum ipſi AH addita quædam HO, erit, per præcedens Lemma, rectangulum AOB maius quadrato OP, ſed rectangulum AOB eadem ratione, vt ſupra, oſtenditur æquale quadrato OS; quare quadratum OS maius eſt quadrato OP, hoc eſt punctum S cadit inter C, & P, ſiue CP eſt maior CS, vel DQ maior DT, hoc eſt GI maior RN. Quare aſymptotos CD, & ſectio BIN quæ in infinitum productæ, nunquam ſimul conueniunt, ad ſe propiùs accedunt; idemque de aſymptoto CE. Quod erat primò &c.

Præterea dico ipſas ad interuallum peruenire minus dato interuallo M.

Sumatur DT ex cõtingente BD, quę ſit minor interuallo M, & per T agatur STN parallela ad CD diametro occurrens in S, ſeceturq; SV æqualis SB,

& fiat

& fiat vt AV ad VS, ita AS ad SO, & per O ordinatim applicetur ONR sectionem secans in N, rectam verò ST in X. Et cum sit vt AS ad SO, ita AV ad VS, erit componendo AO ad OS, vt AS ad SV, vel vt AS ad SB, & permutando, & per conuersionem rationis, vt AO ad OS, ita SO ad OB, ergo rectangulum AOB æquatur quadrato OS: sed rectangulum AOB ad quadratum suæ ordinatim ductæ ON in Hyperbola semper est vt quadratum CB ad BD (vt iam superius ostendimus) vel vt quadratum SO ad OX: quare permutando rectangulum AOB ad quadratum SO, erit vt quadratum ON ad quadratum OX, sed est rectangulum AOB æquale quadrato SO, ergo & quadratum ON quadrato OX æquale erit, quare puncta N, & X idem sunt, sed est N in sectione, quare recta TX conuenit cum sectione in X, vel N, hoc est RN & RX æquales erunt, sed est RX æqualis ipsi DT, & DT minor M, vnde RN, vel RX erit quoque minor M. Peruenit ergo asymptotos CD cum sectione ad interuallum RN minus dato interuallo M. Quod tandem erat demonstrandum.

COROLL. I.

Hinc est, quodlibet diametri segmentum inter quamcunque applicatam, & rectam ex ipsius occursu cum sectione alteri asymptoton æquidistanter ductam, medium esse proportionale inter aggregatum ex transuerso latere cum prædicto diametri segmento, idemque segmentum. Demonstratum est enim HP esse mediam proportionalem inter AH, & HB; & OS mediam inter AO, & OB.

COROLL. II.

Patet etiam quamcunque rectam, ex puncto transuersi lateris inter centrum, & verticem sumpto alteri asymptoton equidistanter ductam necessariò sectioni occurrere. Iam enim supra ostendimus rectam STX, quæ ex puncto S in transuerso CB ducta est asymptoton CD parallela, cum sectione conuenire in N.

MONITVM.



Inc facilè erit ostendere 13. secundi conicorum aliter, & affirmatiuè, vt videre licet in sequenti.

THEOR. IV. PROP. XI.

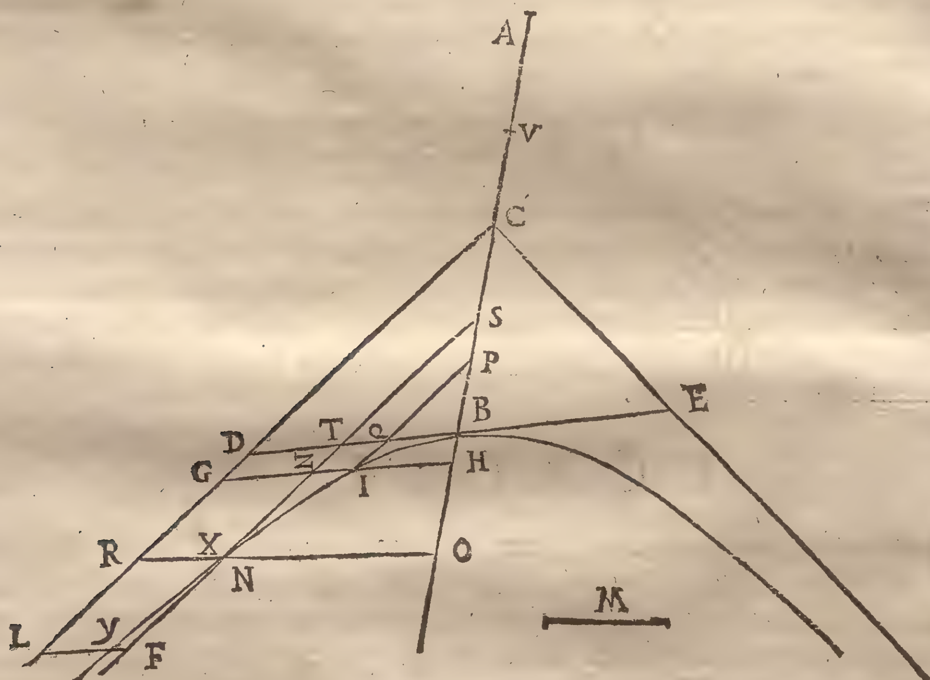
Si in loco asymptotis, & sectione terminato quædam recta linea ducatur alteri asymptoton æquidistans, in vno tantùm puncto cum sectione conueniet, eamque necessariò secabit. Prop. 13. sec. conic.

Sit in præcedenti schemate in loco ab asymptotis, & sectione terminato quodcunque punctum S, à quo ducta sit STX asymptoton CD æquidistans.

ſtans. Dico ipſam cum ſectione conuenire, eamque omnino ſecare.

Iungatur CS, quæ producta ſectioni occurret, per ſecundam partem 8. huius, eritque ſectionis diameter: quare per Coroll.2. præcedentis, ipſa STX ſectioni occurret, vt in X.

Præterea, cum quæcunque contingenti æquidiſtans GI ſupra RX, inter aſymptoton, & ſectionem intercepta, maior ſit ipſa RX, ſiue ipſa GZ, punctum Z cadet extra ſectionem, & ſic de quolibet alio puncto rectæ XTS. E contra cum quælibet intercepta LY infra RX, parallela ad DB, minor ſit ipſa RX, ſiue LF, punctum F cadet intra ſectionem, idemque de quolibet alio puncto rectæ XF: vnde recta STX ab ipſo occurſu X cum ſectione, ad partes verticis tota cadit extra, ad oppoſitas verò partes tota cadit intra ſectionem; ideoque in vno tantum puncto X Hyperbolen ſecat. Quod erat propoſitum.



COROLL.

Hinc eſt, lineam alteri aſymptoton æquidiſtantem per punctum, quod ſit, vel in ipſa ſectione, vel intra, pariter in vno tantùm puncto ſectioni occurrere, eamque ſecare.

Nam recta XS ex puncto X, quod eſt in Hyperbola, vel recta FS ex puncto F, quod eſt intra, æquidiſtanter ducta aſymptoto CD, ſi ad partes centri C producatur, alteri aſymptoto CE omnino occurrit, (quoniam EC, ſecans DC vnam parallelarum ſecat quoque alteram CE) vnde aliqua pars, ipſius rectæ XS, vel FS cadit in loco ab aſymptotis, & ſectione terminato, ac ideo ex his, quæ ſuperius oſtendimus, ipſa linea in vno tantùm puncto ſectioni occurret, ac Hyperbolen ſecabit.

Qua propter, quælibet linea alteri aſymptoton æquidiſtans, dummodo ſit ducta ex puncto, quod ſit in angulo ab aſymptotis facto, in vno tantùm puncto Hyperbolæ occurrit, atque eam ſecat.

MO-

MONITVM.

EX hucusque demonstratis liceat animaduertere quamcumque asymptoton quodam-modo esse primam ex centro ducibilium, sed Hyperbolæ non occurrentium; itemque esse primam sibi ipsi æquidistantium, sed Hyperbolen non secantium.

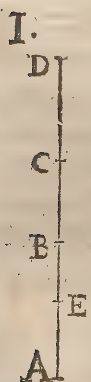
QVæcunque enim educta ex C diuidens angulum DCE secat Hyperbolen, quæcunque verò ex C ducta extra CD, Hyperbolæ quidem non occurrit, cum neque ipsa CD interior, cum sectione conueniat. Quare angulus DCE dici poterit MINIMVS ex centro C Hyperbolen comprehendentium, rectis lineis nunquam ei occurrentibus.

Item quælibet SX asymptoto CD æquidistanter ducta intra angulũ DCE, Hyperbolen secat, quælibet verò extra angulum ducta eidem CD parallela, nunquam conuenit cum CD, & eò minus cum sectione: ex quo asymptoton Hyperbolæ appellari quodammodo posset vltima tangentium Hyperbolen, ad infinitum tamen interuallum. Nam, quæcumque contingens Hyperbolen ad finitam distantiam, secat semper diametrum CB infra C, & quò punctum contactus remotius fuerit à vertice eò magis occursus contingẽtis cum diametro, centro C fiet propior; donec, cum punctum contactus per infinitum interuallum abierit à centro, prædictus occursus cum ipso centro conueniat.

Sed ne suscipiendam materiam interpellare nobis sit opus, cum in ipsius progressu Parabolæ quadratura indigeamus, inter alias, quas habemus, apponemus hic tantum eam, quæ, licet expeditior non sit, nonnulla tamen Lemmata, ac Theoremata præmittit, quorum prima ad aliquas de MAXIMIS, & MINIMIS propositiones omnino sunt necessaria.

LEMMA III. PROP. XII.

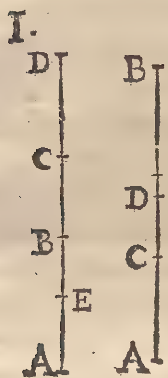
Si fuerit vt recta AD ad DC, ita quadratum AB ad BC. Dico tres AD, DB, DC esse in continua, eademque ratione geometrica.



II.

NAm sumpta BE tertia proportionali post AB, BC; cum sit in prima figura, AB ad BC, vt BC ad BE, erit componendo AB cum BC ad BC, vt BC cum BE ad BE, & permutando, AB cum BC, siue AC, ad BC cum BE, siue ad CE, vt BC ad BE, vel vt AB ad BC, ex constructione: quod memento.

Et cum sit, ex suppositione, linea AD ad DC vt quadratum AB ad BC, & quadratum AB ad BC, vt linea AB ad BE, ex constructione, erit AD ad DC, vt AB ad BE, & per conuersionem rationis, & permutando, & iterum per conuersionem rationis AD ad DB, vt AC ad CE,



vel vt AB ad BC, vt superius ostendimus: & permutando, & per conuersionem rationis, AD ad DB vt DB ad DC. Quod in prima figura ostendendum erat.

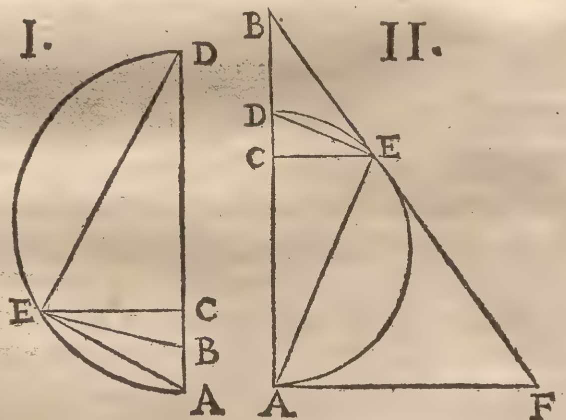
In secunda verò: cum sit AB ad BC, vt BC ad BE, erit diuidendo, & permutando, AC ad CE vt BC ad BE, vel vt AB ad BC, ex constructione: quod serua.

Et cum sit AD ad DC vt quadratū AB ad BC, & quadratum AB ad BC vt linea AB ad BE, ex constructione, erit AD ad DC vt AB ad BE, & per conuersionem rationis, permutando, conuertendo, diuidendo, & iterum conuertendo AD ad DB, vt AC ad CE, vel vt AB ad BC, vt modò ostensum fuit, & permutando, conuertendo, per conuersionem rationis, & diuidendo AD ad DB vt BD ad DC. Quod erat in secunda demonstrandum.

ALITER idem breuiùs.

Iisdem positis: dico iterùm vt in præcedenti.

DEscribatur super AD semicirculus AED, & per C erigatur CE diametro AD perpendicularis, iunganturque DE, AE, & BE, quæ producta in secuuda figura, occurrat cum AF ipsi CE parallela in puncto F.



Iam in vtraque figura, cum sit per hypotesim quadratum AB ad BC, vt recta AD ad DC, vel vt quadratum AD ad DE, vel vt quadratum AE ad EC, ob triangulorum similitudinē, erit recta AB ad BC, vt recta AE ad EC: quare in prima figura erit angulus AEB, æqualis angulo BEC, sed angulus BAE æquatur angulo DEC, quare duo simul AEB, BAE, siue vnicus DBE, æqualis erit duobus simul BEC, DEC, siue vnico DEB, ergo BD est æqualis ipsi DE. In secunda verò, cum sit AB ad BC, vel FA ad EC, vt AE ad EC erunt AF, AE interse æquales, vnde angulus AEF, æqualis angulo AFE siue parallelarum externo CEB, sed est AEF æqualis duobus simul ABE, EAB, quare & CEB iisdem angulis ABE, EAB æqualis erit, estque pars CED æqualis vnico angulo EAD, ergo reliquus angulus DEB reliquo DBE æqualis erit, hoc est recta DB æqualis DE. Itaque in vtraque figura cum DB sit æqualis DE, sitque DE media proportionalis inter AD, DC, erit quoq; DB media inter easdem AD, DC. Quod erat demonstrandum.

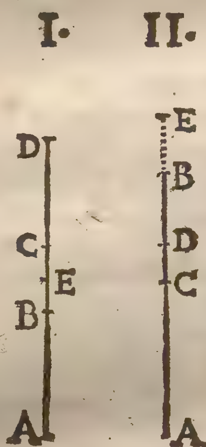
ITE-

ITERVM aliter breuiùs, sed negatiuè.

Si fuerit vt recta AD ad DC, ita quadratum AB ad BC, erunt AD, DB, DC in continua ratione geometrica.

SI enim DB non est media proportionalis inter AD, DC, esto si fieri potest media quæcunque DE; erit igitur, in prima figura, tota AD ad totam DE, vt pars DE ad partem DC, ergo reliqua AE ad reliquam EC, erit vt pars ED ad DC, vel vt tota AD ad totam DE: (ex cõstructione) in secunda verò cum sit AD ad DE vt DE ad DC, erit componendo AE ad ED, vt EC ad CD, & permutando AE ad EC, vt ED ad DC, vel vt AD ad DE (ex constructione) cum ergo in vtraque figura sit AE ad EC, vt AD ad DE, erit quadratum AE ad EC, vt quadratum AD ad DE, vel vt recta AD ad DC, vel vt quadratum AB ad BC (ex suppositione) vel recta AE ad EC, vt recta AB ad BC, & in prima figura componendo, at in secunda diuidendo, AC ad CE, vt AC ad CB, quare CE, CB inter se sunt æquales, totum, & pars, quod est absurdum; non est ergo media inter AD, & DC, quæ sit maior, vel minor DB; vnde ipsa DB erit media proportionalis inter AD, & DC. Quod demonstrare oportebat.

Vniuersalius quàm à Caual. in 3. prop. exerc. 6.



COROLL.

HInc patet, quod, cum fuerint tres magnitudines continuè proportionales, tùm excessus quibus differunt, tùm earum aggregata, erunt in eadem ratione, in qua sunt datæ magnitudines: quando enim positum fuit esse AD ad DE, vt DE ad DC ostensum quoque fuit AE ad EC esse vt AD ad DE, sed in prima figura AE, EC sunt excessus datarum magnitudinum, in secunda verò sunt aggregata primæ cum secunda, & secundæ cum tertia; quare patet, &c.

THEOR. V. PROP. XIII.

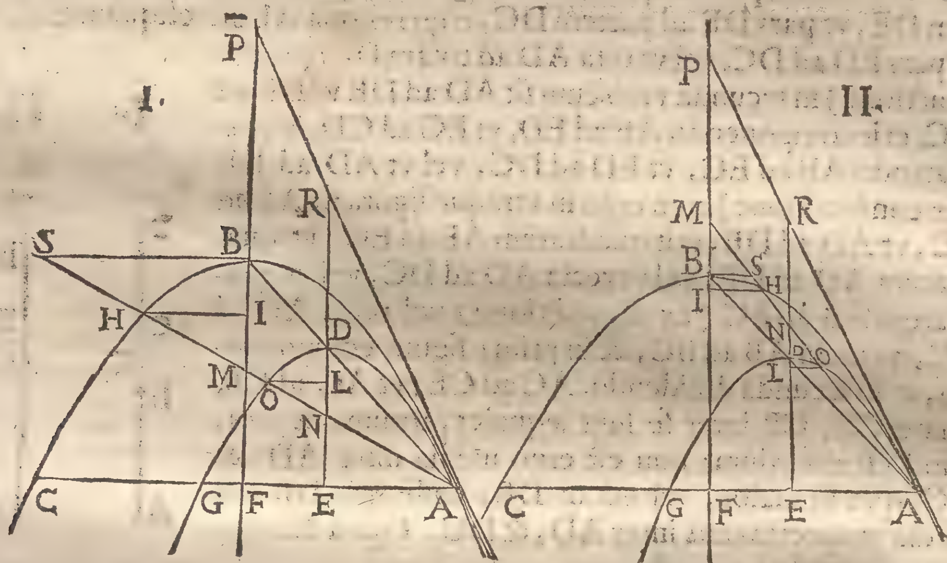
Si duæ Parabolæ ad easdem partes descriptæ ad idem punctum simul occurrant, sintque earum diametri inter se æquidistantes, & applicatæ sint eædem, ac ipsarum vertices sint in eadem recta, quæ ducitur ex occursu; ipsæ in nullo alio puncto simul conuenient, & omnes, quæ ex contactu in ipsis ducuntur in eadem ratione à sectionibus diuidentur.

ESto Parabole ABC, cuius diameter BF, & ducta BA, sit quælibet DE ipsi BF æquidistans, & AC ordinatim applicata BF, & per verticem D,

 cum diame-

diametro DE describatur Parabole ADG, cuius AE sit ~~eius~~ semi-applicata: dico primum Parabolen ADG, etiam si in infinitum producatur, totam cadere intra ABC, & si ex A ducatur quæcunque ANMH, ipsam à Parabola ADG secari in O, in eadem ratione, ac AC secatur in G, & AB in D.

Ducta enim ex A recta AP contingente Parabolen ABC, erit FB æqualis BP; ideoque ED æqualis DR, vnde AR continget Parabolen ADG, & AH secabit ipsam in O.



Iam ductis ex H, O, semi-applicatis HI, OL, erit, ob Parabolen, FB ad BI, vt quadratum AF ad HI, vel vt quadratum FM ad quadratum MI; quare per Lemma præcedens, erit FB ad BM, vt BM ad BI, & per Coroll. eiusdem, in vtraque figura, erit FM ad MI, vt FB ad BM; eadem penitus ratione ostendetur esse EN ad NL, vt ED ad DN, sed est FB ad BM, vt ED ad DN, quare & FM ad MI erit vt EN ad NL, sed FM ad MI, est vt AM ad MH, & EN ad NL, vt AN ad NO, quare AM ad MH erit vt AN ad NO, & in prima figura conuertendo, componendo, & permutando, HA ad AO, vt MA ad AN; in secunda verò per conuersionem rationis, conuertendo, & permutando HA ad AO erit vt MA ad AN. Est igitur in vtraque figura HA ad AO, vt MA ad AN, vel vt BA ad AD, sed est BA maior AD ex constructione, quare & HA erit maior AO, sed HA tota est intra Parabolen ABC, vnde punctum O, quod est in Parabola ADG erit intra Parabolen ABC, & sic de quocunque alio puncto Parabolæ ADG, etiam si ducta AH cadat infra AC; quare ipsa cadit tota intra ABC: & cum sit HA ad AO, vt BA ad AD, vel vt FA ad AE, vel sumptis duplis, vt CA ad AG, erit diuidendo HO ad OA, vt CG ad GA. Quod erat, &c.



COROLL. I.

Hinc patet, quod si recta linea in Parabola vtcunque applicata ex vtraque parte sectioni occurrens cum diametro, vel intra, vel extra sectionem conueniat, atque ex ipsius terminis cum sectione, ad diametrum ducantur ordinatæ, erunt ab his abscissa diametri segmenta ex vertice sumpta, extremæ, & abscissum ab applicata, erit media trium continuè proportionalium. Demonstratum est enim in figuris Theorematis quando AH diametrum secat in M, & sectionem in A, H, quod ordinatim applicatis AF, HI, est FB ad BM, vt BM ad BI.

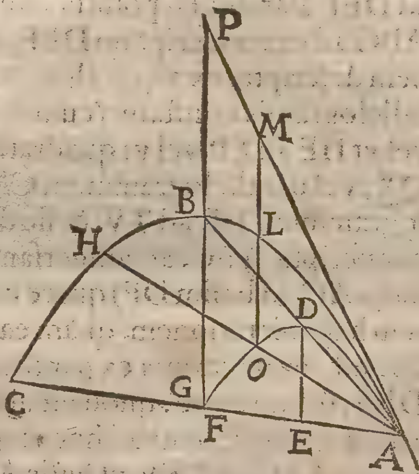
Vniuersalius quàm in 4. prop. exerc. 6. Caual.

COROLL. II.

Ex quo etiam elicitur, quod si in Parabola ABC ducta AH diametrum secans in M producatur vsque ad occursum cum contingente ex vertice B in S, semper rectangulum sub segmentis AS, & SH, inter sectionem, & contingentem interceptis æquari quadrato segmenti SM inter contingẽtem, ac diametrum intercepti. Nam cum sit vt FB ad BM, ita BM ad BI erit quoque ob parallelas, AS ad SM, vt SM ad SH, quare rectangulum ASH æquabitur quadrato SM.

COROLL. III.

Hinc etiam est, quod, si iisdem positis, interior Parabolę ADG habuerit verticẽ in D puncto medio rectæ AB, ipsa quoque transibit per F medium punctum basis AC, & quæcunque educta ex contactu A, qualis est AH, bifariam secabitur in O ab interna sectione; quare si ex O ducatur OLM diametro BF æquidistans, ipsa erit diameter portionis ALH, & AH vna applicatarum, AO verò semi-applicata. Cumque sit AP contingens ABC in A, erit OL in trilineo mixto ADFB, æqualis LM in trilineo mixto ALBP, & sic de omnibus vbicunque interceptis in iisdem trilineis.



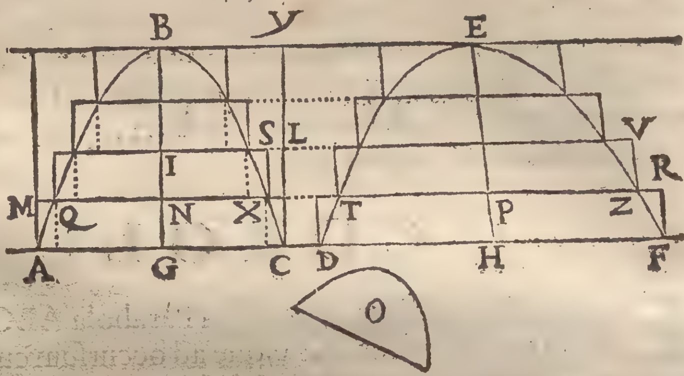
THEOR. VI. PROP. XIV.

Parabolæ æqualium altitudinum inter se sunt vt bases.

Sint duæ Parabolæ ABC, DEF æqualium altitudinum, hoc est concipiantur dispositæ inter easdem parallelas BE, AF: dico esse vt basis AC vnius, ad basim DF alterius, ita Parabole ABC ad Parabolen DEF.

Nam

Nam si hæ Parabolæ non fuerint basibus proportionales, erit altera Parabolarum minor quàm opus est ad hoc vt huiusmodi magnitudines sint proportionales. Esto igitur si possibile est minor ABC, & eius defectus sit O; ita vt basis AC ad DF sit vt aggregatum Parabolæ ABC cum magnitudine O ad Parabolen DEF. Iam iuxta vulgatam methodum Antiquorum circumscribatur Parabolæ ABC, figura ex parallelogrammis constans, æqualium altitudinum, ita vt eius excessus supra Parabolen sit minor O; quod fiet, nempè si ex circũscripto Parabolæ parallelogrammo AY; per bisectionem diametri BG in I, auferatur dimidium parallelogrammũ AL, & ex reliquo dimidium, donec supersit parallelogrammum CM,



quod minus sit spacio O: sic enim excessus circumscriptæ figuræ ex parallelogrammis, supra inscriptam ex æque altis parallelogrammis erit maximum parallelogrammum CM, (vt satis patet) quod est minus spacio O, ac ideo excessus circumscriptæ supra ipsam Parabolen erit adhuc minor O; quapropter addita communi Parabola ABC, erit vniuersa figura circumscripta minor aggregato Parabolæ ABC cum spacio O: itaque circumscripta ABC ex parallelogrammis ad Parabolen DEF minorem habebit rationem, quam huiusmodi aggregatum ad eandem Parabolen DEF; sed prædictũ aggregatum ad DEF Parabolen ponitur esse vt basis AC ad DF, vel vt circumscripta ABC ad circumscriptam DEF, quæ per æquidistantium basibus intersectionem descripta, ex æquè altis, & numero æqualibus, ac proportionalibus parallelogrãmis constabit (cum sit quadratum AC ad QX, vt recta GB ad BN, vel vt HE ad EP, vel vt quadratũ DF ad quadratum TZ; vnde & recta AC ad QX, vel parallelogrammum CM ad QS, vt recta DF ad TZ, vel vt parallelogrammum DR ad TV, & sic de reliquis singula singulis, vnde vniuersa circumscripta ABC, ad vniuersam DEF, est vt vnum CM ad vnum DR, vel vt basis AC ad basim DF) quare circumscripta ABC ad Parabolen DEF minorem habebit rationem, quam eadem circumscripta ad circumscriptam DEF, hoc est circumscripta ex parallelogrammis erit minor ei inscripta Parabola DEF, totum parte; quod est absurdum: inter has ergo Parabolas non datur minor quàm sit opus ad hoc vt ipsæ sint basibus proportionales: erit ergo Parabole ABC ad DEF, vt basis AC ad DF basim. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

QVod ostensum est de integris Parabolis æquè altis, idem penitus consimili constructione, eademque ratiocinatione demonstrabitur de duobus trilineis ABG, CBG ab eadem diametro BG abscissis; item de duobus trilineis Parabolicis ABG, DEH æqualium altitudinum, à

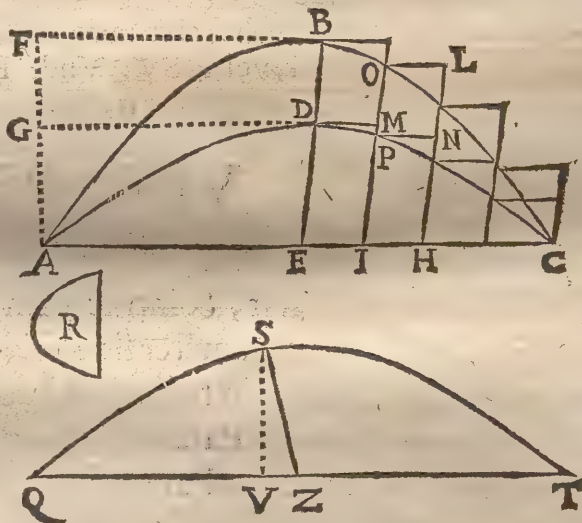
curuis

curuis AB, DE; diametris BG, EH; & ſemi-applicatis AG, DH comprehenſis, nempe trilineum ABG ad CBG, eſſe vt baſis AG ad GC, ſibi æqualem; ac propterea diametrum BG Parabolen ABC bifariam ſecare; & vnũquodque trilineorum eſſe ſemi-Parabolen; & ſemi-Parabolen ABG ad ſemi-Parabolen DEH æqualis altitudinis, eſſe vt baſis AG ad baſim DH, & integram ABC ad dimidiam DEH eſſe vt baſis AC ad ſemi-baſim DH.

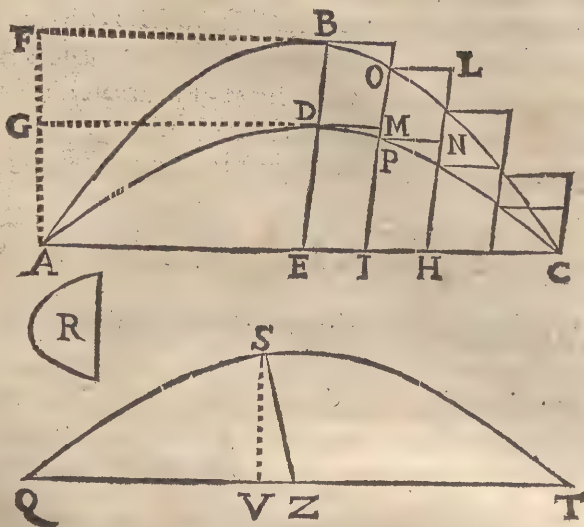
THEOR. VII. PROP. XV.

Parabolæ æqualium baſium ſunt inter ſe vt altitudines.

SInt primò duæ Parabolæ ABC, ABC ſuper eandem baſim AC, & circa eandem diametrum BE. Dico has eſſe inter ſe vt earum altitudines FA, GA; & quod de ſemi-Parabolis EBC, EDC demonſtrabitur, idem inſequetur de duplis.



Si enim non eſt vt FA ad AG, ita ſemi-Parabole EBC ad EDC, erit altera ipſarum minor quàm ſit opus ad hoc vt ſint proportionales altitudinibus FA, AG, ſitque, ſi poſſibile eſt, minor EBC defectu R, & bifariam ſecta EC in H, & iterum EH bifariam in I, &c. circumſcribatur, vt in præcedenti, trilineo ſemi-Parabolæ ECB figura BLCE ex parallelogrammis æque altis conſtans, cuius exceſſus ſupra ſemi-Parabolen ſit minor R, ita vt ipſa circumſcripta figura BLCE ad ſemi-Parabolen EDC adhuc minorem habeat rationem quàm altitudo FA ad AG; quo facto, ſemi-Parabolæ quoque EDC per æquidiſtantium diametro interſectionem altera circumſcribatur figura DMNCE ex totidem Parallelogrammis æque altis, &c. Et cum ſit ob Parabolas, recta BE ad OI, vt rectangulum AEC ad AIC, vel vt DE ad PI, erit permutando BE ad ED, vel parallelogrammum BI ad DI, vt OI ad IP, vel vt parallelogrammum OH, ad PH, & ſic de reliquis circumſcriptæ BLCE, ad reliqua circumſcriptæ DMCE, ſingula ſingulis, quare vniuerſa circumſcripta ALCE ad vniuerſam DMCE, erit vt vnum parallelogrammum BI ad vnum DI, vel vt baſis BE ad ED, vel vt FA ad AG, ſed FA ad AG habet maiorem rationem quàm circumſcripta ALCE ad ſemi-Parabolen EDC; quare circumſcripta ALCE ad circumſcriptam DMCE, habebit maiorem rationem quàm ad ſemi-Parabolen EDC, vnde circumſcripta DMCE minor erit inſcripta ſemi-Parabola EDC; totum parte, quod eſt abſurdum. Non datur ergo inter has ſemi-Parabolas minor quàm ſit opus, ad hoc vt ipſæ ſint baſibus



ſibus proportionales: quare ſemi-Parabole EBC ad EDC, ſiue tota ABC ad totam ADC, ſuper eadem baſi AC, & circa eādem diametrum BE, eſt vt altitudo FA ad AG. At ſi concipiatur altera Parabole QST, cuius baſis QT æqualis ſit baſi AC, altitudo verò SV ſit æqualis ipſi GA (quæcunq; ſit inclinatio baſis cum diametro SZ) ipſa, per præcedētem propoſitionem, ęqualis erit Parabolę ADC, ac ideo QST ad ABC eandem habebit rationem, quàm ADC ad ABC, vel quàm altitudo GA, ſiue SV ad FA. Vnde Parabolæ æqualium baſium ſunt inter ſe vt altitudines. Quod erat, &c.

THEOR. VIII. PROP. XVI.

Si recta linea ſemi-Parabolen ad extremum baſis contingens cum diametro conueniat, & intra ipſam ſuper eadem baſi deſcripta ſit Parabole, cuius diameter ſit dimidium diametri ſemi-Parabolæ, ac ei æquidiſtet; erit trilineum à contingente, producta diametro, & conuexa ſemi-Parabolica linea contentum, æquale trilineo à diametro, conuexa Parabolica, & concaua ſemi-Parabolica comprehenſo.

ESto ſemi-Parabole ABC, cuius baſis AC, & contingens AE diametro CB occurrens in E, & iuncta AB, ac bifariam ſecta AC in F, agatur FGH æquidiſtans CB, & ſuper baſi AC cum diametro GF, quod eſt dimidium CB, deſcripta ſit Parabole AGC, (quæ cadet [a] tota intra ABC:) Dico trilineum AEBHA æquale eſſe trilineo AHBCGA.

[a] 13. h.

Sed ad hoc demonſtrandum, videndum eſt primò, quomodo cuilibet trilineo ex prædictis, circumſcribi poſſint figuræ ex æquè altis, & numero æqualibus parallelogrammis, &c.

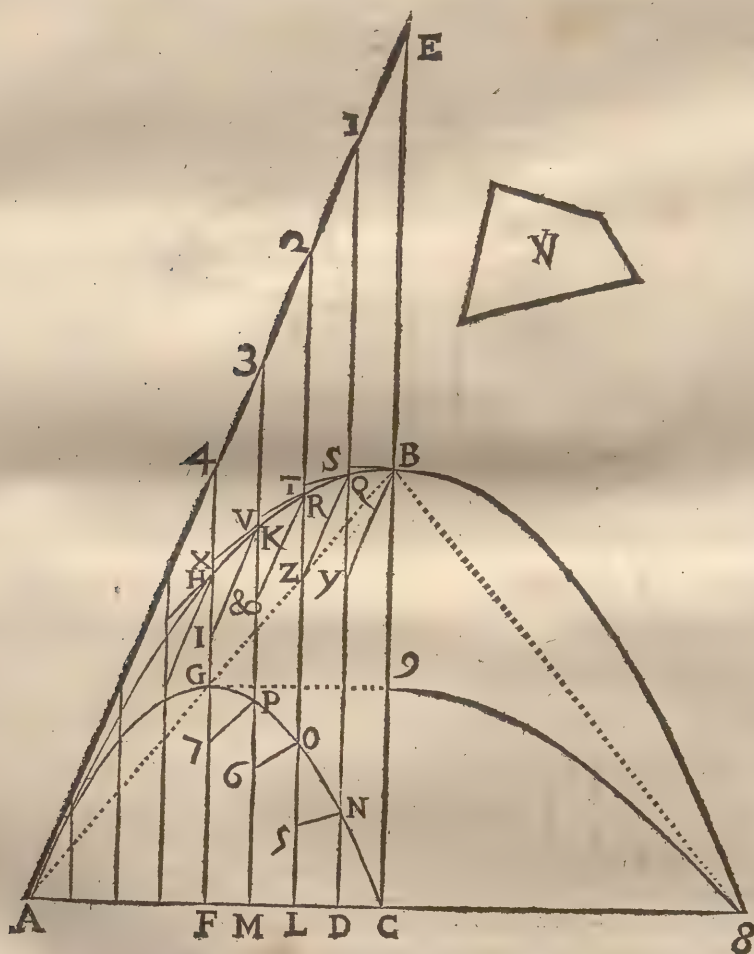
Per continuam igitur biſectionem, diuidatur contingens AE, vel baſis AC in quotcunq; partes æquales CD, DL, LM, MF &c.: & per diuiſionum puncta D, L, M, F, &c. ducātur ipſi CBE æquidiſtantes D1, L2, M3, F4, &c. quæ ſemi-Parabolen ſecent in Q, R, K, H &c. Parabolen verò in N, O, P, G, &c.; & ex B, Q, R, K &c.: ducantur BY, QZ, R&, KI &c.: ipſi AE parallelæ, quæ intra ſemi-Parabolen ABC cadent (cum ſint contingenti æquidiſtantes) vel extra trilineum AEBHA. Hac ergo methodo circumſcribetur trilineo figura EBYZ&I &c. ex æquè altis parallelogrammis &c.

Iam

Iam si iungantur AN, AO, AP, &c. quæ secent LO, MP, FG, &c. in 5, 6, 7, &c. inceroeptæ N5, O6, P7, cadent totæ intra Parabolen AGC, hoc est extra trilineum AGCB; & si ex punctis B, Q, R, K, &c. ducantur contingentes BS, QT, RV, KX, &c. ipsæ æquidistabunt rectis CD, N5, O6, P7, &c. (cum ductæ AC, AN, AO, AP, &c. sint [a] ordinatim ductæ diametris BC, QN, RO, KP, &c) sicque circumscribetur trilineo AHBCGA, figura ex æquealtis parallelogrammis BD, S5, T6, V7, &c.

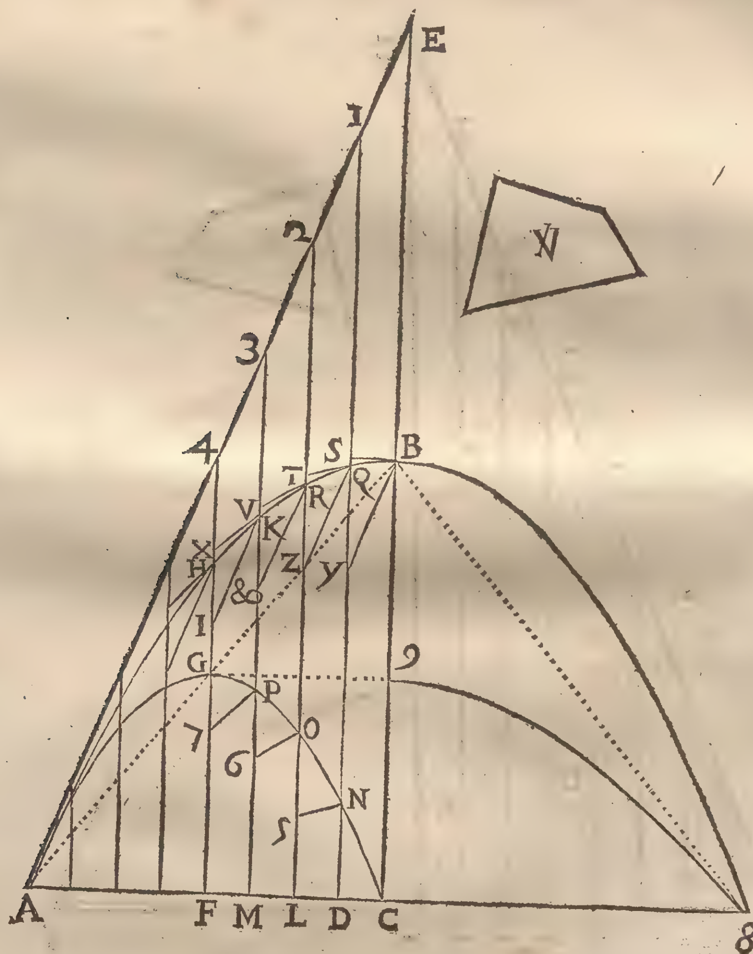
[a] 3. Coroll. 13. h.

Ampliùs, si ipsæ ZQ, &R, IK, &c. producantur extra semi-Parabolen, cadent totæ intra trilineum AEBH, atque ita inscribetur ei figura ex parallelogrammis &c. Et si ex punctis Q, R, K, &c. ducantur contingentibus SB TQ, VR, &c. æquidistantes, cadent totæ intra trilineum AHBCG, cum sint ordinatim ductæ, & si ex punctis N, O, P, &c. ducantur ad partes diametri EBC rectæ æquidistantes ipsis AC, AN, AO, &c. (quæ erunt etiam parallelæ contingentibus ex B, Q, R, &c. vel prædictis applicatis ex Q, R, K &c.) cadent hæ quoq; intra trilineum AHBCG, nam quæ ex N ducitur ipsi AC æquidistans ad partes diametri CB cadit extra Parabolen AGNC, cum sit AD maior DC, & quæ ex O equidistat ipsi AN cadit extra AGC, cum sit AS maior 5N, & sic de reliquis. Itaq; hac operatione inscribetur trilineo AHBCG figura ex parallelogrãmis æquealtis, &c. Quare ex his, & ex 14. huius



patet quomodo cuilibet horum trilineorum circumſcribi poſſit figura ex æque-altis parallelogrammis, &c. quæ ſuperet proprium trilineum magnitudine, quæ minor ſit quacunque magnitudine propoſita.

Iam dico huiuſmodi trilinea inter ſe eſſe æqualia. Nam ſi ſint inæqualia, alterum ipſorum, vt puta AHBCGA altero AHBE minus erit, & defectus ſit ſpacium ℣; quo poſito circumſcribatur, vti nuper docuimus, trilineo AHBCGA figura ex parallelogrammis SC, TN, VO, HP, &c. cuius exceſſus ſupra trilineum ſit minor magnitudine ℣: quapropter talis figura adhuc minor erit trilineo AEBHA, cui circumſcribatur, item per eaſdem lineas ipſi CB æqui-



diſtantes, figura ex totidem parallelogrammis EY, 1Z, 2&, 3I, &c. Patet nũc talem circumſcriptam, alteri circumſcriptæ ABD567, &c. ęqualem eſſe, cum vtraq; ipſarum ex æqualibus numero, & magnitudine parallelogrammis cõſtet vtrunq; vtrique: (parallelogramma enim EY, BD, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper æqualibus baſibus EB, BE; & parallelogrammum IZ æquatur parallelogrãmo Q5, cum inter eaſdem ſint parallelas, & ſuper æqualibus baſibus [a] IQ, QN, & ſic de ſingulis) ſed circumſcripta ABD567, &c. eſt minor trilineo AEBHA, vt modò oſtendimus, ergo & circumſcripta AEBYZ&I, &c. minor erit eodem trilineo AEBHA; totum parte, quod eſt abſurdũ. Quare huiuſmodi trilinea inter ſe ſunt æqualia. Quod oſtendere propoſitum fuit.

[a] 3. Coroll. 13. h.

THEO-

THEOR. IX. PROP. XVII.

Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentis.

REpetito præcedenti diagrammate, dico Parabolen AB8 ſeſquitertiam eſſe inſcripti trianguli AB8.

Nam ducta G9 parallela ad AC deſcribatur ſemi Parabole 9, 8, cuius diameter ſit 9C, & ſemi-applicata ſit C8, æqualis baſi AC Parabolæ AGC. Et cum ſit ſemi-Parabole ABC æqualis [a] ſemi-Parabolæ CB8, & Parabole AGC æqualis [b] ſemi-Parabolæ C9 8, ſitque C98 dimidium [c] CB8 (nam eſt C9 dimidium CB &c.) erit Parabole AGC dimidium ſemi-Parabolæ ABC, ſiue æqualis trilineo AHBCGA, ac etiam trilineo [d] AEBH; quare totum triangulum AEC ſeſqui alterum erit ſemi-Parabolæ ABC, ſiue erit vt 6 ad 4, ſed ad triangulum ABC eſt vt 6 ad 3, cum ſit EC dupla CB, vnde ſemi-Parabole ABC ad triangulum ABC, hoc eſt dupla ad duplum, nempe Parabole AB8 ad inſcriptum triangulum AB8, erit vt 4 ad 3. Quod demonſtrare oportebat.

a Coroll. prop.14.h.
b Coroll. prop.14.h.
c 15.h.
d 16.h.

MONITVM.


T hoc loco, ex aduerſo indirectæ Antiquorum viæ per duplicem poſitionem, luce clarius pateat quantum facilitatis, breuitatis, atquæ euidentiæ naſciſcatur è noua, directaque methodo (rectè tamen cautèque vſurpata) acutiſsimi Geometræ Caualerij, per indiuiſibilium doctrinam, nobis amiciſsimam, ex hac alteram accipe eiuſdem theorematis demonſtrationem, conſimili arte cōparatam, ac in præcedenti.

THEOR. X. PROP. XVIII.

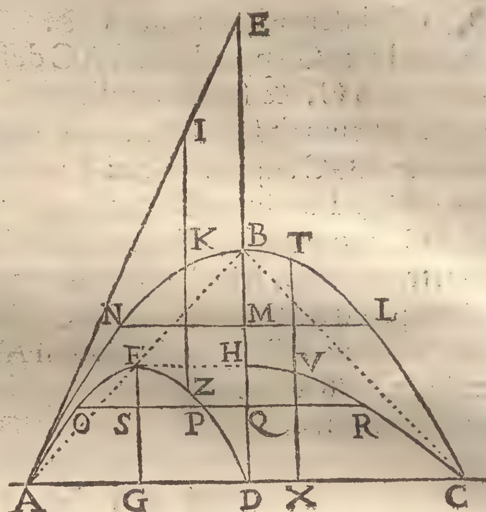
Parabole ſeſquitertia eſt trianguli eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentis.

SIt Parabole ABC, cuius diameter BD, baſis AC: dico ipſam ſeſquitertiam eſſe inſcripti trianguli ABC.

Biſariam enim ſecta AD in G, per quod ducta GF parallela ad DB, & per F, FH parallela ad AD, ac deſcriptis, vt in præcedenti figura Parabola AED, & portione Parabolæ HCD, cuius diameter ſit HD, & ſemi-applicata ſit DC ducatur in tota ABC quælibet applicata NL diametrum ſecans in M, eritque NM æqualis ML, & ſic de quibuslibet alijs applicatis ipſi AC æquidiſtantibus, quare omnes ſimul in portione ABD, omnibus ſimul in portione DBC æquales erunt, ſiue portio ABD æqualis DBC, nempè vtraque erit ſemi-Parabole, & eadem ratione oſtendetur DHC ſemi-Parabolen eſſe.

Iam applicata quacunque OPQR, tùm in Parabola AED, tùm in semi-Parabola DHC; cum sit quadratum AD ad OP vt linea GF ad FS, vel vt DH ad HQ, vel vt quadratum DC ad QR, sintque antecedentia AD, DC equalia, erunt & consequentia OP, QR æqualia, nempè applicata OP æqualis applicatæ QR, & ita de omnibus &c. quare integra Parabole AED æquatur semi-Parabolæ DHC.

Amplius ducta quacunque TVX parallela ad BD, erit BD ad TX, vt rectangulum ADC ad AXC, vel vt HD ad VX, & permutando, cum sit BD dupla DH, & TX erit dupla XV, & sic de omnibus interceptis, & æquidistantibus in semi-Parabola DBC, & in semi-Parabola DHC, vnde tota semi-Parabole DBC dupla est totius semi-Parabolæ DHC, & sumptis æqualibus; semi-Parabole ABD dupla Parabolæ AFD, siue trilineum ANBDFA, æquale erit Parabolæ AFD.



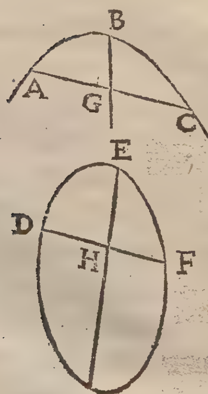
Tandē, si sit AE contingens ABC in A, erit EB æqualis BD, & ducta in trilineo AEBDFA quacunque IKZ parallela ad ED, erit IK æqualis [a] KZ, & sic de omnibus alijs interceptis in trilineis AEBNA, & ANBDFA quare totum trilineum AEBNA æquabitur toto trilineo ANBDFA, sed hoc, modò ostensum fuit æquale Parabolæ AFD, quapropter totum triangulum AED erit sesquialterum semi-Parabolæ ABD, vel erit vt 6 ad 4, sed ad triangulum ABD est vt 6 ad 3; quare semi-Parabole ABD ad inscriptum triangulum ABD erit vt 4 ad 3, & duplum ad duplum, hoc est Parabole ABC ad triangulum ABC, super eadem basi AC, & eiusdem altitudinis cum Parabola, erit vt 4, ad 3, nempe sesquitertium. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. Coroll. 13. h.

Sed iam tempus est vt susceptum opus aggrediamur, initio facto à definitionibus.

Definitiones Secundæ.

I.



CONI SECTIONES ÆQVALITER INCLINATÆ vocentur illę, quarum ordinatim ductæ æquales inuicem angulos cum earum diametris efficiunt.

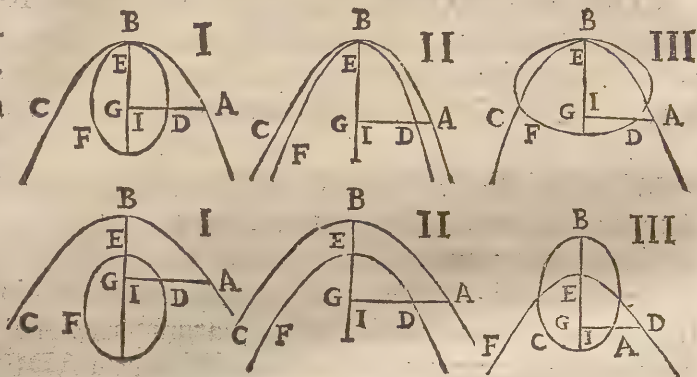
Videlicet coni-sectio ABC vocabitur æqualiter inclinata, vel eiusdem inclinationis, ac sectio conica DEF, cum vtriusque ordinatim ductæ AGC, DHF, earum diametros BG, EH, ad æquales diuidunt angulos, hoc est cum angulus AGB, angulo DHE, & qui ei deinceps CGB reliquo FHE æqualis fuerit.

II.

Coni-sectio vel circulus, coni-sectioni, vel circulo simul

mul adſcribi intelligatur, vel SECTIONES SIMVL ADSCRIPTÆ dicantur, quando cum fuerint æqualiter inclinatæ earum diametri, & ordinatim ductæ inter ſe mutuò congruant.

Nempe cum duę coni-ſectiones ABC, DEF æqualiter inclinatæ, ita diſpoſitę fuerint vt ipſarum diametri BG, EI ſibi mutuò congruant, & omnes vnius applicatę (quarum vna AG) congruant omnibus alterius applicatis, (quarum vna ſit DI) ipſæ vocentur ſectiones ſimul adſcriptæ.



III.

Coni-ſectio, vel circulus, coni-ſectioni, vel circulo inſcribi dicatur, vel SECTIO SECTIONI INSCRIPTA vocetur, quando cum fuerit altera alteri adſcripta, ſit quoque tota intra eandem, nec alicubi ſe mutuò ſecent, licet in infinitum producantur, quæ in infinitum extendi poſſunt.

Hoc eſt, ſi vt in prima, & ſecunda figura vtriuſque ordinis præcedentis ſchematis duæ coni-ſectiones ABC, DEF fuerint ſimul adſcriptæ, & altera ipſarum vt DEF tota cadat intra aliam ABC, tunc dicatur ſectio DEF inſcripta ſectioni ABC.

IV.

Coni-ſectio, vel circulus, coni-ſectioni, vel circulo circumſcribi intelligatur, vel SECTIO SECTIONI CIRCVMSCRIPTA dicatur, ſi cum fuerit altera alteri adſcripta, tota quoque cadat extra eandem, nec alicubi ſe mutuò ſecent quamuis in infinitum abeant.

Qualis eſt in prædictis figuris ſectio ABC, quæ cum ſit adſcripta ſectioni DEF tota cadit extra eandem DEF.

V.

Coni-ſectio, vel circulus coni-ſectioni, vel circulo per verticem, vel per punctum intra, aut extra ſectionem datum adſcribi, vel inſcribi, aut circumſcribi intelligatur, ſiue SECTIO SECTIONI PER VERTICEM, vel PER DATVM PVNCTVM INTRA, aut EXTRA SECTIONEM ADSCRIPTA, vel INSCRIPTA, aut CIRCVMSCRIPTA dicatur, quando cum fuerit altera alteri adſcripta, vel inſcripta, aut circumſcripta, vnius diameter per datum punctum educta ſit quoque diameter alterius; vt videre eſt in præcedentibus figuris.

VI.

HYPERBOLÆ, & ELLIPSES, SIMILES inter ſe dicantur, quando cum fuerint ęqualiter inclinatę ipſarum latera ſint proportionalia, hoc eſt vt tranſuerſum vnius ad rectum, ita ſit tranſuerſum ad rectum alterius eiuſdem nominis.

VII.

CONGRVENTES CONI-SECTIONES dicantur illæ, quæ cum fuerint

rint æqualiter inclinatæ, si sint per vertices simul adscriptæ, inter se mutuò congruant.

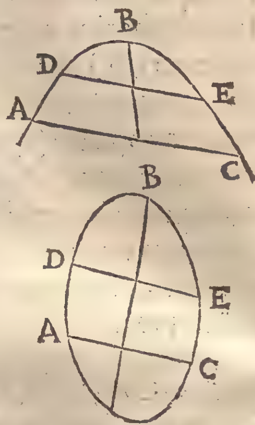
VIII.

CONI-SECTIONIS VEL CIRCVLI PORTIO, SIVE SEGMENTVM vocetur superficies à quadam sectionis ordinatim ducta, & curua sectionis, aut circuli peripheria terminata. Et ipsa ordinata dicatur BASIS PORTIONIS, SIVE SEGMENTI.

IX.

MENSALIS CONI-SECTIONIS, VEL CIRCVLI dicatur differentia duorum segmẽtorum eiusdem coni-sectionis, quorum bases sint parallelæ.

Vt si ex coni-sectione, vel circulo ABC abscindantur duæ portiones ABC, DBE, quarum bases AC, DE sint parallelæ, ipsarum portionum differentia ADEC dicatur mensalis, & ipsæ AC, DE bases, & AD, CE latera eiusdem mensalis.



THEOR. XI. PROP. XIX.

Si fuerint duæ quæcunque coni-sectiones æqualiter inclinatæ per vertices simul adscriptæ, ipsæ vel erunt in totum congruentes, & eiusdem nominis, vel in totum disiunctæ, præter in vertice, hoc est altera alteri inscripta, vel in duobus tantùm punctis se mutuò secabunt in ipsis tamen verticibus se contingentes.

Schematismus 1. & 2.

Sint in præsenti schematismo duæ quæcunque coni-sectiones ABC, DBE æqualiter inclinatæ pereundem verticem B simul adscriptę, quarum cõmunis diameter sit BF: dico has sectiones, vel esse in totum congruentes, vel in totum disiunctæ, vel in duobus tantùm punctis, se mutuò secantes.

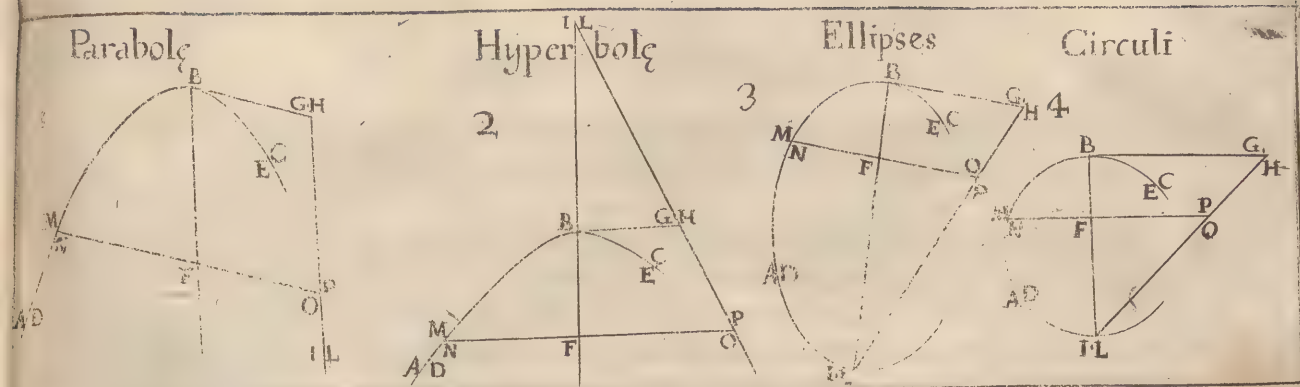
Ducatur ex vertice B cuilibet in altera sectionum ordinatim applicatæ æquidistans BGH, quæ vtranq; sectionem continget [a] super qua sumatur BH, rectum latus sectionis ABC, & BG rectum sectionis DBE, ipsarumque regulæ, sectionis videlicet ABC, sit HPL, & sectionis DBE sit GOI.

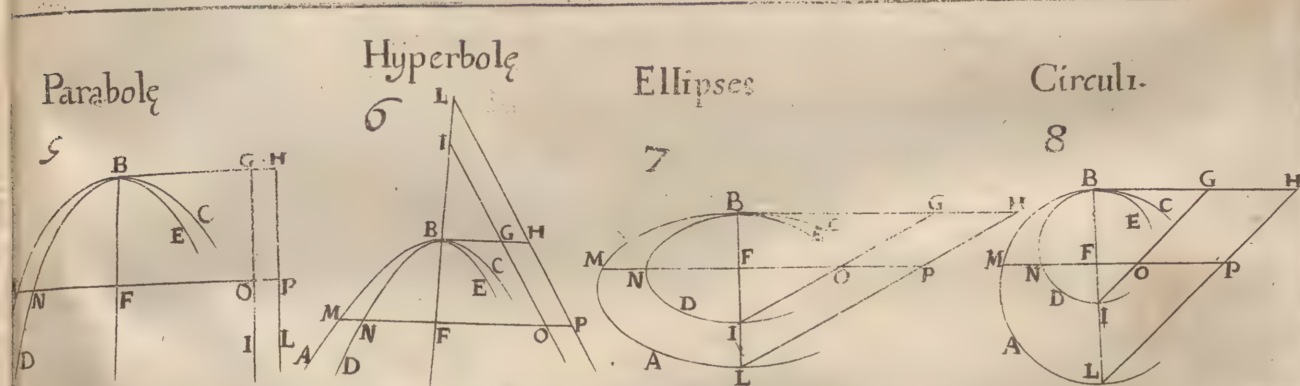
Iam, vel regulæ GOI, HPL sibi mutuò congruunt, vel infra contingentem BGH nunquam conueniunt, vel infra eandem se mutuò secant. Si primùm, vt in primis 4. figuris; dico sectiones in totum simul congruere, & eiusdem nominis esse.

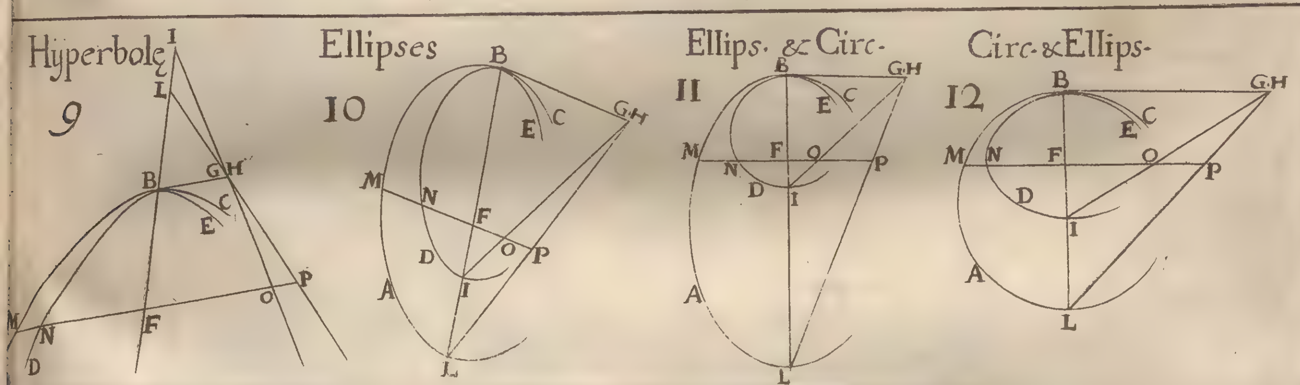
Sumpto enim in sectione ABC quolibet puncto M, per ipsum ducatur sectionum communis ordinatim applicata MNFOP, sectionem secans DBE in N, diametrum in F, regulam GI in O, NL in P. Et quoniam in 4. primis figuris, in quibus regulæ sunt congruentes latitudines FO, FP sunt æquales, & altitudo eadem BF erit rectangulum BFO [b] siue quadratum NF in sectione DBE, æquale rectangulo BFP [c] siue quadrato MF in sectione ABC, quare & semi-applicatæ NF, MF æquales erunt, hoc est sectiones DBE, ABC conueniunt simul in punctis N, & M, quæ sunt extrema communium applicatarum

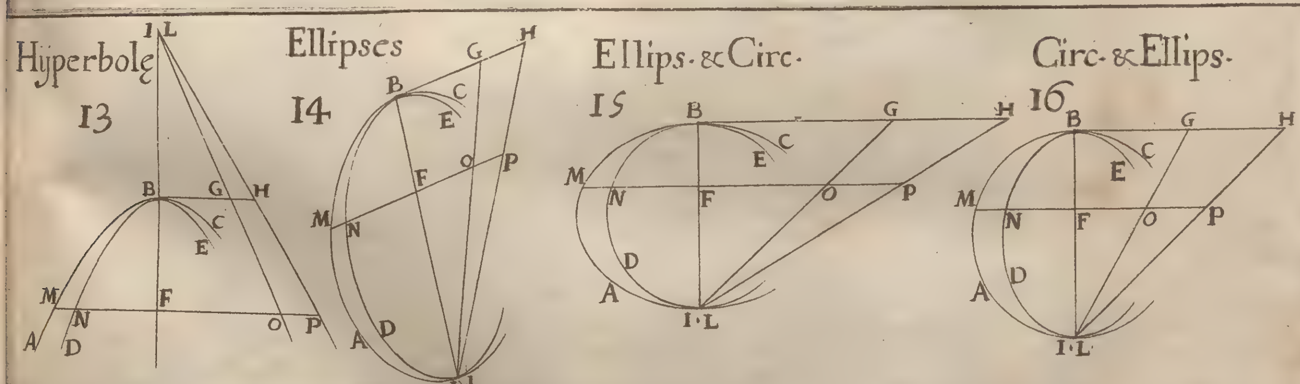
a 32. primi conic.

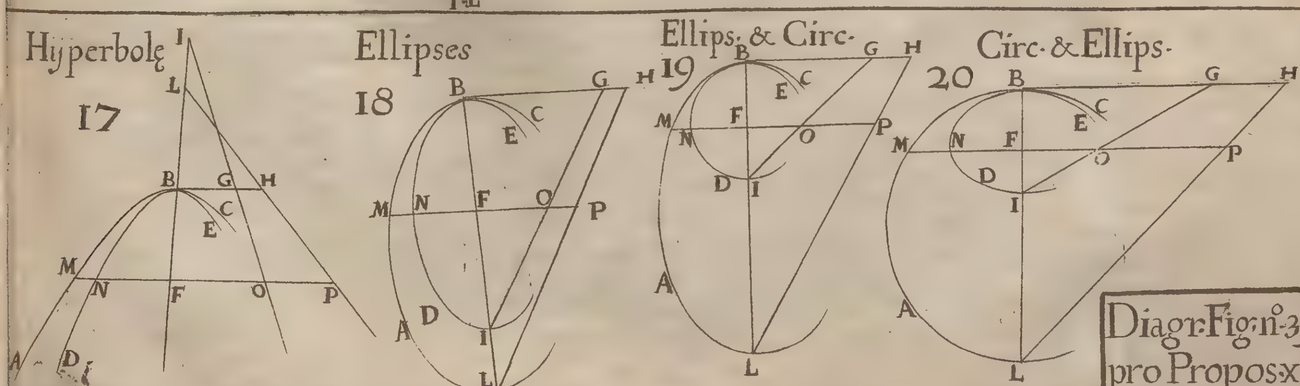
b Coroll. prop. 1. h.
c Coroll. prop. 1. h.



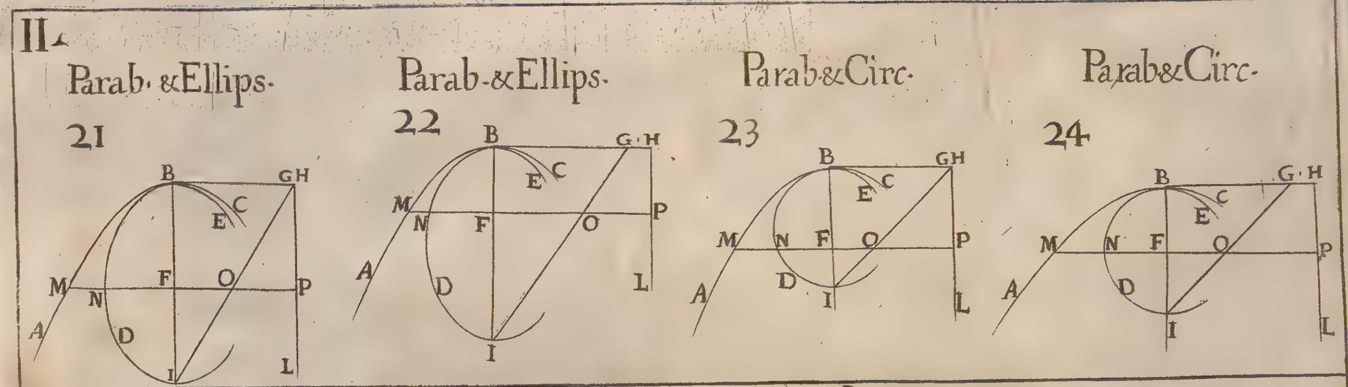


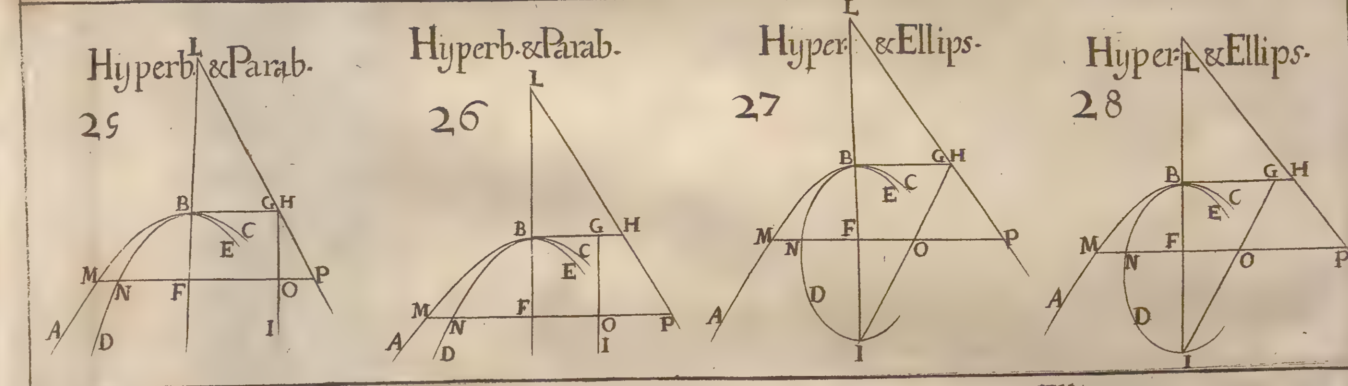


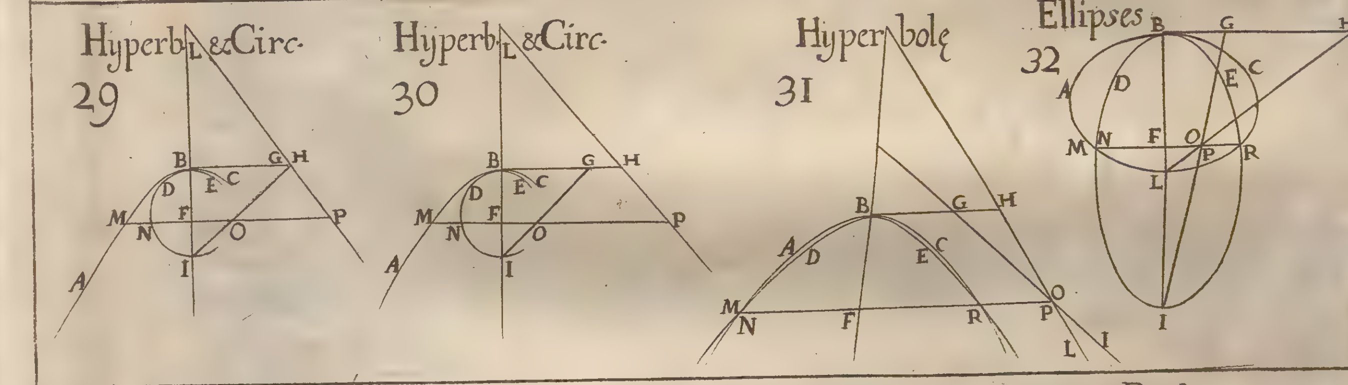


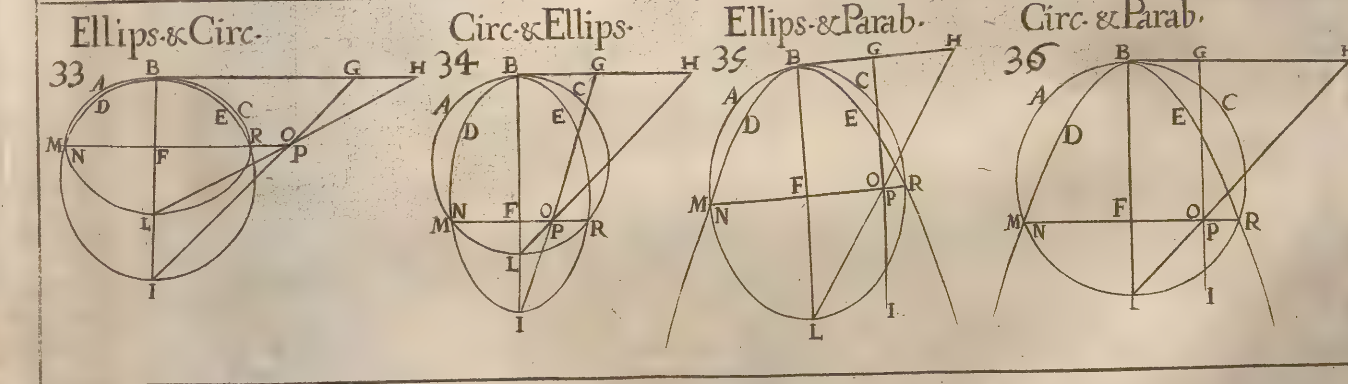


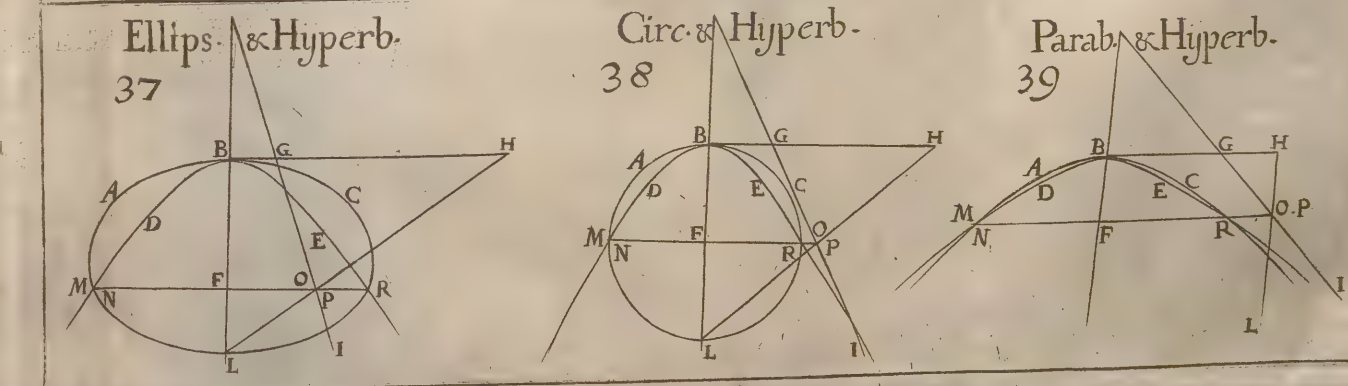
Diagr. Fig. nº 39
pro Propos. xix.











rum ex eodem diametri puncto F: idemque oſtendetur de omnibus alijs extremis punctis communium applicatarum ad vtraſque diametri partes: quare huiuſmodi ſectiones erunt in totum congruentes: eruntque eiuſdem nominis; quoniam cum regula Parabolæ æquidiſtet diametro; Hyperbolæ autem conueniat cum diametro extra ſectionem; Ellipſis verò eidem diametro intra ſectionem occurrat, hoc eſt ad extremum tranſuerſi lateris, cumque harum ſectionum diametri ſimul congruant (nam ſectiones ſunt ſimul adſcriptæ) ſi diuerſi nominis eſſent ipſarum regulæ nunquam congruerent, quod eſt contra hypoteſim. Sunt ergo tales ſectiones congruentes ſimul, & eiuſdem nominis. Quod primò, &c.

Si verò regulæ GOI, HPL infra contingentem BGH nunquam conueniũt, diſiunctim ſimul procedentes, vt in 26. proximè ſubſequentibus figuris apparet, in quarum primis quatuor, regulæ ſunt parallelæ, in reliquis autem à contingente BGH ad partes ſectionum ſunt ſemper inter ſe recedentes, eſtq; regula GOI propinquior diametro quàm HPL; facta eadem conſtructione, vt ſupra; quoniam latitudo FO minor eſt latitudine FP, & altitudo BF eſt eadem, erit rectangulum BFO [a] ſiue quadratum applicatæ NF in ſectione DBE, maius rectangulo BFP [b] ſiue quadrato applicatæ MF in ſectione ABC, hoc eſt applicata NF erit minor ipſa MF; quare punctum M ſectionis ABC cadit extra ſectionem DBE: idemque de omnibus alijs punctis ſectionis ABC ad vtranque diametri partem. Vnde tota ſectio ABC cadit extra ſectionem DBE; ideoq; tales ſectiones ſunt in totum diſiunctæ (eò quod ſemper diſiunctim procedant ipſarum regulæ) & in communi tantùm vertice B ſe mutuò contingunt. Quod ſecundò, &c.

[a] Coroll. prop. 1. h.
[b] Coroll. prop. 1. h.

Si tandem ſectionum regulę GOI, HPL infra contingentem BGH ad partes ſectionum ſe mutuò ſecant in P, vt videre eſt in 9. vltimis figuris; ducatur ex P communis ſectionum applicata PFNM ſecans diametrum in F, ſectionem ABC in M, & DBE in N. Iam cum in ſectione ABC quadratum applicatæ MF æquale [c] ſit rectangulo BFP, & quadratum applicatæ NF in ſectione DBE æquale ſit eidem rectangulo BFP, erunt quadrata MF, NF inter ſe æqualia, hoc eſt ipſæ applicatæ æquales; quare huiuſmodi ſectiones conueniunt ſimul in puncto M. Eadem omnino ratione oſtendetur has ſectiones ad alteram quoque diametri partem ſimul conuenire in extremo pũcto R reliquæ ad vnam ſectionum applicatæ ex eodem diametri puncto F: ergo in duobus punctis M & R, præter in communi vertice B, ſimul conueniunt, in quibus patet has ſectiones ſe mutuò ſecare; nam regulæ HL, GI conueniunt ſimul in vnico puncto P, in quo ſe mutuò ſecantes, hinc inde diſiunctim procedunt, cadens PH ſegmentum regulæ LPH remotius à diametro BF, quàm PG ſegmentum regulæ GOI; ideoque & ſegmentum ſectionis ABC ſupra applicatam MR totum cadet extra ſegmentum ſectionis DBE ſupra eandem applicatam; è contra verò reliquum portionis ABC infra applicatam MR cadet totum intra reliquum portionis DBE infra eandem applicatam, cum ſegmentũ PL propriæ regulæ HPL diſiunctum ſit, & propius diametro BF quàm ſegmentum PI propriæ regulæ GOI: omneque id oſtenditur eadem penitus ratione, ac in ſecunda parte huius Theorematis demõſtrauimus: quare huiuſmodi coni-ſectiones per vertices ſimul adſcriptæ, & quarũ regulæ ſe mutuò ſecant infra contingentem ex vertice, in ipſis vertici-

[c] Coroll. prop. 1. h.

bus

bus ſe contingunt; & in duobus tantùm punctis ſe mutuò ſecant. Quod tandem erat demonſtrandum.

COROLL. I.

PAtet hinc, quod ſi regulæ coni-ſectionum per vertices ſimul adſcriptarum ſibi ipſis congruant ſectiones quoque erunt inter ſe congruentes, vt in primis quatuor figuris præcedentis ſchematis oſtenſum eſt; & ſi fuerint inter ſe congruentes, etiam ipſarum regulæ ſimul congruent: ſed cum regulæ ſimul congruunt, congruunt quoque, & latera, & è conuerſo, cum ad æquales angulos inter ſe diſpoſita intelligantur, quare cum latera fuerint inter ſe congruentia ſiue æqualia, ſectiones quoque inter ſe congruentes erunt; & ſi ſectiones fuerint congruentes etiam ipſarum latera æqualia erunt.

Si verò regulę infra recta ſectionum latera ex vertice contingenter applicata diſiunctim procedentes nunquam ſimul conueniant, nec ipſæ ſectiones vnquam conuenient, ſed in vertice ſe mutuò contingent, & ea inſcripta erit, ſiue minor, cuius regula infra prædictam contingentem diametro ſectionum ſit propior, ſeu cadat tota inter diametrum, & regulam alterius ſectionis; quæ è contra circumſcripta erit, ſiue maior, vt apparet in 26. figuris ſubſequentibus.

Si tandem ipſarum regulæ infra contingentes ex vertice ſe mutuò ſecent, ſectiones quoque, ſed in duobus tantùm punctis hinc inde à vertice (in quo ſe tangunt) ſe mutuò ſecabunt, in illis nempe, quæ ſunt extrema eiuſdem ordinatim applicatæ, ex regularum interſectione eductæ, ſuper qua duæ coni-ſectionum portiones inerunt, quarum ea erit inſcripta, cuius regulæ ſegmentum inter prædictam applicatam, & contingentem interceptum, propinquius ſit diametro ſectionum, altera verò circumſcripta, ſiue maior cuius regulæ ſegmentum à prædicta diametro magis diſtet, quod omne ſatis patet ex reliquis eiuſdem ſchematis figuris.

COROLL. II.

PAtet quoque in Parabolis, & in alijs coni-ſectionibus eiuſdem nominis per vertices ſimul adſcriptis, cum eodem tranſuerſo latere, illam, quę minus habet rectum latus inſcriptam, ſiue minorem eſſe ea cuius rectum latus maius eſt, & è contra. Nam in 5. 13. ac 14. figura, in quibus ſectiones ſunt eiuſdem nominis, vti etiam in 15. & 16. (diximus enim circulum non incongruè haberi poſſe pro Ellipſi) demonſtratum eſt ſectionem DBE, cuius rectũm BG minus eſt recto BH ſectionis ABC, totam cadere intra ABC, vnde erit inſcripta, ſiue minor, & è contra, ſectionem ABC cuius rectum maius eſt totam cadere extra DBE, cuius rectum eſt minus: quapropter erit ei circumſcripta, ſiue maior.

COROLL. III.

HInc quoque eruitur Hyperbolarum per vertices ſimul adſcriptarum cum æqualibus rectis lateribus, illam, cuius tranſuerſum latus maius

eſt,

est, inscriptam, vel minorem esse ea, cuius transuersum minus est; & è contra eam esse circumscriptam, siue maiorem, cuius transuersum minus est. Nam in 9. figura, in qua sectiones sunt Hyperbolæ simul adscriptæ cum eodem recto latere, ostensum fuit Hyperbolen DBE, cuius transuersum BI maius est, totam cadere intra Hyperbolen ABC, cuius transuersum BL minus est, & ideo DBE erit inscripta, siue minor; & è contra ipsa ABC, cuius transuersum est minus, erit circumscripta, siue maior.

COROLL. IV.

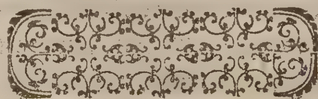
PAtet etiam in Ellipsibus tantùm, vel in Ellipsibus, & circulis per eundem verticē simul adscriptis cū eodem recto latere, eam esse inscriptam, siue minorem, cuius transuersum latus minus est, & è contra eam circumscriptam, vel maiorem esse, cuius transuersum maius est: quoniam in 10. 11. & 12. figura ostensum fuit Ellipsim, vel circulum DBE, cuius transuersum BI minus est, totam cadere intra Ellipsim, vel circulum ABC, cuius latus transuersum BL maius est; quare ipsa DBE erit inscripta, siue minor: & è contra Ellipsis, vel circulus ABC erit circumscriptus, siue maior, &c.

COROLL. V.

MAnifestum est etiam similes coni-sectiones per vertices simul adscriptas habere regulas parallelas, & eam sectionem esse inscriptam, vel minorem, cuius latera minora sunt; & è contra eam esse circumscriptam, vel maiorem, cuius latera sunt maiora. Si enim in 6. 7. & 8. figura coni-sectiones ABC, DBE eiusdem nominis, ac per verticem B simul adscriptæ, fuerint similes, erit transuersum LB ad rectum BH vt transuersum IB ad rectum BG, & permutando, & diuidendo, LI ad IB, vt HG ad GB, vndæ regulæ LH, IG erunt parallelæ, sed in hoc Theoremate demonstratum est sectionē ABE minorum laterum, totam cadere intra sectionem ABC maiorum laterum, ergo ipsa DBE erit inscripta; & è contra demonstrauimus ABC maiorum laterum totam cadere extra DBE minorum laterum, ac propterea erit ei circumscripta.

COROLL. VI.

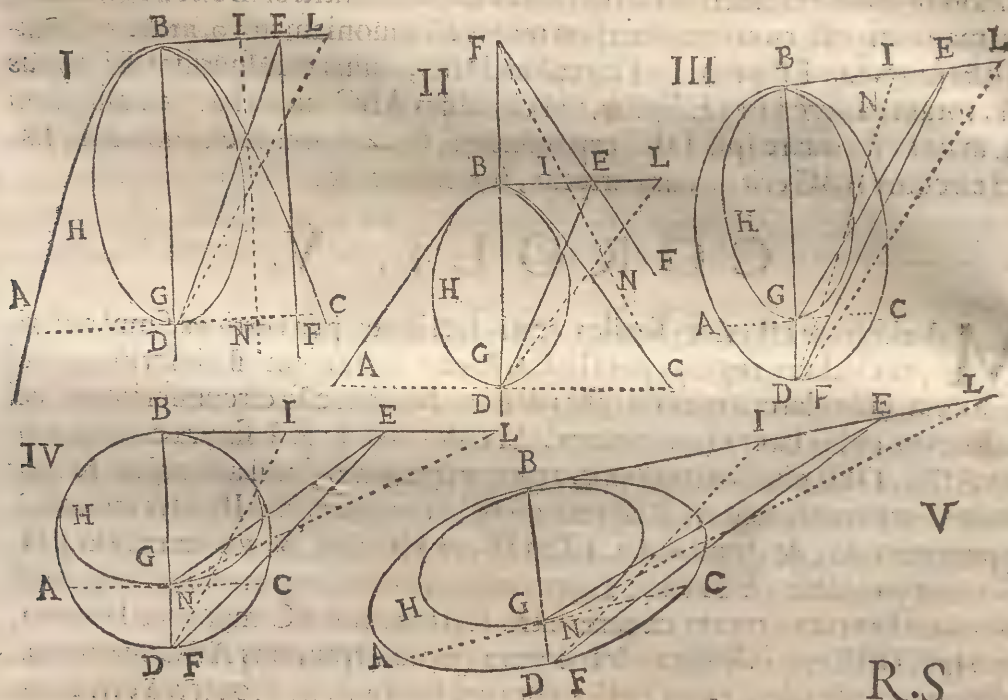
EX ipsa demum huius Theorematis demonstratione elicitur, quod in coni-sectionibus per vertices simul adscriptis, quadrata semi-applicatarum ex eodem diametri puncto inter se sunt vt earundem latitudines. Ostendimus enim in qualibet præcedentis schematis figura, quadratum semi-applicatæ MF, in sectione ABC, ad quadratum semi-applicatæ NF, in sectione DBE, esse vt latitudo propria FP, ad propriam latitudinem FO.



PROBL. VI. PROP. XX.

Datæ coni ſectioni, vel circulo, per eius verticem, cum dato tranſuerſo latere, quod in Ellipſi, vel circulo non excedat eius tranſuerſum, MAXIMAM Ellipſim inſcribere, & è contra.

DAtæ Ellipſi, vel circulo, per eius verticem *MINIMAM* coni-ſectionem circumſcribere cum dato, pro circumſcribenda Hyperbola, quocunq; tranſuerſo latere, pro Ellipſi verò, cum tranſuerſo dato, quod maius ſit tranſuerſo datæ Ellipſis, vel circuli.



Sit quælibet coni-ſectio, vel circulus ABC, cuius diameter BD, latus rectum BE, regula EF; oportet circa diametri ſegmentum BG per verticem B *MAXIMAM* Ellipſin inſcribere.

a 7. huius. Adſcribatur [a] ſectioni ABC per eius verticem, & circa diametrum BG cum recto BE Ellipſis GHB. Dico hanc eſſe *MAXIMAM* quæſitam.

b 1. Coroll. prop. 19. huius. c 2. Coroll. prop. 19. huius. d 2. Coroll. prop. 19. huius.

Nam iuncta ipſius regula GE, cum hæc diſiunctim procedat à regula EF, ſitque propior diametro, Ellipſis quoq; GHB [b] inſcripta erit ſectioni ABC, & erit *MAXIMA* inſcriptibilium: quoniam quæcunque Ellipſis cum eadem tranſuerſa diametro BG adſcripta, & cum recto BI, quod minus ſit recto BE minor eſt [c] Ellipſi GBH, quælibet verò Ellipſis eidem diametro BG adſcripta cum recto BL, quod maius ſit dato recto BE [d] maior eſt quidem Ellipſi GHB, ſed omnino [e] ſecat ſectionem ABC, cum eius regula GL ſecet ſectionis regulam EL, infra contingentem BE. Vnde Ellipſis GHB eſt *MAXIMA*. Quod primò, &c.

Præ-

Præterea ſit data Ellipſis, vel circulus GHB, cuius diameter BG, rectum BE, regula EG, & oporteat per verticem B, *MINIMAM* Parabolen in prima figura, vel cum dato quocunque tranſuerſo BF, *MINIMAM* Hyperbolen in ſecunda figura, ſiue cum dato tranſuerſo BF, quod in tertia, & quarta figura excedat tranſuerſum BG datæ Ellipſis, vel circuli, *MINIMAM* Ellipſin circumſcribere.

Adſcribatur *a* Ellipſi GHB per verticem B in prima figura parabole ABC, & in ſecunda Hyperbole ABC, cum dato tranſuerſo BF, & in tertia, & quarta Ellipſis ABC cum dato tranſuerſo BF; & harum omnium ſectionum rectum latus idem ſit cum recto BE datæ Ellipſis. Iam patet ipſam ſectionem ABC datæ GHB *b* circumſcriptam eſſe. Inſuper dico talem ſectionem ABC eſſe *MINIMAM* quæſitam. *a* 5.6.7.h. *b* 2. Coroll. prop. 19. huius.

Nam, in prima figura, quælibet parabola, vel in reliquis, quæcunque eiuſdem nominis ſectio adſcripta ſectioni ABC per verticem B, cum eodem tranſuerſo BF, ſed cum recto BL, quod excedat rectum BE ſectionis ABC eadem ſectione *c* eſt maior, quælibet verò adſcripta ſectio cum recto BI, quod minus ſit recto BE minor *d* eſt ſectione ABC, ſed Ellipſim GHB omninò *e* ſecat cum ipſarum regulæ IN, GE infra contingentem ex vertice ſe mutuò ſecent. Quare ſectio Parabolæ, vel Hyperbole, aut Ellipſis ABC eſt *MINIMA* circumſcriptibilium datæ Ellipſi, vel circulo GHB. Quod erat, &c. *c* 2. Coroll. prop. 19. huius. *d* 2. Coroll. prop. 19. huius. *e* 1. Coroll. prop. 19. huius.

COROLL. I.

Hinc ſolutio problematum. Videlicet: Datæ coni-ſectioni circa maiorem axem, per eius verticem *MAXIMVM* circulum inſcribere.

Item datæ Ellipſi circa minorem axem, per eius verticem *MIMIMVM* circulum circumſcribere.

Si enim in tribus primis ſuperioribus figuris concipiatur diametrum BD datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut Ellipſis ABC eſſe propriæ ſectionis maiorem axem, eiuſque ſegmentum BG æquari recto lateri BE, circa quod adſcripta *f* ſit Ellipſis GHB cũ recto BE: ipſa vt ſuperius oſtenſũ fuit, erit *MAXIMA* inſcriptibilium, eritque Ellipſis æqualium laterum circa axim, quàm in Monito poſt primam huius, animaduerſum fuit circulum eſſe. Vnde datæ coni-ſectioni circa maiorem axim inſcriptus erit *MAXIMVS* circulus per verticem ſectionis. Quod primò, &c. *f* 7. prop. huius.

Si verò, vt in quarta figura, datæ Ellipſi GHB circa minorem axim BG, & cuius rectum latus BE *MINIMVS* circulorum ſit circumſcribendus; ſumpta BF æquali recto BE, ipſa excedet tranſuerſum latus BG datæ Ellipſis GHB (nam ſemper in Ellipſi minor axis ad maiorem, eſt vt maior axis ad latus rectum) itaque ſi circa BF Ellipſis adſcribatur ABC, cum recto BE datæ Ellipſis, ipſa, per ſecundam partem propoſitionis huius, erit *MINIMA* datæ Ellipſi circumſcriptibilium, ſed talis Ellipſis ABC per Monitũ poſt 1. huius, cum ſit æqualium laterum, & circa axim, idem eſt, ac circulus. Quare datæ Ellipſi circa minorem axem per eius verticem *MINIMVS* circulus circũſcriptus erit. Quod ſecundò, &c.

COROLL. II.

PAtet etiam quomodo datæ coni-sectioni, vel circulo ABC per ipsius verticem inscribi possit Ellipsis, quę sit *MAXIMA* circa idem transuersum, & ipsius rectum latus ad versum in Parabola, vel Hyperbola datam quamcumque teneat rationem; & in Ellipsi, vel circulo data ratio non sit minor ratione recti BE, ad transuersum BD.

Nam si exempli gratia Parabolæ, vel Hyperbolæ primæ, ac secundæ figuræ inscribenda sit *MAXIMA* Ellipsis circa idem transuersum latus, & cuius rectum ad versum datam habeat rationem, R nempe ad S: fiat vt R ad S, ita rectum EB datæ sectionis ad BG, nam si cum eodem recto EB, ac transuerso BG adscribatur per B Ellipsis GHB, ipsa erit *MAXIMA* circa idem transuersum BG, per ea, quæ superius demonstrata fuerunt. Si verò data ratio R ad S non sit minor ratione recti EB ad transuersum BD; in tertia, quarta, & quinta figura, fiat vt R ad S, ita EB ad BG, quod erit transuersum quæsitæ inscriptæ Ellipsis, quæ erit *MAXIMA*, &c.

PROBL. VII. PROP. XXI.

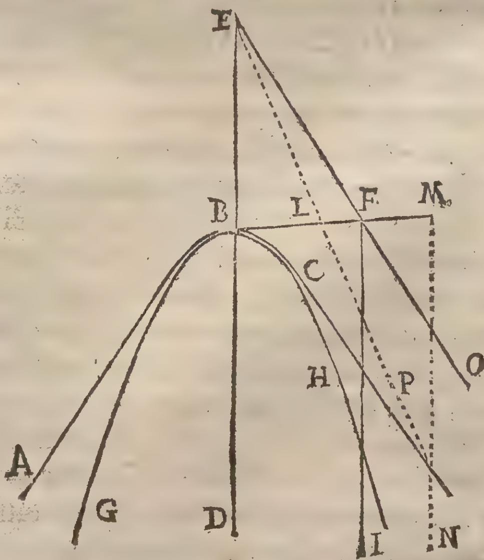
Datæ Hyperbolæ, per eius verticem MAXIMAM Parabolen inscribere, & è contra.

Per verticem datæ Parabolæ, cum dato transuerso latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius vertex B, diameter BD, transuersum latus BE, rectum BF, & regula EFO oportet primùm per eius verticem B *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

a 5. prop. huius.

Adscribatur *a* Hyperbolæ ABC, per verticem B, & cum recto BF Parabole GBH. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.



Ducta enim ex F Parabolæ regula FI, cum hæc infra contingentem BF, regulę EFO, nunquam occurat, (cum simul conueniãt in F) sitque regula FI propinquior diametro BD quàm producta regula FO, erit Parabole *b* GBH datę Hyperbolę ABC inscripta, eritq; *MAXIMA*: quoniam quælibet alia Parabole ipsi ABC per verticem B adscripta cum recto BL, quod minus sit recto BF datę Hyperbolæ, *c* minor est Parabola GBH, quælibet verò adscripta cum recto BM, quod excedat rectum BF datę Hyperbolæ ipsa GBH

b 3. Coroll. prop. 19. huius.

c 2. Coroll. prop. 19. huius.

est

est $_a$ quidem maior; sed omnino secat [b] Hyperbolen ABC, quoniam eius regula MN infra contingentem BM secat regulam EFO. Vnde Parabole GHB erit *MAXIMA* inscripta, &c. Quod primò, &c.

a ibidem. b 1. Coroll. prop. 19. huius.

Sit verò data Parabole GBH, cuius vertex B, diameter BD, rectum BF, & regula FI, & circumscribenda sit ei cum dato transuerso BE *MINIMA* Hyperbole.

Adscribatur [c] Parabolæ GBH, per verticem B, cum dato transuerso BE Hyperbole ABC, cuius rectum latus idem sit, ac rectum BF datæ Parabolæ. Dico huiusmodi Hyperbolen esse *MINIMAM* quæsitam.

c 6. prop. 19. huius.

Nam quælibet alia Hyperbole per verticem B datæ Hyperbolæ ABC adscripta, cum eodem transuerso BE, sed cum recto BM, quod maius sit recto BF ipsa ABC [d] maior est; quælibet verò adscripta cum recto BL, quod deficiat à recto BF, eadem ABC [e] est quidem minor, sed omnino secat [f] Parabolen GBH, cum eius regula ELP infra contingentem BF producta secet regulam FI datæ Parabolæ GBH. Quare huiusmodi Hyperbole ABC erit *MINIMA* circumscriptibilium datæ Parabolæ ABC per verticem B, & cum dato transuerso BE. Quod erat secundò, &c.

d 2. Coroll. prop. 19. huius. e ibidem. f 1. corol. prop. 19. huius.

MONITVM.



Liquis forsan hoc loco vereri posset enunciationes, vel saltem argumentum MAXIMARVM, MINIMARVMQVE sectionum inscriptibilium, ac circumscriptibilium habuisse me à celeberrimo sui æui Mathematico Maurolico, & hoc quidem, vt fateor, haud temerè; nam quod in duabus præcedentibus propositionibus exponitur, profertur quoque in eius quinto conicorum libro, ab ipso, vnà cum sexto iam supra nonaginta annos proprio Marte suppleto, quamuis typis Messanæ tradito non antea annum 1654. sedula opera eximij Mathematici, ac Philosophi præstantissimi Io. Alphonsi Borelli, qui, vt ipsemet asserit, ex multis Maurolici posthumis lucubrationibus, apud Auctoris hæredes tunc extantibus, prædictum opus publici iuris fieri curauit, idemque mihi à duobus circiter annis primò indicauit, quod è Messana anxiè petiens, tandem ab hinc paucis mensibus consecutus fui. At quicunque æquo, gratoque animo Maurolici demonstrationes, cum meis conferat, dum diuersa, expeditaque methodo generatim ostenditur, ex præmisso Theoremate Lemmatico, duobus tantùm Problematibus, vnicoque Corollario, totum id, quod integro libro peculiariter à Maurolico 24. Propositionibus, decẽque, aut Corollarijs, aut Scholijs demonstratur; curabitque vlterius procedendo, reliquum mei operis percurrere, in quo, tot aliæ, ex his emanantes conclusiones reperiuntur, à nemine, quod sciam, hactenus animaduersæ, hic quidem, vt spero, à tali suspicione omnino remouebitur, & de prædictis promeritum ius, qualecunque sit, mihi facilè tribuet. Sed ne tempus frustra teramus, inceptum opus prosequamur.

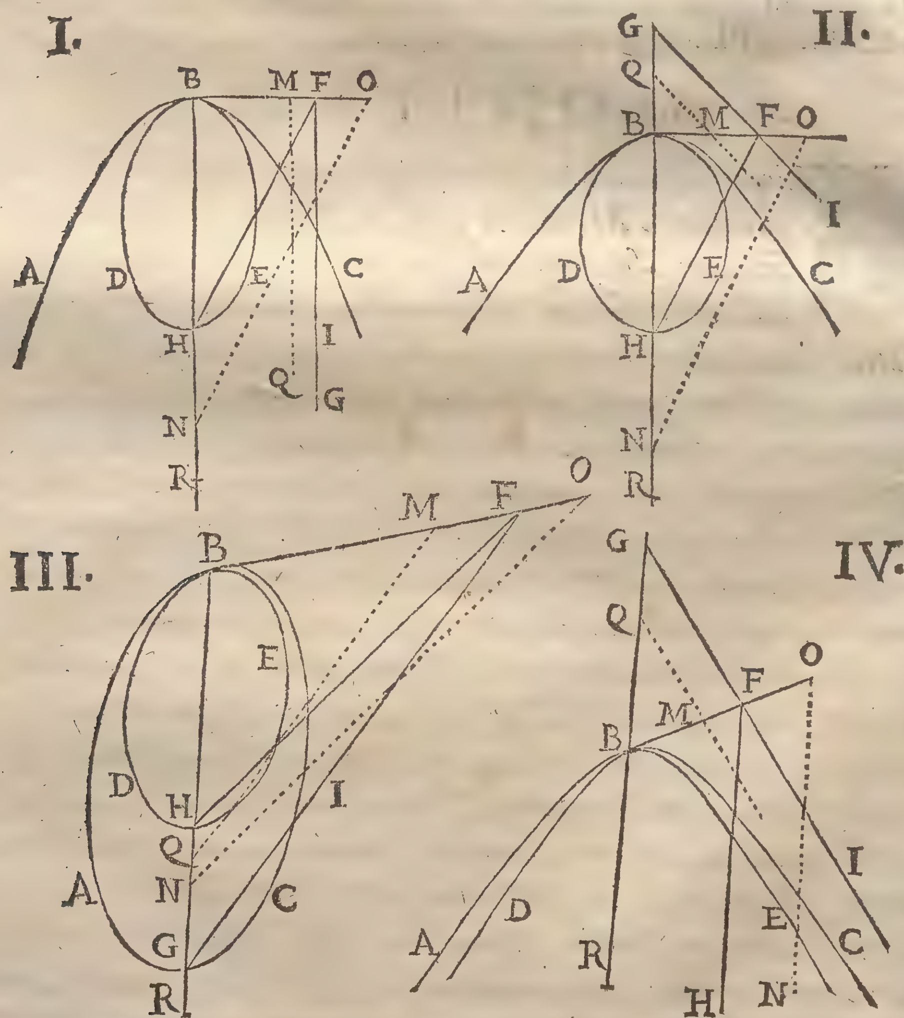
THEO-

THEOR. XII. PROP. XXII.

MAXIMA coni-ſectionum coni-ſectioni per verticem inſcriptibilium cum recto datæ ſectionis, eſt quoq; MAXIMA ſibi ſimilium, eidem ſectioni per verticem inſcriptarum. Et è contra.

MINIMA coni-ſectionum coni-ſectioni per verticem circumſcriptibilium cum recto datæ ſectionis, eſt quoque MINIMA ſibi ſimilium, eidem ſectioni circumſcriptarum.

SIt quælibet coni-ſectio ABC, cuius diameter BR, rectum BF, & regula GFI, ipſique inſcripta ſit per verticem B, cum recto BF coni-ſectio DBE, quæ erit *MAXIMA* inſcriptarum (per ea quę in præcedentibus oſtenſum



fuit) ſitq; huius regula HF. Patet has regulas infra contingentem BF in totum eſſe inter ſe diſiunctas, cum ſit altera ſectio alteri inſcripta. Iam dico hanc *MAXIMAM* ſectionem eſſe quoq; *MAXIMAM* ſibi ſimilium, eidem datæ ſectioni per B verticem inſcriptarum.

Quo-

Quoniam, quæcunque ſectio ſimilis ſectioni DBE adſcripta per B ſectioni ABC, cum recto BM, quod minus ſit recto BF, minor [a] eſt ſectione DBE, quælibet verò adſcripta cum recto BO; quod maius ſit recto BF [b] eſt quidem maior ipſa DBE, ſed datam ABC omnino ſecat; [c] quoniam ipſius regula ON, quæ [d] æquidiſtat regulæ FH, ſecat infra contingentem BF regulam FIG, nam altera parallelarum FH ab eadem FIG ſecatur in F: vnde ipſa DBE eſt *MINIMA* ſibi ſimilium, &c. Quod erat primò, &c.

[a] 5. Coroll. prop. 19. huius. [b] ibidem. [c] 1. Coroll. prop. 19. huius. [d] 5. prop. 19. huius.

Nunc verò ſit coni-ſectio DBE, cuius rectum BF, & regula FH, ipſique circumſcripta ſit cum eodem recto BF, per verticem B coni-ſectio ABC, quæ erit *MINIMA* circumſcripta, per iam demonſtrata, eiuſque regula ſit GFI. Dico hanc *MINIMAM* ſectionem ABC eſſe quoque *MINIMAM* ſibi ſimilium, eidem ſectioni DBE per verticem circumſcriptarum.

Nam quælibet coni-ſectio ſimilis ABC, adſcripta per B datæ ſectioni DBE, cum recto BO, quod maius ſit recto BF [e] maior eſt ſectione ABC, quælibet verò adſcripta cum recto BM, quod minus ſit recto BF eſt quidem minor ipſa ABC, ſed datam ſecat DBE, quoniam ipſius regula QM, quę regulæ GFI æquidiſtat, ſecat regulam FH, nam altera parallelarum GFI ſecat infra BF ipſam FH in F. Quare ipſa ABC eſt *MINIMA* ſibi ſimilium, &c. Quod erat ſecundò, &c.

[e] 5. Coroll. prop. 19. huius.

PROBL. VIII. PROP. XXIII.

Datæ Hyperbolæ, cum dato quocunque tranſuerſo latere, per ipſius verticem MAXIMAM Hyperbolen inſcribere: & è contra.

Datæ Hyperbolæ cum dato quolibet tranſuerſo latere per eius verticem MINIMAM Hyperbolen circumſcribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius vertex B, tranſuerſum latus BD, rectum BE, & regula DE: oportet primò cum dato quocunque alio tranſuerſo latere, per verticem B, *MAXIMAM* Hyperbolen inſcribere.

Iam, vel datum tranſuerſum latus excedi tranſuerſum BD, datę Hyperbolæ, vel eodem minus eſt. Si primùm quale eſt BG; [a] adſcribatur Hyperbolę ABC per verticem B, cum dato tranſuerſo BG, & cum eodem recto BE Hyperbole HBI. Patet ipſam HBI datæ ABC [b] eſſe inſcriptam; quàm dico eſſe *MAXIMAM*: quoniam quælibet alia ipſi HBI adſcripta cum eodem tranſuerſo BG, ſed cum recto, quod ſit minus BE, ſemper minor [c] eſt ipſa HBI, quęlibet verò adſcripta cum recto

[a] 6. huius. [b] 3. Coroll. prop. 19. huius. [c] 2. Coroll. prop. 19. huius.

a ibidem. recto BL, quod excedat BL, est [a] quidem maior ipsa HBI, sed vel secat Hyperbolen ABC, quod accidit [b] si iuncta regula GL, ac infra contingentem BL producta, secet productam regulam DE; vel cadit extra eandẽ ABC, quando [c] iuncta regula GL, cum regula DE infra eandem contingentem nunquam conueniat. Quare huiusmodi Hyperbole HBI erit *MAXIMA* quæsita.

b 1. Coroll. prop. 19. huius.

c ibidem.

Si deniq; datũ trãsuersum latus BM sit minus transuerso BD, ducatur MF ipsi BE parallela, & cũ transuerso BM, ac recto BF, per verticem B, Hyperbolæ ABC adscribatur [d] Hyperbole HBI, quæ ipsi ABC similis erit, cum sit transuersum DB ad rectum BE, vt transuersum MB ad rectum BF, eritq; inscripta [e] Hyperbolæ ABC, cum sit minorum laterum. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.

d 6. huius.

e 5. prop. 19. huius.

Quoniã quælibet alia, quæ cum recto minore ipso BF adscribitur, semper est [f] minor HBI, quæ verò cum recto, quod excedat BF, est quidem [g] maior ipsa HBI, sed vel secat Hyperbolen ABC; quod fit cum rectum cadit inter F, & E, vt in N, [h] nam iuncta regula MN, & producta, secat regulam DE infra contingentem BE; vel cadit tota extra ABC, quod euenit [i] cũ rectum, vel idem fuerit cum recto BE, vel maius ipso BE, quale est BL; tunc enim iuncta regula ML infra contingentem BE, disiunctim procederet à regula DE, cum eam secaret priùs supra BE. Est igitur talis Hyperbole HBI *MAXIMA* quæsita. Quod primò, &c.

f 2. Coroll. prop. 19. huius.

g ibidem.

h 1. Corol. prop. 19. huius.

i 3. 1. Coroll. prop. 19. huius.

Amplius, sit data Hyperbole HBI, cuius transuersum latus sit BD, rectum BE, & regula DE, & ipsi oporteat per verticem B *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere, cum dato quolibet transuerso latere.

Si datum transuersum circumscribendæ Hyperbolæ fuerit minus ipso BD, quale est BM: adscribatur [l] datæ HBI, per verticem B Hyperbole ABC, cuius transuersum sit BM, rectum verò sit idem BE: Nam ipsa [m] erit circumscripta, eritque *MINIMA* quæsita; quoniam quælibet alia adscripta cum transuerso BM, sed cum recto quod excedat BE, quale esset BL, est [n] maior ipsa ABC; quælibet verò adscripta, cum eodem transuerso BM, & cum recto quod minus sit BE, est quidem minor [o] ipsa ABC, sed vel secat [p] Hyperbolen HBI, tùm cum earum regulæ infra contingentem BE se mutuò secant, vel cadit intra [q] HBI, quando earundem regulæ infra prædictam contingentem nunquam simul conueniant. Quare ipsa ABC erit *MINIMA* quæsita.

l 6. prop. huius.

m 3. Corol. prop. 19. huius.

n 2. corol. prop. 19. huius.

o ibidem.

p 2. Coroll. prop. 19. huius.

q ibidem.

Si autem datum transuersum latus fuerit maius ipso BD quale est BG; ducatur GL parallela ad DE, & datæ Hyperbolæ HBI cum transuerso BG, rectoque BL adscribatur [r] per B Hyperbole ABC, quæ datæ HBI erit similis, cum ipsarum latera sint proportionalia, eritque circumscripta, cum sit maio-

r 6. huius.

rum

rum laterum. Dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam: Nam quælibet alia, quę adscribitur cum recto maiore ipso BL, maior [a] est ipsa ABC, quælibet verò, quæ adscribitur cum recto minore ipso BL, est quidem [b] minor ABC, sed vel secat Hyperbolen ABC, quod accidet, cum rectum latus terminet inter E, & L, vt in O, [c] nam iuncta regula GO, si producatur, infra contingentem BO cum regula DE conueniret, ideoque, & sectiones; vel tota cadit intra HBI quod fit [d] quando rectum latus, vel sit idem cum recto BE, vel minus ipso BE, quale est BF, quoniam si iungatur regula GF, ipsa, atque regula DE se mutuò secarent supra contingentem BE, ideoque infra disiunctim simul procederent. Quare huiusmodi Hyperbole ABC, quæ similis est datæ HBI erit *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum erat.

a 2. Corol. 19. h.
b ibidem.
c 1. Corol. 19. h.
d 3. 1. Corol. 19. h.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

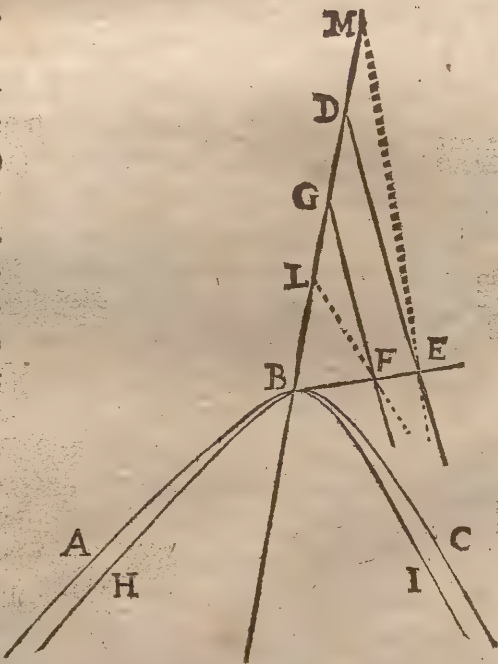
Datæ Hyperbolæ, cum dato recto latere, quod recto datæ sit minus, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolen inscribere, & è contra.

Datæ Hyperbolæ, cum dato recto latere, quod maius sit recto datę, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolen circumscribere.

Sit data Hyperbole ABC, cuius transuersum BD, rectum BE, & regula DE; oportet per eius verticem B, cum dato recto BF, quod minus sit recto BE, *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere.

Ducatur FG parallela ad ED, & cũ transuerso BG, rectoque BF adscribatur [a] per B ipsi ABC, Hyperbole HBI, quæ datæ ABC erit similis (cum ipsarum latera sint proportionalia) eritque inscripta [b] (cum sit minorum laterum) quàm dico esse *MAXIMAM* quæsitam: quoniam quælibet alia adscripta cum recto BF, sed cum transuerso, quod excedat BG minor est [c] ipsa HBI, quæcũque verò adscripta cum eodem recto BE, sed cum transuerso, quod sit minus transuerso BG, quale est BL, est quidẽ maior [d] ipsa HBI, sed omnino secat Hyperbolen ABC [e] cum iũcta regula LE, & producta, regulam DE infra contingentem BE omnino secet: quare ipsa HBI erit *MAXIMA* inscripta cum dato recto BF. Quod primò, &c.

a 6. huius.
b 5. Corol. 19. h.
c 3. Corol. 19. h.
d ibidem.
e 1. Corol. 19. h.



Sit iam data Hyperbole HBI, cuius regula GF, & datum rectum latus sit BE ipso BF maius, cum quo oporteat *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.

Agatur ED ipsi FG æquidistans, & cum regula ED, datæ Hyperbolæ HBI

a 5. Coroll. prop. 19. huius. adſcribatur [a] per B Hyperbole ABC, quæ ipſi HBI erit ſimilis (cum earum latera ſint proportionalia) eritque ei circumſcripta [b] (cum ſit maiorum laterum) & erit *MINIMA* quæſita. Nam quælibet alia adſcripta cum recto BE, ſed cum tranſuerſo, quod ipſo BD ſit minus [c] eſt maior ipſa ABC; quælibet verò adſcripta cum eodem recto BE, ſed cum tranſuerſo BM, quod excedat BD eſt quidem minor ipſa ABC, ſed omnino ſecat Hyperbolen HBI, cum iuncta regula ME, & producta omnino ſecet regulam GF infra contingentem BE. Vnde ipſa ABC erit *MINIMA* circumſcripta cum dato recto BE, vti quærebatur. Quod vltimò faciendum erat.

b 3. Coroll. prop. 19. huius.

c ibidem.

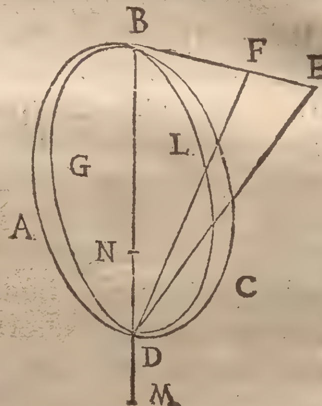
PROBL. X. PROP. XXV.

Datæ Ellipſi, cum dato latere, quod minus ſit eius recto, per ipſius verticem MAXIMAM Ellipſim inſcribere: & è contra.

Datæ Ellipſi, cum dato recto latere, quod maius ſit eius recto, per ipſius verticem MAXIMAM Ellipſim inſcribere.

Sit data Ellipſis ABC, cuius tranſuerſum BD, rectum BE, regula DE: oportet per verticem B, cum dato recto BF *MAXIMAM* Ellipſim inſcribere, neceſſe eſt autem, quod rectum datum BF minus ſit recto BE (ſi enim ei æquale eſſet, vel maius, etiam deſcribenda Ellipſis, vel eſſet [a] eadem cum data ABC, vel hanc ipſam ſecaret, vt ſatis patet, cum vel ipſarum regulæ ſimul congruerent, vel ſe mutuò ſecarent.)

a 1. Coroll. prop. 19. huius.



b 7. huius. Adſcribatur [b] cum eodem tráſuerſo BD, cumque dato recto BF, per verticem B, Ellipſis GBL: & hæc erit *MAXIMA* quæſita. Nam quælibet alia eidem ABC adſcripta cum recto BF, ſed cum tranſuerſo, quod minus ſit BD, eſt minor [c] ipſa GBL, quælibet verò adſcripta cum tranſuerſo BM, quod excedat BD eſt quidem [d] maior ipſa GBL, ſed omnino ſecat Ellipſim datam ABC [e] cum & iuncta regula FM, omnino ſecet regulam ED. Quare Ellipſis GBL erit *MAXIMA* quæſita inſcripta cum recto dato BF. Quod primò, &c.

c 4. Coroll. prop. 19. huius.

d ibidem.

e 1. Coroll. prop. 19. huius.

Sit iam data Ellipſis GBL, cuius tranſuerſum BD, rectum BF, regula DF, & circumſcribenda ſit ei *MINIMA* Ellipſis cum dato recto BE, quod debet quidem eſſe maius recto BF (nam ſi æquale, vel minus eſſet, deſcribenda quoque Ellipſis, vel eadem eſſet cum data GBL, vel huic eſſet [f] inſcripta, cum vel harum regulæ ſimul congruerent, vel regula deſcribendæ caderet tota intra regulam deſcriptæ GBL.)

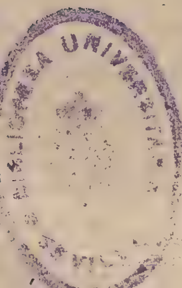
f ibidem.

g 7. huius. Adſcribatur [g] cum tranſuerſo BD, datoque recto BE, per verticem B, Ellipſis ABC, quæ erit *MINIMA* circumſcripta quæſita. Quoniam quæcunque alia adſcripta datæ GBL cum recto BE, ſed cum tranſuerſo, quod maius ſit BD, maior eſt [h] ipſa GBL; quælibet verò adſcripta cum tranſuerſo BN, quod minus ſit tranſuerſo BD, eſt quidem minor [i] ipſa ABC, ſed omnino

h 4. Coroll. prop. 19. huius.

i ibidem.

ſecat



ſecat Ellipſim datam GBL, *a* cum & iuncta regula EN ſecet regulam FD. Quare Ellipſis ABC, erit *MINIMA* quæſita circumſcripta, cum dato recto BE. Quod vltimò, &c.

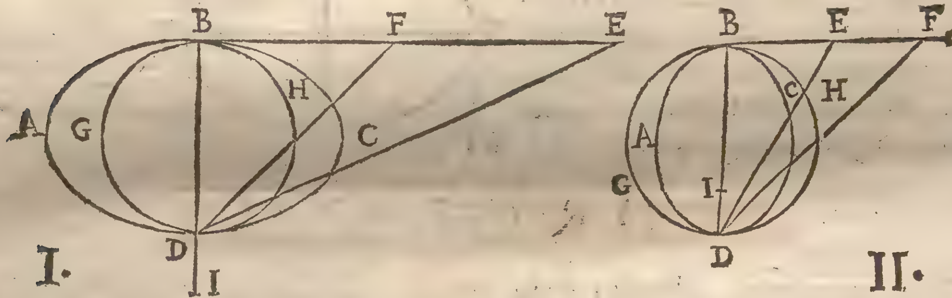
PROBL. XI. PROP. XXVI.

Datæ Ellipſi circa minorem axim, per eius verticem MAXIMVM circulum inſcribere. Item.

Datæ Ellipſi circa maiorem axim, per eius verticem MINIMVM circulum circumſcribere.

SIt in 1. fig. data Ellipſis ABC, circa minorem axim BD, cuius rectũ ſit BE, regula DE, & oporteat per verticem B *MAXIMVM* circulum inſcribere.

Deſcribatur circulus GBHD, cuius dimetiens ſit BD, quem dico eſſe *MAXIMVM* quæſitum.



Sumpta enim BF æquali BD, erit ipſa rectum latus deſcripti circuli: iunctaque DF eius regula cum ſit axis minor BD, minor recto latere BE, erit etiam BF minor BE, vnde regula DF cadet intra regulam DE, ideoque circulus GBH inſcriptus *a* erit Ellipſi ABC, eritque *MAXIMVS*: nam quilibet alius per B adſcriptus, cuius diameter, minor ſit ipſa BD, minor eſt *b* circulo GBH, & cuius diameter BI ſit maior BD *c* eſt quidem maior circulo GBH, ſed vel ſecat, vel cadit extra Ellipſim ABC, cum punctum I quoque cadat extra. Erit ergo GBH *MAXIMVS* circulus per verticem B minoris axis datæ Ellipſi ABC inſcriptus. Quod primò erat, &c.

a 1. Coroll. prop. 19. huius.
b 5. Coroll. prop. 19. huius.
c ibidem.

Sit verò in 2. figura, data Ellipſis ABCD, cuius maior axis BD, rectum BE, regula DE. Oportet per verticem B *MINIMVM* circulum circumſcribere.

Deſcribatur circulus GBHD, cuius diameter ſit axis maior BD. Dico hunc eſſe *MINIMVM* quæſitum.

Cum ſit enim axis BD maior recto latere BE, ſumpta BF æquali BD, ipſa erit latus rectum circuli GBH, & maior BE: vnde circuli regula DF cadet tota extra Ellipſis regulam DE, ac ideò circulus *d* erit Ellipſi circumſcriptus, eritque *MINIMVS*; quoniam quilibet alius circulus GBH per B adſcriptus, cuius diameter ſit maior BD, eſt *e* maior ipſo GBH, & quicunque alius, cuius diameter ſit minor ipſa BD, qualis eſt BI, minor eſt quidem circulo GBH,

d 1. Coroll. prop. 19. huius.
e 5. Coroll. prop. 19. huius.

ſed omnino, vel Ellipſim ſecat, vel intra eam cadit, cum punctum I ſit quoque intra. Quare circulus GBH *MINIMVS* eſt circumſcriptibilium per verticem B maioris axis datæ Ellipſis ABC. Quod ſecundò faciendum erat.

SCHOLIVM I.

HInc facilè eruitur pulcherrima de *MAXIMIS*, & *MINIMIS* circulis, Ellipſi inſcriptis, & circumſcriptis proprietas. Nempe.

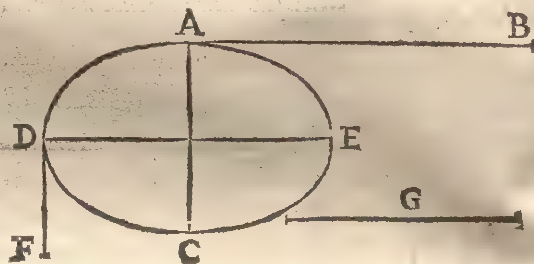
MINIMVM circulum per verticem minoris axis AC Ellipſi circumſcriptum, cuius diameter [a] eſt rectum latus AB.

MINIMVM circulum per verticem maioris axis DE circumſcriptũ, cuius diameter [b] eſt ipſe maior axis DE.

MAXIMVM circulum per verticem minoris axis AC inſcriptum, cuius diameter [c] eſt ipſe minor axis AC.

Et *MAXIMVM* circulũ per verticem maioris axis DE inſcriptum, cuius diameter [d] eſt rectum latus DF, eſſe quatuor circulos in continua eademque ratione geometrica; nam & ipſorum diametri AB, DE, AC, DF ſunt quatuor lineæ continuè proportionales.

[a] 1. Coroll. 20. h.
[b] 26. h.
[c] 26. h.
[d] 1. Coroll. 20. h.



SCHOLIVM II.

ELicitur quoque, Ellipſim quamcunque, mediam eſſe proportionalem inter extremos prædictos circulos, mediamque inter medios. Cum enim quatuor lineæ AB, DE, AC, DF ſint continuè proportionales, erit rectangulum ſub extremis AB, DF æquale rectangulo ſub medijs DE, AC, nempè quadrato G, quæ ſit media proportionalis inter DE, AC; hoc eſt vt AB ad G, ita erit G ad DF; quare circulus ex diametro AB, ad circulum ex diametro G, erit vt circulus G, ad circulum ex DF. Item cum ſit DE ad G, ita G ad AC, erit circulus ex DE ad circulum ex G, vt circulus G ad circulum ex AC, ſed circulus ex G [e] æquatur Ellipſi; vnde Ellipſis DAEC eſt media proportionalis inter extremos prædictos circulos AB, DF mediaque inter medios DE, AC.

[e] 5. Arch. de Conoid. & Spheroid.



PRO-

PROBL. XII. PROP. XXVII.

Datæ portioni Parabolæ, cum dato quocunque transuerso latere, vel cum dato recto, quod sit minus recto datæ Parabolæ, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolæ portionem inscribere; & è contra.

Datæ portioni Hyperbolæ, per eius verticem MINIMAM Parabolæ portionem circumscribere.

SIt data Parabolę portio ABCDE, cuius rectum CF, regula FG, basis AE, diameter CI, & oporteat primùm cum dato quocunque transuerso CH *MAXIMAM* Hyperbolæ portionem inscribere.

Producatur applicata AI vsque ad occursum cum regula in G, & iungatur HG, secans CF in L, & cum transuerso CH, rectoque CL adscribatur [a] portioni ABCDE per verticem C Hyperbole AMCNE, quæ Parabolen ABCDE secabit in [b] A, & E (cum & ipsarum regulæ se mutuò secẽt in occursu eiusdem communis applicatæ AE) & supra basim AE erit datæ Parabolę inscripta. Iam dico hanc portionem AMCNE esse *MAXIMAM* quæsitam.

a 6. huius.
b 1. Coroll. prop. 19. huius.

Quoniam quælibet alia Hyperbole adscripta cum eodem transuerso CH, sed cum recto, quod minus sit recto CL, minor est [c] ipsa AMCNE, quælibet verò adscripta cum recto, quod excedat CL, est quidem [d] maior ipsa AMCNE, sed vel tota cadit extra ABCDE, cum Hyperbole, cuius regula sit quæ ducitur per H & F sit circumscripta [e] Parabolæ ABC, & eò magis, quæ cum recto CO maiore ipso CF; vel saltem secat [f] Parabolen ABC supra portionis basim AE, cum quælibet regula ducta ex H inter L, & F, vt per P, & infra contingentem CF producta, secet regulam FG inter ipsam contingentem, & applicatam AEG. Quare talis Hyperbolæ portio AMCNE est *MAXIMA* inscripta quæsita cũ dato transuerso CH. Quod primò, &c.

c 2. Coroll. prop. 19. huius.
d ibidem.
e 21. h.
f 2. Coroll. prop. 19. huius.

Si verò inscribenda sit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CL, quod minus sit recto Parabolæ CF, (nam cum æquali, vel maiori semper esset circumscripta) iungatur GL, & producatur, ipsa productam diametrum IC secabit in H, cum eadem secet FG alteram Parallelarum ipsi diametro; & cum transuerso HC, rectoque CL [g] adscribatur per C Hyperbole AMCNE, quæ secabit, vt supra, Parabolen ABCDE in [h] A, & E, eique erit inscripta, eritque *MAXIMA*. Nam quæ cum eodem recto CL, sed cum transuerso, quod excedat CH, minor est [i] ipsa AMCNE; quæ verò cum transuerso CQ minore ipso CH, est quidem maior [l] Hyperbola AMCNE, sed omnino secat [m] Parabolen ABCDE supra basim AE, cum & eius regula QL infra contingentem producta, secet regulam FG supra eandem applicatam. Quare huiusmodi portio Hyperbolæ AMCNE est *MAXIMA* inscripta quæ-

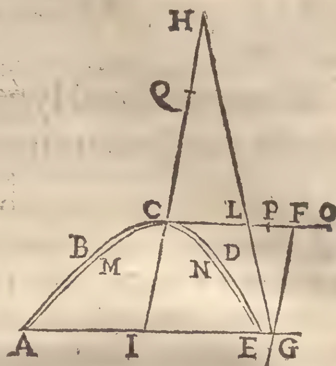
g 6. huius.
h 1. Coroll. prop. 19. huius.
i 3. Corol. 19. huius.
l ibidem.
m 3. Corol. 19. h.

sita

sita cum dato recto CL. Quod secundò, &c.

Iam sit data Hyperbolæ portio AMCNE, cuius transuersum CH, rectum CL, regula HLG, basis AE, diameter CI, & oporteat, per verticem C, *MINIMAM* Parabolæ portionem circumscribere.

Producatur applicata AI, conueniens cum regula HL in G, & per G ducatur GF parallela ad IC contingentem secans in F, cumque recto CF adscribatur [a] per C Parabole ABCDE, quæ secabit Hyperbolen in ijsdem punctis A, & E, ob rationem superius allatam, & datę Parabolæ ABCD [b] erit circumscripta; eritq; *MINIMA* portio.



[a] 5. huius.

[b] 1. Coroll. prop. 19. huius.

Quoniam, quæ cum recto maiore ipso CF est maior [c] ipsa ABCDE, quæ verò cum recto minore ipso CF est quidem minor [d] ABCDE, sed vel tota cadit intra Hyperbolen AMCN [e] si nempe rectum æquale fuerit ipso CL, & eò magis si minus esset BL; vel saltē secat Hyperbolen AMCN supra applicatam AE [f] tum cum rectum sit medium inter CF, & CL, quale est CP: nam regula, quæ ex P, ducitur æquidistans CI, omninò secat regulam LG infra contingentem CF, & supra applicatam AG. Quare ipsa Parabolæ portio ABCDE, est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod tandem faciendum erat.

[c] 2. Coroll. prop. 19. huius.

[d] ibidem.

[e] 21. h.

[f] 1. Coroll. prop. 19. huius.

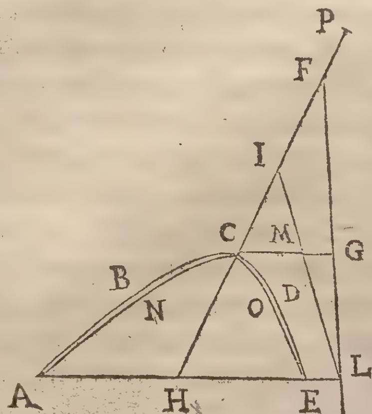
PROBL. XIII. PROP. XXVIII.

Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato transuerso vel recto, quod minus sit transuerso, vel recto datæ Hyperbolæ, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolæ portionem inscribere: & è contra.

Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato transuerso vel recto, quod excedat transuersum, aut rectum datæ Hyperbolæ, per eius verticem MINIMAM Hyperbolæ portionem circumscribere.

Sit data Hyperbolæ portio ABCDE, cuius transuersum CF, rectum CG, regula FGL, basis AE, diameter CH. Oportet primò cum dato transuerso CI, quod minus sit ipso CF *MAXIMAM* Hyporbolæ portionem inscribere.

Producta enim applicata AH, cōueniat cum regula FG in L, & iuncta IL contingentem CG secant in M, cum regula IM, per verticem C adscribatur [a] portioni ABCDE Hyperbole ANCOE, quę datam ABCD secabit [b] in A, & E, at quę ipsi erit inscripta. Dico portionē ANCOE esse *MAXIMAM* quæsitam.



[a] 6. huius.

[b] 1. Coroll. prop. 19. huius.

Quoniam, quę adscribitur cum eodem transuerso CI, sed cum recto, quod sit minus CM, est minor [c] ipsa ANCO, quæ verò

[c] 2. corol. prop. 19. huius.

verò cum recto, quod excedat CM, est quidem maior [a] ipsa ANCO, sed vel tota cadit extra ABCDE, cum Hyperbole, cuius regula IG [b] sit ei circumscripta, & eò ampliùs ea, quæ cum recto quod excedat CG; vel saltem secat Hyperbolen ABCD supra portionis basim AE [c] si rectum cadat inter M, & G. Vnde hæc Hyperbolæ portio ANCOE est *MAXIMA* inscripta quæsita, cum dato transuerso CI. Quod erat primò, &c.

a 2. Coroll. 19.h.
b 24. h.
c 1. Coroll. 19.h.

Si autem inscribẽda sit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CM, quod sit minus recto CG (cum æquali enim, vel maiori semper esset circumscripta) iuncta LM, & producta vsque ad occursum cum diametro in I; cum transuerso latere CI, ac recto CM adscribatur [d] per C Hyperbole ANCOE, quæ secabit [e] Hyperbolæ portionem ABCD in A & E, eique erit inscripta. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam quæ adscribitur per C cum eodem recto CM, sed cum transuerso, quod excedat CI, minor [f] est Hyperbola ANCO, quæ verò cum transuerso, quod minus sit ipso CI, & [g] quidem maior eadem ANCO, sed omninò secat [h] Hyperbolen ABCDE supra applicatam AE. Est igitur huiusmodi Hyperbolæ portio ANCO *MAXIMA* inscripta quæsita cum dato recto CM. Quod erat secundò, &c.

d 6. huius.
e 1. Coroll. 19. h.
f 3. Corol. 19. huius.
g ibidem.
h 1. Coroll. 19.h.

Ampliùs, sit data Hyperbolæ portio ANCOE, cuius versum CI, rectum CM, regula IML, basis AE, ac diameter CI, cui oporteat per verticem C, cum dato transuerso CF, quod maius sit CI *MINIMAM* Hyperbolæ portionem circumscribere.

Producatur semi-basis AH conueniens cum regula IM, in L, & iungatur FL contingentem CM secans in G, & cum transuerso CF, ac recto CG adscribatur [i] per verticem C Hyperbole ABCDE, quæ occurret datæ Hyperbolæ ANCO in punctis A, E, eique erit circumscripta supra basim AE, & erit *MINIMA* Hyperbolæ portio quæsita.

i 6. huius.

Quoniam, quæ adscribitur cum eodem verso CF, sed cum recto maiore ipso CG, est quoque maior [l] Hyperbola ABCD, quę verò cum recto minore ipso CG, est quidem minor [m] eadem ABCD, sed vel tota cadit intra datam ANCO [n] si nempe rectum æquale fuerit ipso CM, & eò magis si minus esset CM; vel saltem secat [o] Hyperbolen ANCO supra basim AE, quando rectum cadat inter CM, & CG; tunc enim harum regulæ se mutuò secarent, supra eandem basim AE. Vnde Hyperbolæ portio ABCDE, est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato transuerso CF. Quod tertiò, &c.

l 1. Corol. 19. huius.
m 2. Coroll. 19. h.
n ibidem.
o 3. Corol. 19. huius.

Demùm eidem datæ Hyperbolæ ANCO, sit circumscribenda *MINIMA* Hyperbole cum dato recto CG, quod excedat datæ rectum CM. Facta eadem constructione, iungatur LG diametro occurrens in F, & cum transuerso CF, ac dato recto CG [p] adscribatur per C Hyperbole ABCDE, quæ datam secabit in A, & E [q] eique erit circumscripta, & erit *MINIMA* quæsita. Nam, quæ cum eodem recto CG, sed cum transuerso, quod minus sit CF, maior est [r] ipsa ABCD, quę verò cum transuerso, quod maius sit ipso CF, quale est CP, est quidem [s] minor, sed omnino secat, portionem ANCO supra basim AE, cum iuncta regula PG, & producta, secet regulam IL supra ipsam basim AE. Quare Hyperbolæ portio ABCD est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato recto CG. Quod tandem faciendum erat.

p 1. Coroll. 19. h.
q 6. huius.
r 1. Coroll. 19. h.
s 3. Corol. 19. huius.

PRO-

PROBL. XIV. PROP. XXIX.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, per eius verticem MAXIMAM Parabolæ portionem inscribere; & è contra.

Datæ portioni Parabolæ per eius verticem, cum dato recto, quod excedat rectum datæ Parabolæ, vel cum dato transuerso, quod maius sit diametro datæ portionis MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, aut Ellipsis portio ABC, cuius diameter sit BE, basis AC. Oportet per eius verticem B, *MAXIMAM* Parabolæ portionem inscribere.

Sit BF transuersum latus dati circuli, vel Ellipsis, BG rectum, & FG regula, cui producta AE occurrat in H, & per H agatur LHI ipsi BF equidistans, & cum recto BI, per verticem B adscribatur [a] portioni ADBC Parabole AMBC, quæ per extrema A, C [b] transibit, ac datæ portioni supra basim AC erit inscripta, & erit *MAXIMA*: quoniam, quæ adscribitur cum recto, quod minus sit BI minor [c] est ipsa AMBC; quæ verò cum recto, quod excedat BI, vel tota cadit extra Ellipsis portionem ADB, si nempe [d] eius rectum sit idem cum recto BG, & eò magis si ipsum excedat; vel ad minus secat datam portionem supra basim AC, si Parabolę rectum cadat inter I, & G, vt in N. Nam [e] eius regula ex N ducta æquidistanter ipsi IH omninò secat Ellipsis regulam HG supra basim AC. Quare Parabolæ portio AMBC est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò, &c.

a 5. huius. b 1. Coroll. 19. h. c 2. Coroll. prop. 19. huius. d 20. h. e 1. Coroll. 19. h.

Iam sit data Parabolæ portio AMBC, cuius rectum BI, regula IL, diameter BE, basis AC, & per eius verticem B oporteat *MINIMAM* Ellipsis portionem ei circumscribere cum dato recto BG, quod excedat rectum datæ portionis.

Conueniat applicata AE cum regula IL in H, iunctaq; GH, & producta, occurrat portionis diametro in F (secans enim vnam parallelarum IH, secat alteram BE:) cum transuerso autem BF, ac dato recto BG [f] adscribatur per B Ellipsis ADBC, quæ datę Parabolæ AMB occurret in A, & C, & [g] erit circumscripta, quàm dico esse *MINIMAM*. Nam Ellipsis quæ adscribitur per B, cum eodem recto BG, sed cum transuerso, quod excedat BF, maior est [h] ipsa ADB; quæ verò adscribitur cum transuerso, quod minus sit ipso BF, est quidem [i] minor eadem ADB, sed omnino secat Parabolen AMBC supra basim AC, [l] cum & ipsarum regulę se mutuò secent supra eandem AC. Quare Ellipsis portio ADBC est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato recto BG. Quod secundò, &c.

f 7. huius. g 1. Coroll. prop. 19. huius. h 4. Coroll. prop. 19. huius. i ibidem. l 1. Corol. 19. huius.

Sit tandem circumscribenda datæ portioni Parabolicæ AMB *MINIMA*

Ellipsis

Ellipsis portio per verticem B, cum dato transuerso BF, excedens diametrum BE.

Iungatur FH, & producatur, contingentem BI secans in G, & cum dato transuerso BF, ac recto BG [a] adscribatur per B Ellipsis portio ADBC, quæ item datæ portioni AMB occurret in punctis A, C [b] eritque circumscripta: Nam quæ cum eodem transuerso BF adscribitur, sed cum recto maiore ipso BG est [c] quoque maior Ellipsi ADB; quæ verò cum recto, quod deficiat à BG est [d] quidem minor ipsa ADB, sed vel tota cadit intra AMB, quãdo rectum Ellipsis [e] idem fuerit cum recto Parabolæ BI, & eò magis cum fuerit minus; vel saltem secat [f] Parabolen AMBC supra applicatam AC, cum rectum cadat inter BI, & BG, quale est BN; nam iuncta regula FN secat omnino regulam IH supra eandem AC. Quare huiusmodi portio Elliptica ADBC, est *MINIMA* circumscripta quæsita cum dato transuerso BF. Quod tandem erat faciendum.

a 7. huius.
b 1. Coroll. prop. 19. huius.
c 4. Coroll. prop. 19. huius.
d ibidem.
e 20. h.
f 1. Coroll. prop. 19. huius.

PROBL. XV. PROP. XXX.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato quocunque transuerso latere, vel cum dato recto, quod minus sit latitudine semi-applicatæ basis portionis, per eius verticem MAXIMAM Hyperbolę portionem inscribere; & è contra.

Datæ portioni Hyperbolæ, cum dato quocunque transuerso latere, quod maius sit diametro datæ portionis, vel cum dato recto, quod excedat prædictam latitudinem, per eius verticem MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, aut Ellipsis portio ABCD, cuius diameter CE, basis AD, transuersum latus CF, rectum CG, & regula FG. Oportet per eius verticem C, cum dato quocunque transuerso CI *MAXIMAM* Hyperbolę portionem inscribere.

Producatur AE, vsq; ad occursum cum regula FG in L, & iungatur IL contingentem CG secans in M, & cum dato transuerso CI, ac recto CM adscribatur [a] per C Hyperbolæ portio ANCD, quæ datæ portioni ABCD occurret in A, & D, eritq; [b] inscripta; quàm dico esse *MAXIMAM*: nãque adscribitur cum eodem transuerso CI, sed cum recto minore ipso CM, est quoq; minor [c] Hyperbola ANCD, quę verò cum recto maiore CM, vel tota cadit extra datam Ellipsim ABCD, quando [d] videlicet eius rectum latus æquet ipsum CG, & eò magis si rectum excedat CG; vel sal-

a 6. huius.
b 1. Coroll prop. 19. huius.
c 2. corol. prop. 19. huius.
d 20. h.

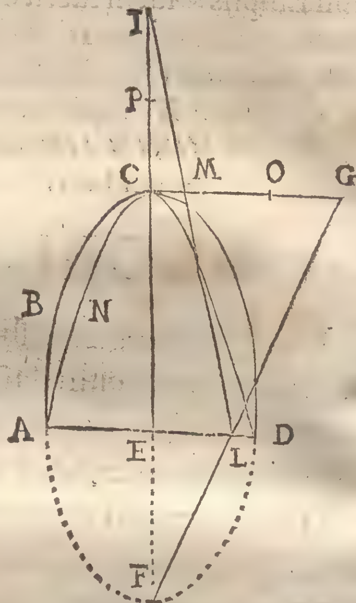
ſaltem ſecat portionem ABC ſupra baſim AD, ſi rectum cadat inter M, & G, quale eſt CO nam [a] iuncta regula IO, & producta omnino ſecat regulam GL ſupra eandem AD. Quare Hyperbolæ portio ANCD eſt *MAXIMA* inſcripta quæſita cum dato tranſuerſo CI. Quod erat primò, &c.

[a] 1. Coroll. prop. 19. huius.

Iam eidem Ellipticæ portioni ABCD inſcribenda ſit *MAXIMA* Hyperbolæ portio cum dato recto CM, quod tamen ſit minus latitudine EL, ſemi applicatæ AE (ſi enim ei æquale, vel maius eſſet, iuncta regula LM nunquam cum diametro EC conueniret ſupra C.

Iungatur LM, quę ideo producta occurret diametro in I, & cum tranſuerſo IC, datoq; recto CM adſcribatur [b] per C Hyperbolæ portio ANCD, quæ datæ portioni ABC occurret in A, & D, & [c] erit inſcripta; quàm dico eſſe *MAXIMAM*: nam quę adſcribitur cum eodem recto CM, ſed cum tranſuerſo, quod excedat CI minor [d] eſt ipſa ANC; quæ verò cum tranſuerſo, quod ſit minus CI, quale eſt CP, eſt [e] quidem maior ipſa ANC, ſed omnino ſecat datam portionem ABC, ſupra baſim AD [f] cum iuncta regula PM, & producta, omnino ſecet regulam GL ſupra eandem AD. Quare huiuſmodi Hyperbolæ portio ANCD, eſt *MAXIMA* inſcripta cũ dato recto CM. Quod ſecundò, &c.

[b] 6. huius.
[c] 1. Coroll. 19. h.
[d] 4. Coroll. 19. h.
[e] ibidem.
[f] 1. Coroll. 19. h.



Amplius ſit data Hyperbolę portio ANCD, cuius tranſuerſum CI, rectum CM, regula IM, diameter CE, baſis AD: oportet per verticem C *MINIMAM* Ellipſis portionem circumſcribere cum dato tranſuerſo CF, quod tamen excedat diametrum CE.

Producatur item AE occurrens regulæ IM in L, & iungatur FL, quæ producta conueniat cum contingente CM in G, & cum dato tranſuerſo CF, ac recto CG adſcribatur [g] per C Ellipſis portio ABCD, quæ datæ Hyperbolæ occurret in A, D, eritque circumſcripta, & erit *MINIMA*: Nam quæ adſcribitur cum eodem tranſuerſo CF, ſed cum recto, quod excedat CG eſt [h] maior ipſa ABC, quæ verò cum recto, quod minus ſit CG; vel tota cadit intra ANCD, tùm cum rectum æquet ipſum CM, & [i] eò magis ſi ipſo ſit minus; vel ſaltem ſecat portionem ANC ſupra baſim AD, quando [l] nempe rectum cadat inter CM, & CG, quale eſt CO, nam iuncta regula FO, omnino ſecat Hyperbolæ regulam ML ſupra eandem AD. Quapropter Ellipſis portio ABCD, erit *MINIMA* circumſcripta cũ dato tranſuerſo CI. Quod tertiò, &c.

[g] 7. huius.
[h] 1. Coroll. 19. h.
[i] 1. Corol. 19. h.
[l] 20. h.

Poſtremò, datis iiſdem, ſit circumſcribenda *MINIMA* Ellipſis portio, cum dato recto CG, quod tamen excedat latitudinem EL (ad hoc vt iuncta regula GI cum diametro CE poſſit conuenire infra E) & ipſa GL occurrat CE in F, & cum dato recto CG, ac tranſuerſo CF adſcribatur [m] per C Ellipſis portio ABCD, quæ item datæ portioni occurret in A, & D, eritq; [n] circumſcripta; quàm dico eſſe *MINIMAM*: quæ enim adſcribitur cum eodem recto CG, ſed cum tranſuerſo, quod ſit maius CF, eſt etiam [o] maior ipſa ABC; quæ

[m] 7. h.
[n] 1. Coroll. 19. h.
[o] 4. Coroll. prop. 19. huius.

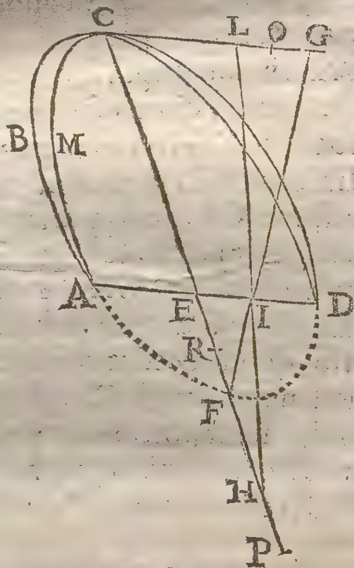
quæ verò cum transuerso, quod deficiat à CF, est quidem [a] minor ipsa ABC, sed omnino secat Hyperbolæ portionem A N C supra basim AD [b] cum & iuncta regula secet datæ portionis regulam M L supra A D. Quare Ellipsis portio ABC D est *MINIMA* circumscripta cum dato recto C E, Quod vltimò, &c. [a] 4. Coroll. 19. h. [b] 1. Coroll. 19. h.

PROBL. XVI. PROP. XXXI.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato transuerso latere, quod excedat versum, vel cum dato recto, quod minus sit recto datæ portionis, maius verò latitudine semi-applicatæ basis portionis, per eius verticem MAXIMAM Ellipsis portionem inscribere. Item.

Datæ portioni circuli, vel Ellipsis, cum dato transuerso, quod minus sit transuerso, sed maius diametro datæ portionis, vel cum dato recto, quod excedat rectum datæ portionis, per eius verticem MINIMAM Ellipsis portionem circumscribere.

Sit data circuli, vel Ellipsis portio A B C D, cuius diameter C E, basis A D, versum CF, rectum CG, & regula CF. Oportet per verticē C *MAXIMAM* Ellipsis portionem inscribere, cum dato transuerso CH, quod sit maius ipso CF.



Applicata A E, & producta occurrat regulæ FG in I; iunctaque H I, conueniat producta cum contingente C G in L, & cum dato transuerso C H, rectoq; CL adscribatur [c] per C Ellipsis portio A M C D, quæ per extrema basis A D transibit [d] datæque portioni erit inscripta. Iam dico hanc esse *MAXIMAM*. Nam quæ adscribitur cum eodem verso C H, sed cum recto, quod minus sit ipso CL, minor est [e] est ipsa A M C D; quæ verò cum recto, quod excedat C L, est quidem [f] maior AMCD, sed vel tota cadit extra ABCD, tum [g] cum eius rectū adæquet CG, tū cū ipsum excedat; vel saltim secat datā portionem ABCD supra basim AD quando [h] rectū cadat inter CL, & C G, quale est C O, nam iuncta regula HO, secat omnino regulā I G supra eandem AD. Vnde Ellipsis portio A M C D est *MAXIMA* inscripta cum dato trāsuerso CH. Quod primò, &c. [c] 7. h. [d] 1. Coroll. 19. h. [e] 2. Coroll. 19. h. [f] ibidem. [g] 20. h. [h] 1. Coroll. 19. h.

Iam, ijsdem positis, oporteat cum dato recto C L, quod minus sit recto CG; maior verò latitudine E I, *MAXIMAM* Ellipsis portionem inscribere.

Iungatur L I, & producatur, conueniens cum diametro C E in H, & cum transuerso CH, datoque recto CL [i] adscribatur per C Ellipsis portio A M C D, quæ datæ portioni [l] occurret in A, & D, eique erit inscripta. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. [i] 7. h. [l] 1. Coroll. 19. h.

Quæ enim adscribitur cū eodem recto CL, sed cum verso, quod minus sit ipso CH est [m] minor portione AMCD; quæ autem cum verso, quod excedat C H, quale est C P, est quidem [n] maior ipsa AMCD, sed omnino secat Ellipsim A B C D supra basim A D [o] cum iuncta regula P L, secet regulam I G supra eandem AD. [m] 4. Coroll. 19. h. [n] ibid. [o] 1. Coroll. 19. h.

AD. Qua Ellipsis portio AMC est *MAXIMA* inscripta cum dato recto CL. Quod secundò, &c.

SIt verò data Ellipsis portio AMCD, cuius transuersum CH, rectum CL, regula LH, basis AD, & diameter CE: oportet per verticem C *MINIMAM* Ellipsis portionem circumscribere, cum dato transuerso CF, quod minus sit verso CH datæ portionis, maius verò eius diametro CE.

Producta semi-applicata AE, occurrat regulæ LH in I, & iuncta FI occurrat contingenti CL in G, & cum transuerso dato CF, cumque recto CG
a 7.hu. adscribatur [a] per C Ellipsis portio ABCD, quæ item per A, & D transibit, & [b] portioni AMC erit
b 1. Coroll.19.h. circumscripta, quàm dico esse *MINIMAM*. Quælibet enim adscripta Ellipsis cum eodem transuerso CF, sed cum recto, quod maius sit ipso CG, est
c 2. Coroll.19.h. maior [c] eadem ABCD; quæ verò cum recto, quod
d ibid. minus sit CG est quidem [d] minor eadem ABC, sed vel tota cadit intra datam AMCD, tum, cum rectũ
e 1. Coroll.19.h. idem fuerit cum recto CL, aut ipso minus; vel [e] saltem secat portionem AMC supra basim AD, quando nempe illius rectum cadat inter CL, & CG, quale est CO, nam iuncta regula OF, omnino secat regulam LH supra eandem applicatam AD. Quare huiusmodi portio Elliptica ABCD erit *MINIMA* circumscripta cum dato transuerso CF. Quod tertiò, &c.

Sit tandem circumscribenda portioni AMC *MINIMA* Ellipsis portio cum dato recto CG, quod tamen superet rectum CL.

Iungatur GI, & producatur, donec conueniat cum diametro in F, & cum
f 7.h. transuerso CF, datoque recto CG adscribatur [f] per C Elliptica portio ABC,
g 1. Coroll.19.h. quæ pariter per A, & D transibit [g] eritque datæ portioni circumscripta: insuper dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam.

Ellipsis enim, quæ adscribitur per C cum eodem recto CG, sed cum trans-
h 4. Coroll.19.h. uerso, quod excedat versũ CE est maior [h] ipsa ABCD, quæ verò cum trãsuerso,
i ibidem. quod minus sit ipso CF, quale est CR, est quidem [i] minor eadem ABCD, sed omnino secat portionem AMCD supra basim [l] AD cum & iuncta regula CR se-
l 1. Coroll.19.h. cet datæ portionis regulam LI supra eandem basim AD. Quare Ellipsis portio ABCD est *MINIMA* circumscripta cum dato recto CG. Quod vltimò, &c.

THEOR. XIII. PROP. XXXII.

Parabolæ, vel Hyperbolę cum earum diametris, iuxta ordinatim semi-applicatas sunt semper simul recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo.

PRimum facilè constat ex 20. ac 21. primi Conic. Secundum verò sic.

Ducta enim cõtingente ex sectionis vertice, quę quodam dato interuallo
m 26. pr. Conic. sit maior, atq; ex eius termino ducta alia, quæ ipsi diametro sit æquidistans, hæc omnino in vno tantùm puncto cum sectione cõueniet, [m] à quo si agatur contin-

genti

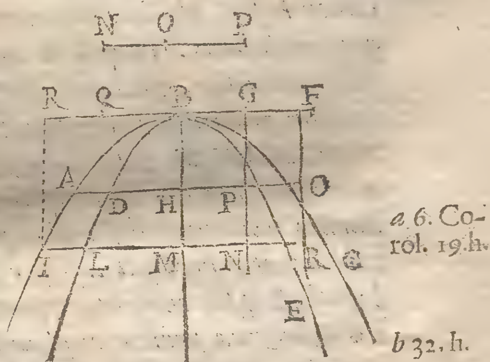
genti parallela, erit hæc vna ordinatim ad diametrum semi-applicatarum, datumq; interuallum superabit: vnde patet propositum. Quod, &c.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Parabolæ inæqualium laterum per eundem verticem simul adscriptæ, sunt inter se nunquam alibi coeuntes, & inscripta est ea, cuius rectum latus minus est, suntque, in infinitum productæ, iuxta intercepta applicatarum segmenta semper magis recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo.

Sint duæ Parabolæ ABC, DBE, per eundem verticem B simul adscriptę, quarum communis diameter BH, & rectum sectionis ABC sit linea BF, DBE verò sit minor BG. Dico primùm has nunquam alibi simul conuenire, & DBE inscriptam esse. Hoc enim iam patet ex 2. Coroll. 19. huius.

Ampliùs, dico has in infinitum productas semper esse inter se magis recedentes.



Ductis enim regulis FO, GP, & applicatis vbicunque duabus ADH, ILM; quæ productę secent regulas in P, O, N, R; manifestum iam est ex 1. h. has regulas inter se æquidistare: & cum sit vt quadratum IM ad ML, ita [a] recta RM ad MN, vel vt OH ad HP, vel vt quadratum AH ad HD, erit etiam recta IM ad ML, vt AH ad HD, & per conuersioné rationis, & permutando IM ad AH, vt IL ad AD, sed est IM [b] maior AH, quare, & IL erit maior AD. Quod secundò, &c.

a 6. Coroll. 19. h.

b 32. h.

Demũ dico, has aliquando peruenire ad interuallũ maius quolibet dato NO.

Fiat vt AD ad DH, vel vt IL ad LM, quod idem est, (modò enim ostédimus omnes huiusmodi applicatas proportionaliter diuidi à Parabola BDL) ita datũ interuallum NO ad aliud OP, & ducta ex vertice contingente BQR sumatur BR æqualis PN, & BQ æqualis PO, & per R agatur RI diametro BM æquidistans, quæ Parabolæ ABC [c] occurrat in I, & per I applicetur ILM. Erit ergo IM æqualis RB, siue æqualis NP, estque vt IL ad LM, ita NO ad OP, ex constructione, quare IL ipsi NO ęqualis erit, sed applicatę infra IL inter Parabolas excedunt ipsam IL, vti nuper ostendimus: quare huiusmodi Parabolæ ad interuallum perueniunt maius dato interuallo NO. Quod vltimò erat, &c.

c 26. pr. conic.

MONITVM.



HVC Franciscum Barocium subaudiet fortasse aliquis admurmurantem, nos, qui de asymptoticis lineis mutuam accessionem, vel recessionem perpendendam suscepimus, æquidistantium linearum segmentis, inter conuergentes, ac diuergentes asymptotos interceptis vsos fuisse, veluti in præcedenti, vbi iuxta lineas, siue portiones AD, IL ex ordinatim applicatis ad communem diametrum, datarum sectionum distantias commetimur; dum tamen ipsæ à breuissimis, seu MINIMIS lineis sint determinandæ, atque hæ

nostræ

nostræ æquidistantium portiones non sint MINIMAE, quæ à punctis alterutrius sectionis super aliam educi queant: vnde ob hoc Hieronymum Cardanum assectari nos debuisse, qui iuxta perpendiculares à punctis hyperbolicæ sectionis super asympton ductas, ipsarum linearum interualla meditatus est; quod nullos alios, admirandum Apollonij hoc Theorema discutientes, animaduersos fuisse, idem Barocius in suo quodam commentario Geometrico sæpiùs admonuit, inter alia hæc proferens; quem errorem, omnes quos vidi huius rei Auctores commiserunt, præter Cardanum. *Sed hùc tã bonum Virum edoctum velimus, hoc idem iamdiu nobis innotuisse, verùm dedita opera, ac libenter in hoc deficere nobis placuisse cum summis Viris, quales, eos inter quos maximè colimus, sunt Torricellius, & Gregorius à S. Vincentio, immo ipsemet Apollonius tam reconditi symptomatis fortasse primus, & acutissimus indagator. Præterea, nos quoque satis agnouisse, vnius puncti distantiam à quacunque seu recta, seu curua linea, strictim assumendam esse iuxta MINIMAM ex eodem puncto, super datam lineam eductam. Insuper ipsam MINIMAM esse, quæ, datæ rectæ, vel contingenii ad datam curuam in puncto occursus perpendiculariter insistit; quæ omnia hùc in proximo nostro libello perspicuè apparebunt: attamen hisce, alijsque notionibus de his instructi, alteram methodum consultò eligere maluimus. Itaquè ab humanissimo Barocio de hoc, cui sanè criminis nomen falsò tribuitur, veniam expectamus; dum nos etiam, & sua, quæquæ sint ab ipso sparsim prolata reticere parati sumus. Interea concedat quæso, vt ad inuentionem MAXIMARVM MINIMARVMque coni-sectionum per diuersos vertices inscriptibilium, aut circumscriptibilium, vel saltim vt genio quodam nostro indulgendo, harum sectionum distantias per æquidistantium interposita segmenta nobis perscrutari liceat. Perlegat insuper, simulque has meditationes percipiat; quod si ex hac hypothesi ipsas euidenter comprobatas inuenerit, fateatur, si lubet, nos abundè in his Geometræ partem expleuisse; sin aliter, incusatione dignos existimet.*

Scias itaque, ac iterum scias candide Lector nos, tum in d[illegible] huius, tum in superioribus, ac deinceps, vbi de non coincident[illegible] asserimus, harum interualla semper assumpsisse [illegible] parallelarum segmenta, licet hoc sæpenumero prætermittatur, cum ex ipso demonstrationum processu id satis superque se in conspectum præbeat. Quod si subijciat Barocius, non quidem intercapedines à punctis vnius ad alteram coni-sectionem, verùm longitudines tantùm illarum æquidistantium portionum sic meditari; illum æquiter ratiocinasse nos ipsi profectò fatebimur, quamuis & eædem parallelarum portiones verè dici possint distantiæ à punctis vnius sectionis ad aliam; prout lineæ omnes, ab vno eodemque puncto ducibiles, dicuntur interualla ab ipso puncto ad eandem lineam, etiamsi eductæ inter se plurimùm differant longitndine.

Quò verò ad methodum iuxta MINIMAS, plura sunt, quæ à nobis huc essent in medium afferenda, sed non est cur in præsens futilem disceptationem aggrediamur. At si quis nos ad huius Pelagi traiectionem deuinctos censeret (quamuis præstantiori fortasse luce orbati, nempe conica Apollonij ineditorum librorum doctrina) diuino tamen præsidio, nostris quibusdam inuentis mox huc edendis innixi, naue integra ad portum appellere non dubitaremus; sed interim eum, non proprij officij causa, sed pro sua tantùm humanitate, nonnulla valde iucunda Problemata enodanda recipere exoptaremus, quæ nobis circa nouam quandam meditationem nuper assequi datum est. Sed missis parergis rem iam susceptam progrediamur.

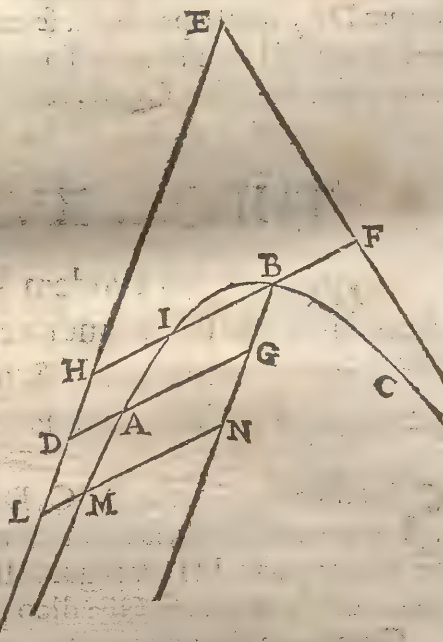
THEO-

THEOR. XV. PROP. XXXIV.

Si à puncto, quod est in Hyperbola ducatur recta linea alteri asymptoton æquidistans, ipsa, ac sectio, quæ inter has parallelas intercipitur, in infinitum productę sunt infra occursum semper magis recedentes, sed tamen nunquam perueniunt ad interuallum æquale cuidam dato interuallo; dum earum distantia metiatur per interceptas æquidistantes cuilibet rectæ, quæ ducta sit ex occursu vtramque asymptoton secans.

Sit Hyperbole ABC, cuius asymptoti ED, EF, sitque ex quolibet sectionis puncto B recta BGN alteri asymptoto ED æquidistans, quæ intra sectioné cadens, in nullo alio pũcto quam B cum ipsa [a] conueniet. Dico primùm (si ex B ducatur quæcunque HBF vtranq; asymptoton secans) ipsam, & sectionem IAM infra BI esse sẽper magis inter se recedẽtes.

[a] Coroll. 11. huius.



Applicentur quotcunque DAG, LMN infra HB, ipsi æquidistantes, patet has omnes LN, DG, HB inter se æquales esse, sed est DA [b] minor HI, ergo AG maior erit IB, estque LM minor DA, quare & MN maior AG, & hoc semper si in infinitum producantur; ergo linea BGN, & sectio IAM sunt semper simul recedentes. Quod primò, &c.

[b] 10. h.

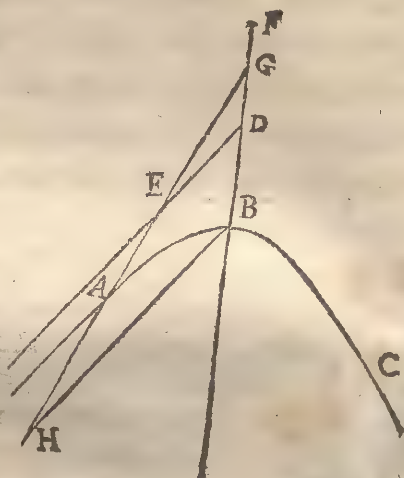
Et quoniam earum interuallum, per easdem interceptas metitum, semper minus est BH interuallo parallelarum BN, HL, cum sit GA minor GD, NM minor NL, & omnes GD, NL, &c. ipsi BH equales: quapropter, licet huiusmodi lineæ sint semper magis recedentes, non tamen perueniunt ad interuallum æquale interuallo BH. Quod erat tandem, &c.



THEO-

THEOR. XVI. PROP. XXXV.

Si recta linea diametro Hyperbolæ vltrà centrum occurrens, alteram ipsius asymptoton secet, producta sectionem quoq; secabit.



Esto Hyperbole ABC, cuius cẽtrum D, asymptotos DE, diameter BDF, è cuius puncto G vltrà cẽtrum assumpto ducta sit quæpiam linea GE asymptoton secans in E; Dico, si producatur, sectionem quoque secare.

Ducta enim ex vertice B recta BH parallela ad DE, ipsa ad partes A nunquam sectioni [a] occurret, cum ei occurrat in B, sed GE secat alteram Parallelarum DE, quare producta secabit, & reliquam BH, vnde necessariò sectionem priùs secabit. Quod, &c.

[a] Coroll. 11. huius.

THEOR. XVII. PROP. XXXVI.

Hyperbolæ per eundem verticem simul adscriptæ, æquale rectum latus habentes sunt inter se nunquam coeuntes, & semper inter se magis recedentes, & in infinitum productæ ad interuallum perueniunt maius quocunque dato interuallo.

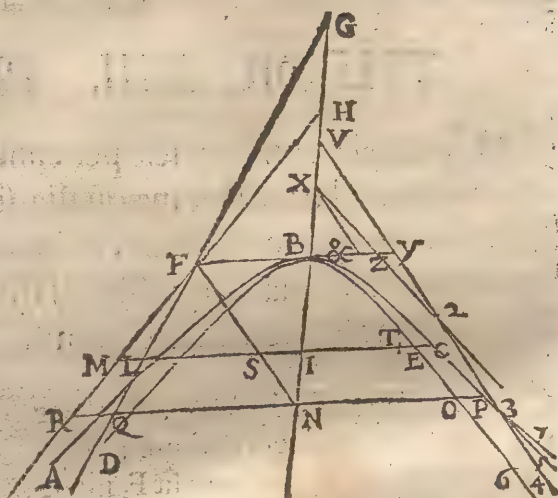
Sint duæ Hyperbolæ ABC, DBE per eundem verticem B simul adscriptę, quarum rectum latus sit idem BF, transuersum verò Hyperbolæ ABC sit minor recta BH, & regula HF; Hyperbolæ autem DBE sit maior recta BG eiusque regula sit GF: dico primùm has inter se simul esse non coeuntes.

Cum enim Hyperbole DBE, maius habens trãsuersum latus, inscripta [a] sit Hyperbolæ ABC, patet ipsas, licet in infinitum producantur, nunquam inter se conuenire, vnde erunt simul non coeuntes.

Iam dico ipsas esse simul semper recedentes. Applicatis enim duabus quibuscunque rectis CEILM, PONQR, iungatur quoque FN rectam MI secans in S. Cum sit LS minor LI habebit ML ad LS maiorem rationem quàm ML ad LI, & componendo MS ad SL, siue RN ad NQ, hoc est [b] quadratum PN ad NO, habebit maiorem rationem, quàm MI ad IL, hoc [c] est quàm quadratum CI ad IE, siue applicata PN ad NO maiorem habebit rationem quàm applicata CI ad IE: si ergo fiat vt PN ad NO, ita CI ad IT, habebit CI ad IT maiorem rationem quàm CI ad IE, ergo IT erit minor IE, ideoque CT maior CE: cumque sit PN ad NO vt CI ad IT, erit per conuersionem rationis, & permutando PN ad CI vt PO ad CT, sed [d] est PN maior CI; quare PO maior erit ipsa CT, estque CT maior CE, ergo PO adhuc

[a] 4. Corol. 19. huius.
[b] 4. Coroll. prop. 19. huius.
[c] ibidem.
[d] 32. h.

maior erit ipſa CE. Quò ergo interceptæ PO magis remouentur à vertice B, eò ſunt maiores: quare huiuſmodi ſectiones inter ſe ſunt ſemper recedentes. Quod ſecundò, &c.



Præterea ſit BY ſectionem contingens in B, & bifariam ſectis tráſuerſis lateribus, nempe GB in V, & HB in X: cum ſit tranſuerſum GB maius BH, erit dimidium BV maius dimidio BX: iam ex centro V ducatur VY aſymptotos inſcriptæ Hyperbolæ DBE, & ex centro X agatur XZ aſymptotos circumſcriptæ ABC, quæ aſymptoti contingentem BI ſecent in Y, Z, & per X agatur X& parallela ad BY contingentem ſecans in &.

Itaque quadratum BY ad BZ eſt, vt rectangulum GBF ad rectangulum HBF (vtrumque enim quadratorum [a] eſt quarta pars ſuæ figuræ) vel vt recta GB ad BH, vel ſumptis ſubduplis, vt VB ad BX, vel ob parallelas, vt YB ad B&, quare BZ eſt media proportionalis inter BY, & B&: cum ergo inter parallelas VY, Z& recta ZX ſecet alteram parallelarum X& in X, ipſa producta ad partes Z ſecabit quoque alteram parallelam VY infra BY: vnde harum ſectionum aſymptoti infra contingentem ex vertice inter ſe conueniunt. *a* 8. huius.

Amplius cum aſymptotos VY inſcriptæ occurrat diametro BG vltra centrum X circumſcriptæ Hyperbolę ABC in puncto V, ipſaque aſymptotos VY conueniat cum XZ aſymptoto circumſcriptæ ABC, vt modò oſtendimus, ſi producatur, [b] ſecabit quoque Hyperbolen ABC. Quare aſymptotos inſcriptæ ſecat Hyperbolen circumſcriptam. *b* 35. h.

Tandem cum harum ſectionum aſymptoti infra contingentem BY ſe mutuò ſecent, & XZ aſymptotos circúſcriptæ BCP, cadat totas extra ipsá BCP, harum aſymptoton occurſus erit extra eandem BCP, vt in 2: & cum VY2 aſymptotos inſcriptæ, ſecet Hyperbolen BCP circumſcriptam, eſto earum communis ſectio in 3, & recta 2 3, producatur ad inferiores partes 4, atque ex 3 ducatur recta 3 5 parallela ad X 2 aſymptoton circumſcriptæ BC3, quę recta 3 5 nunquam conueniet [c] cum ſectione 3 7 ad inferiores partes, ſed etiam recta 3 4 nunquã conuenit cum ſectione BE6 ad eaſdem partes (nam eſt eius aſymptotos) & duæ rectæ 3 5, 3 4 ſunt ſemper ſimul recedentes, & ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo; quare eò magis interuallum ſectionum BC7, BE6, datum quodcunque interuallum excedet. Quod erat vltimò demonſtrandum. *c* 34. h.

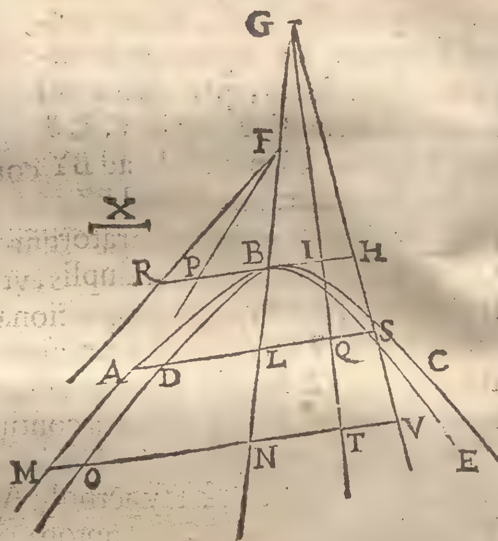
COROLL.

Ex hac manifeſtum fit, quod Hyperbolarum per eundem verticem ſimul adſcriptarum, & idem rectum latus habentium aſymptoti infra contin-

gentem ex vertice se mutuò secant, (extra tamen circumscriptam) & asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam.

THEOR. XIII. PROP. XXXVII.

Hyperbolæ concentricæ per eundem verticem simul adscriptæ, quarum recta latera sint inæqualia, sunt inter se nunquam coeuntes, & semper magis recedentes, & in infinitum productæ, ad interuallum perueniunt maius quolibet dato interuallo, & asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam.



Sint duę Hyperbolę ABC, DBE per eundem verticem B simul adscriptę, quarum idem centrum sit F, idemque transuersum BFG, sed tamen Hyperbolæ ABC rectum latus sit BH, maius recto BI Hyperbolæ DBE. Dico primùm eas simul esse non coeuntes.

Cum enim Hyperbolæ DBE, ABC sint per verticem simul adscriptæ cum eodem transuerso BG, ipsa DBE, cuius rectum minus est, inscripta [a] erit Hyperbolæ ABC, cuius rectum maius est, hoc est, si istæ simul in infinitum producantur, erunt simul non coeuntes.

[a] 2. Coroll. 19. h.

Iam dico, has etiam esse semper inter se recedentes. Ductis enim, & protractis regulis; GH, GI, & applicatis duabus vbicunque rectis ADL, MON; quæ regulas secent in Q, S; T, V, cum sit vt quadratum MN ad quadratũ NO, ita [b] recta VN ad NT, vel recta SL ad SQ, vel quadratum AL ad LD, erit etiam recta MN ad NO, vt AL ad LD, & per conuersionem rationis, & permutando MN ad AL, vt MO ad AD, sed est MN [c] maior AL, quare, & MO erit maior AD; similiter demonstrabitur quamlibet aliam interceptam applicatę portionem inter Hyperbolas infra MO, maiorem esse ipsa MO, & hoc semper, quare huiusmodi Hyperbolæ sunt semper inter se recedentes. Quod secundò, &c.

[b] 6. Coroll. 19. h.

[c] 32. h.

Ampliùs dico, has sectiones in infinitum productas, aliquando peruenire, ad interuallum maius quolibet dato interuallo X. Hoc autem, eadem penitùs arte, ac in 33. huius fieri posse demonstrabitur. Quod tertiò, &c.

Tandem sit FP asymptotos inscriptæ DBC, & FR asymptotos circumscriptę, & contingens HB producatur, vtranque asymptoton secans in P, R: erit ergo quadratum BP ęquale quartę parti figurę GBI, [d] & quadratũ BR quartę parti figuræ GBH, sed rectangulum GBI maius est rectangulo GBH, cum sit BI minor BH, ergo BP minor est BR; hoc est FP asymptoton inscriptæ cadit infra FR asymptoton circumscriptæ diuidens angulũ ab ipsius asymptotis factum, ex quo ipsa FP producta secabit [e] Hyperbolen circumscriptam ABC. Quod erat vltimò, &c.

[d] 8. huius.

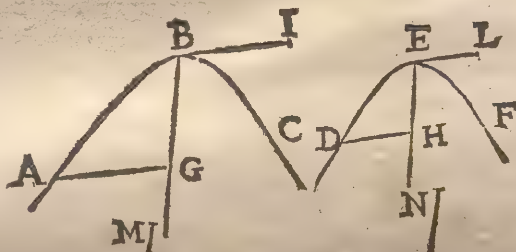
[e] ibidem.

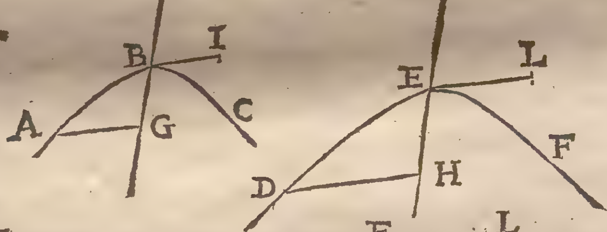
THEO-

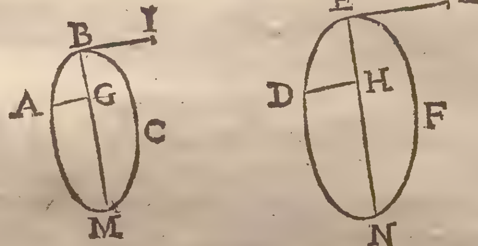
THEOR. XIX. PROP. XXXVIII.

In Parabolis quibuslibet, vel in ſimilibus Hyperbolis, aut ſimilibus Ellipſibus, ſegmenta diametrorum ſectionum lateribus proportionalia, ſuſcipiunt applicatas ijſdem lateribus proportionales.

Sint, vt in prima figura, duæ quælibet Parabolæ, vel vt in ſecunda, duæ ſimiles Hyperbolæ, vel vt in tertia, duæ ſimiles Ellipſes ABC, DEF, quarum diametrorum ſegmenta BG, EH, rectis earum lateribus BI, EL, vel tranſuerſis BM, EN ſint proportionalia, dico & applicatas GA, HD ipſis lateribus eſſe proportionales.







Nam in Parabolis primùm, cum ſit rectum BI ad rectum EL, vt ſegmẽtum BG ad EH, erit permutando IB ad BG, vt LE ad EH, vnde rectangulum IBG ſimile erit rectangulo LEH, quare rectangulum IBG ad LEH, erit vt quadratum lateris IB ad quadratum homologi lateris LE, ſed rectãgulum IBG [a] æquatur quadrato GA, & rectãgulum LEH quadrato HD, vnde quadratum GA ad HD, erit vt quadratum IB ad LE, vel applicata GA ad HD, vt rectum IB ad rectum LE. In Hyperbolis autem, & Ellipſibus cum ſit vt BI ad EL, vel ob ſectionum ſimilitudinem, vt MB ad NE, ita BG ad EH, erit permutando MB ad BG, vt NE ad EH, & in Hyperbolis, componendo, in Ellipſibus autem diuidendo, MG ad GB, vt NH ad HE, quare rectangulum MGB ſimile erit rectangulo NHE, ſed rectangulum MGB ad quadratum GA eſt, [b] vt MB ad BI, vel vt NE ad EL, vel vt rectangulum NHE ad quadratum HD, quare permutando rectangulum MGB ad rectangulum NHE, vel (ob ipſorum rectangulorum ſimilitudinem) quadratum BG ad quadratum EH, vel quadratum BI ad quadratum EL, erit vt quadratum GA ad quadratum HD, hoc eſt rectum BI ad rectum EL, vt applicata GA ad applicatam HD. Quod erat, &c.

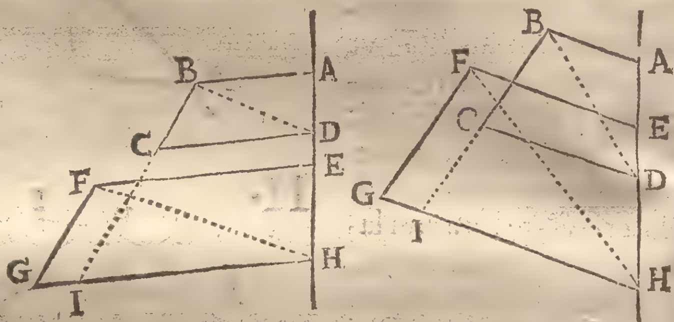
[a] 1. huius.

[b] 21. primi conic.

LEMMA IV. PROP. XXXIX.

Si duæ mensales ABCD, EFGH fuerint super eadem linea AH ad easdem partes descriptæ, ita vt ipsarum bases AB, DC; EF, HG sint omnes inter se parallelæ, sintque proportionales lateribus in directum positis; nempe sit vt AB ad EF, ita AD ad EH, & DC ad HG. Dico, & reliqua latera BC, FG esse inter se parallela.

DVctis enim diagonalibus BD, FH, productaque BC in I. Cum sit BA ad EF, vt AD ad EH, erit permutando BA ad AD, vt FE ad EH, estq; angulus BAD æqualis angulo FEH, ob parallelas BA, FE, quare triangulum BAD simile est triangulo FEH; ideoq; angulus BDA æqualis angulo FHE, & totus CDA, æquatur toto GHE, ob parallelas CD, GH, vnde reliquus CDB, æquatur reliquo GHF. Item cum sit CD ad GH, vt DA ad HE, erit permutando CD ad DA, vt GH ad HE, estq; DA ad DB, vt HE ad HF, ob triangulorum ADB, EHF similitudinem, quare ex æquali CD ad DB, erit vt GH ad HF, suntq; anguli ad D, & H æquales, ergo, & angulus DCB, siue HIB, æqualis angulo HGF, ideoque rectæ BC, FG inter se æquidistant. Quod erat, &c.



THEOR. XX. PROP. XXXX.

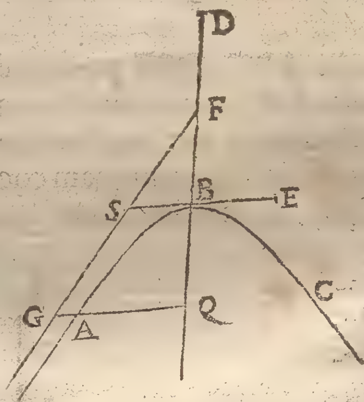
Si à terminis æqualium segmentorum ex diametris similium Hyperbolarum abscissorum rectæ lineæ ordinatim applicentur, vsque ad sectionum asymptotos, erit segmentum applicatæ in Hyperbola maiorum laterum, inter sectionem, & asymptoton interceptum, maius segmento applicatæ, quod in Hyperbola minorum laterum inter sectionem eiusque asymptoton intercipitur.

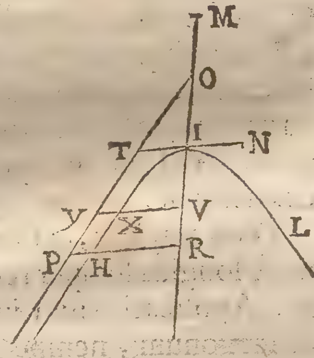
ESto Hyperbole maiorum laterum ABC, cuius transuersum DB rectum BE, asymptotos FG, & Hyperbole minorum sit HIL, cuius transuersum MG, rectum GN, asymptotos OP, & ipsarum sectionum diametris, dempta sint ęqualia diametri segmenta BQ, IR, è quorũ terminis Q, R applicatę sint (ad partes æqualium inclinationum) rectæ QAG, RHP vsque ad earum asymptotos: Dico segmentum GA in sectione maiorum laterum, maius esse segmento PH in sectione minorum.

Produ-

Productis enim contingentibus EB, NI vsque ad asymptotos in S, T; fiat vt DB ad MI, ita BQ ad IV, & per V applicetur VXY: cum sit DB maior MI, erit BQ, & IR maior IV, estque FB maior OI (cum duplum DB sit maior duplo MI) ergo tota FQ erit maior tota OV, & QA ad VX erit [a] vt DB ad MI, & quoniam QB ad VI, est vt BD ad IM, vel vt dimidium BF ad dimidium IO, erit permutando, componendo, & iterum permutando QF ad VO, vt BF ad IO, vel vt DB ad MI; & cum sit quadratum SB ad TI, vt rectangulũ DBE ad MIN, vtrunque enim est quarta pars suæ figuræ) vel vt quadratum DB ad quadratum MI; ob rectangulorum similitudinem) vel sumptis subquadruplis, vt quadratum FB ad OI, erit quoque linea SB ad TI, vt linea FB ad OI, & permutando SB ad BF, vt TI ad IO, sed anguli SBF, TIO sunt æquales per sextam secundarum definitionum, & per constructionem, quare triangula SBF, TIO erunt similia, vti etiam triangula GQF, YVO, obidque homologa eorum latera proportionalia erunt, hoc est GQ ad YV, vt FQ ad OV, sed est FQ maior OV, ergo, & GQ erit maior YV, sed FQ ad OV, est vt DB ad MI, item AQ ad XV, vt DB ad MI, vt supra ostendimus, quare GQ ad YV erit vt AQ ad XV, & permutando, & per conuersionem rationis, & iterum permutando GQ ad YV, vt GA ad YX, sed est GQ maior YV, ergo, & GA maior YX, est autem YX maior PH, ergo eò magis GA erit maior PH. Quod erat demonstrandum.

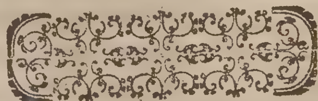
[a] 38. h.





COROLL.

Ex hac patet, in similibus Hyperbolis asymptotos ad partes æqualium inclinationum ductas, æquales angulos cum diametris efficere, ac ideo angulos ab asymptotis factos esse inter se æquales. Cum enim demonstrata sint triangula SFB, TOI similia, erunt anguli ad F, O, æquales; eademque ratione æquales etiam anguli ab alijs asymptotis cum diametris ad alteram partem constitutis; vnde eorum aggregata, nempe anguli ab asymptotis facti in similibus Hyperbolis inter se æquales erunt.



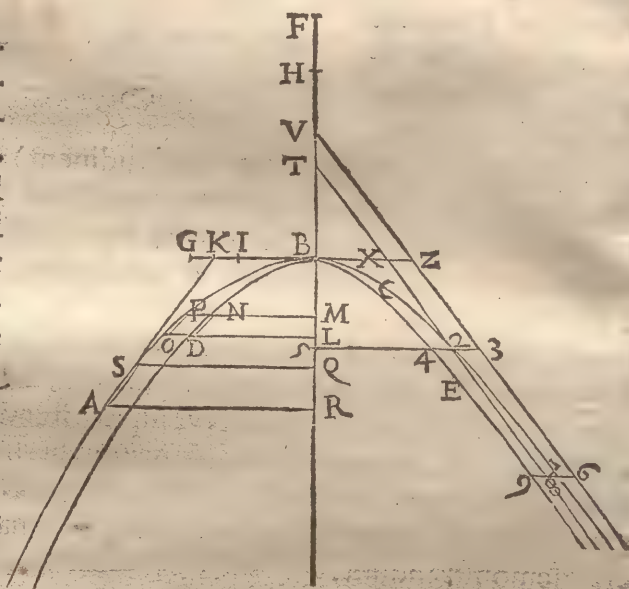
THEO-

THEOR. XXI. PROP. XXXXI.

Similes Hyperbolæ per eundem verticem ſimul adſcriptæ, ſunt inter ſe nunquam coeuntes, & ſemper magis recedentes, ſed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

Sint duæ ſimiles Hyperbolæ ABC, DBE per eundem verticem B ſimul adſcriptæ, & Hyperbolæ ABC maiora ſint latera, tranſuerſum nempe FB, rectũ autem BG; & DBE minora ſint, tranſuerſum HB, rectum verò BI. Patet primùm has ſectiones eſſe inter ſe nunquam coeuntes; cum enim DBE alteri [a] ABC ſit inſcripta, ipſæ, licet in infinitum producantur, nunquam conuenient.

a 5. Coroll. 19. h.



Dico ampliùs, eaſdem inter ſe longiùs ſemper recedere. Applicatis enim in altera ſectionum, nempe in inſcripta, duabus vbicunque rectis MN, LD, fiat vt BH ad BF, ita BM ad BQ, & BL ad BR, & per Q, R, applicentur in circumſcripta Hyperbola rectæ QS, RA; & cum diametrorum ſegmẽta BM, BQ, BL, BR ſint tranſuerſis BH, BF proportionalia, [b] erunt quoque applicatæ MN, QS; LD, RA ijſdẽ lateribus proportionales, quare MN ad QS erit vt LD ad RA; cumque ſit vt tota BL ad totam BR, ita pars BM ad partem BQ, erit & reliqua ML ad reliquam QR, vt tota BL ad totam BR, vel vt BH ad BF, vel vt MN ad QS, & vt LD ad RA, vt nuper oſtendimus; quare iunctis rectis DN, AS in menſalibus DM, AQ, [c] erunt ipſæ DN, AS inter ſe parallelæ. Iam productis MN, LD vſque ad circumſcriptam ſectionem ABC, in P, & O, ſi iungatur PO, hæc omninò ſecabit iunctam AS, vel intra ipſam ſectionem; (ſi nempe vnius iunctarum ſectioni occurſus, alterius occurſibus contineatur) vel extra [d] (ſi nullius occurſus, alterius occurſibus amplectatur) ſed AS producta ad partes verticis tota cadit [e] extra ſectionem in SK, & punctum P eſt in ipſa ſectione, quare punctum P eſt inter parallelas lineas ASK, DN, ſed producta PO conuenit cum altera parallelarum AS, vt modò monitum fuit; taliſq; occurſus eſt omnino ad partes O infra applicatam PN, cum punctum S cadat infra P (nam ex ipſa conſtructione applicata QS eſt infra applicatam MP) quare eadem OP producta conueniet quoque cum altera æquidiſtantium DN, ad oppoſitas tamen partes, vtputa ſupra ipſam applicatam PN, vnde intercepta applicata OD, maior erit intercepta PN vertici B propinquiori,

b 38. h.

c 39. h.

d 25. ſecundi conic.

e 10. primi conic.

quiori, & hoc semper, &c. Quapropter huiusmodi Hyperbolæ sunt semper simul recedentes. Quod secundò, &c.

Præterea sit TX asymptotos inscriptæ DBE, & VZ asymptotos circumscriptæ, quæ contingentem GB productam secent in X, Z; & cum huiusmodi Hyperbolę sint similes, sintque earum asymptoti VZ, TX ad partes ęqualium inclinationum ductæ, erit angulus ZVB [a] æqualis angulo XTB, quare TX æquidistat VZ, sed est VZ. Asymptotos circumscriptæ, vnde TX producta [b] secabit circumscriptam Hyperbolen ABC; secet ergo eam in 2, & per 2 applicetur 3 2 4 5 alteram asymptoton, inscriptam sectionem, ac diametrum secans in 3, 4, 5 dico huiusmodi Hyperbolas, licet semper inter se magis recedant, nnnquam tamen ad interuallum peruenire æquale interuallo 3 2, quod inter æquidistantes asymptotos intercedit, & iuxta ordinatim ductas metitur.

a Coroll. 40. h.

b 11. h.

Nam cum in similibus Hyperbolis ABC, DBE, ex æqualibus, immo ex eodem diametri segmento B 5, ducta sit quædam applicata 5 4 2 3 similimium Hyperbolarum asymptotos secans in 2, 3; erit [c] intercepta huius applicatæ portio 3 2 in Hyperbola maiorum laterum, maior intercepta portione 2 4, in Hyperbola minorum. Ampliùs applicata infra 3 2 4 5, qualibet alia 6 7 8 9; erit ob eandem rationem, & portio 6 7 maior portione 8 9, quare addita communi 7 8; erit 6 8 siue 3 2 maior 7 9, & hoc semper, vbicunque sit intercepta 8 9 infra 2 4 licet ipsæ interceptæ continuè augeantur. Vnde similes Hyperbolæ per eundem verticem simul adscriptę, quamuis sint semper magis recedentes, ad interuallum, tamen non perueniunt æquale cuidam dato interuallo. Quod erat vltimò, &c.

c 40. h.

COROLL.

HInc est, quod similes Hyperbolæ per eundem verticem simul adscriptę habent asymptotos parallelas, & asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam: nam vltimò loco ostẽdimus TX ęquidistare ipsi VZ, & secare inscriptam in 2.

THEOR. XXII. PROP. XXXXII.

Parabolæ congruentes, per diuersos vertices simul adscriptæ, sunt inter se nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad se propius accedunt, & ad interuallum perueniunt minus quolibet dato interuallo.

SInt duæ congruentes Parabolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E, simul adscriptæ, quarum recta latera sint BG, EH (quæ inter se æqualia [a] erunt, cum sectiones ponantur congruentes.) Dico primùm has in infinitum productas nunquam inter se conuenire.

a 1. Coroll. 19. h.

Nam producta contingente HE sectioni ABC occurrente in A, & C, hæc erit quoque ordinatim ducta in sectione ABC (cum sint sectiones simul adscriptæ) & Parabole DEF tota cadet infra contingentem AEC, sumptoque

in ipsa

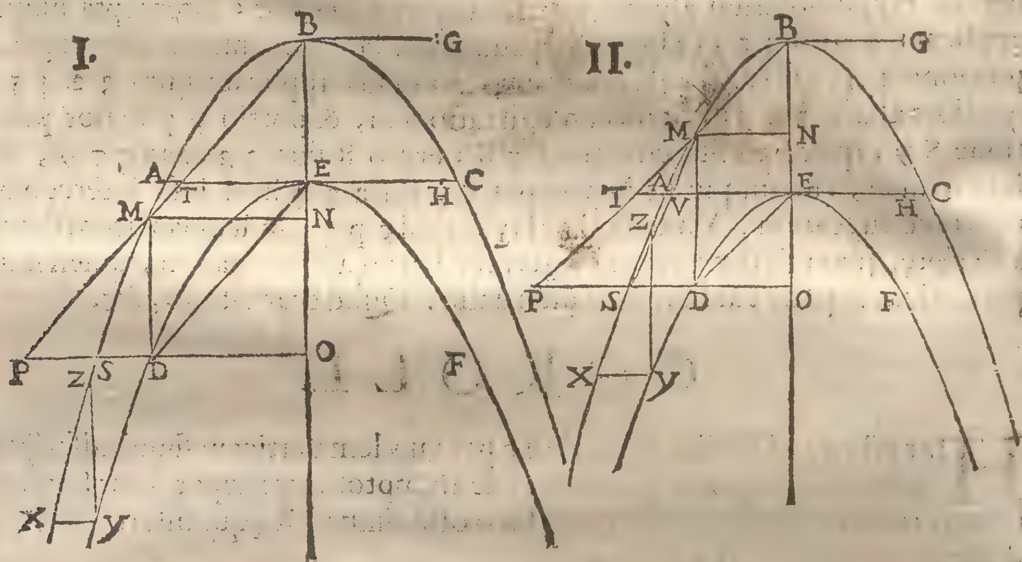
in ipsa DEF, quocunque puncto D, per ipsum ordinatim applicetur ODS, alteram sectionem secans in S: erit quadratum SO [a] æquale rectãgulo OBG, & quadratum DO rectangulo OEH, sed rectangulum OBG maius est rectã-gulo OEH, cum latitudo BG æqualis sit EH, altitudo verò BO maior EO, quare SO quadratum, maius est quadrato DO; vnde punctum D cadit intra Parabolen BA, & sic de quibuslibet alijs pũctis Parabolæ DEF; ergo huiusmodi sectiones inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c.

a 1. huius.

Has tamen dico, licet in infinitum productas, infra contingentem EA ad se propiùs accedere: Ducta enim DM parallela ad ON, & per M applicata MN, fiet parallelogrammum DN, cuius opposita latera MN, DO æqualia erunt. Iam quadratum MN, [b] siue rectangulum NBG æquatur quadrato DO, [c] siue rectangulo OEH, sed horum latera BG, EH æqualia sunt, quare & latera BN, EO æqualia erunt: itaque per prostapheresim, erit BE æqualis NO, sed est quoque MD æqualis eidem NO, igitur BE, & MD inter se sunt

b ibidem.

c ibidem.



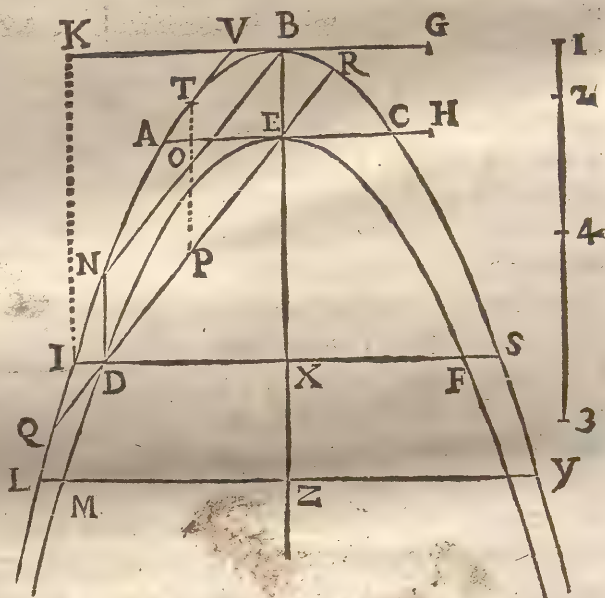
æquales, at sunt quoque parallelæ, igitur coniunctæ BM, & ED æquales erunt, & parallelæ, sed BM secat NM; quare producta secabit quoque alteram parallelarum OD, sed extra sectionem BMA (cum sit BM intra sectionem, producta verò, tota cadat extra) sit ergo occursus cum ODS in P, & cum contingente EA in T; & in secunda figura, in qua contingens EA cadit inter applicatas MN, OS, iungatur SM secans EA in V.

Iam in prima figura, cum in parallelogrammo PE latera ET, DP, sint æqualia, sitque EA maius ET, erit EA quoque maius DP, estque DP maius intercepto segmento DS, quare AE, eò maius erit ipso DS. In secunda autem figura, cum pariter ET, DP sint æquales, sitque ablata TV minor ablata PS, erit reliqua EV maior reliqua DS, & eò magis EA maior eadem DS. Non absimili modò ostendetur quamcunque interceptam XY infra SD, minorem esse ipsa SD; ducta enim YZ æquidistanter EB, demonstrabitur item YZ æqualis eidem BE, ideoque YZ, & DM inter se æquales erunt, & parallelæ,

rallelæ, ex quò si iungatur MZ, & DY, ipsæ æquales, & parallelæ erunt, & facta constructione vt supra, idem omninò demonstrabitur, nempe interceptam YX minorem adhuc esse ipsa DS. Huiusmodi igitur Parabolæ congruentes, quò magis à tangente EA remouentur ad se propiùs accedunt: quod secundò, &c.

ALITER.

SEd hoc idem aliter in nouo hoc schemate, in quo item ostendetur interceptam contingentem EA maiorem esse intercepta applicata DI, & DI maiorem infra intercepta ML, & hoc semper, si sectiones in infinitum producantur. Ducta enim DN parallela ad EB, eadem penitus methodo, qua superiùs vsi sumus, demonstrabimus DN ipsi EB æqualem esse, & parallelam, quare, & coniunctæ BN, ED æquales erunt, ac parallelæ: si ergo BN secetur bifariam in O, ducaturque POT diametro BE æquidistans, patet ipsam TOP esse [a] vtriusque Parabolæ diametrum, & BN esse vnam ei applicatarum in Parabola ABC, vti etiam QDER ipsi NB æquidistantem; quapropter QP, & PR æquales erunt, sed est DP æqualis PE (ob parallelas, & quia NO æquatur OB) quare reliquæ QD, ER æquales erunt, ideoque rectangulum QDR æquabitur rectangulo QER. Ampliùs ducatur TV æquidistans ad QR, vel ad NB: patet TV sectionem [b] contingere in T, & contingenti GB occurrere in V, (nam hæc, cum secet in B alteram parallelarum BN, secat quoque reliquam TV.) Cumque duæ rectæ TV, BV, sectionem ABC contingentes, in vnum conueniant, sitque QR ipsi TV, atque IS, & AC ipsi BV æquidistantes, ac se mutuò secantes in D, & E, erit rectangulum QDR ad IDS, [c] vt quadratum TV ad BV quadratum, itemque rectangulum QER ad AEC, [d] vt idem quadratum TV ad BV, quare vt rectãgulum QDR ad IDS, ita rectangulum QER ad AEC, & permutando rectangulum QDR ad QER, vt rectangulum IDS ad AEC, sed QDR, QER sunt equalia, vt modò ostendimus, ergo & rectangulum IDS æquatur rectangulo AEC, siue quadrato AE, quare vt SD ad EA, ita EA ad DI, sed SD maior est EA, cum [e] sit SX maior CE siue EA, vnde AE quoque, maior erit DI. Eadem ratione ostendetur rectangulum LMX æquale quadrato AE: vnde rectangula IDS, LMY inter se æqualia erunt, sed est latus MY maius latere DS, cum eius segmentum ZY [f] maius sit huius segmento XS, & reliquum segmentum MZ maius reliquo segmento DX, quare latus LM minus erit latere ID, & semper, quò



a 46. primi conic.

b 32. primi conic.

c 17. tertij conic.

d ibidem.

e 32. h.

f ibidem.

 inter-

interceptæ applicatarum portiones à contingente AE magis remouentur eò sunt minores, vnde tales sectiones ad se propiùs accedunt. Sed quod de congruentibus, siue æqualibus parabolis hactenus exposuimus, & iam olim demonstrauimus (dum Asymptoton doctrina promoueri posse animaduertimus) maximos postea Geometras, Torricellium nempe, ac Gregorium à S. Vincentio aliter quoque ostendisse reperimus, quorum edita opera ad vberiorem de hac re eruditionem consulere suademus.

Dico tandem has congruentes Parabolas ad interuallum simul peruenire minus quocunque dato interuallo 1 2. Fiat enim vt 1 2 ad AE, ita AE ad 2 3 quæ ipsi 1 2 indirectum ponatur, & tota 1 3 bifariam secetur in 4, & per B applicetur BK equalis 1 4; agaturque KI parallela ad BX, & per I recta IDS contingēti BK æquidistans, erit ergo IX æqualis KB, siue 4 1; estque IX dimidium IS, & 4 1 dimidium 1 3; quare IS, 1 3 sunt æquales; sed factum est rectangulum 1 2 3 æquale quadrato AE, & rectangulum IDS ostensum est æquale eidem quadrato AE, ergo rectangula IDS, 1 2 3 inter se sunt æqualia; sed rectæ IS, 1 3, sunt æquales, quare segmentum ID æquatur dato interuallo 1 2; interceptæ verò infra ID sunt minores ipsa intercepta ID, quapropter huiusmodi congruentes Parabolę ad interuallum perueniunt minus dato interuallo 1 2. Quod erat vltimò demonstrandum.

COROLL. I.

Ex hac patet, in congruentibus Parabolis per diuersos vertices simul adscriptis, omnes, inter eas, interceptas lineas communi diametro ęquidistanter ductas, esse inter se æquales, quales sunt EB, DN, &c.

COROLL. II.

Patet quoque, ex penultima parte huius, rectangula segmentorum applicatarum vtranque Parabolen secantium omnia inter se æqualia esse, qualia sunt rectangula LMY, IDS, &c.

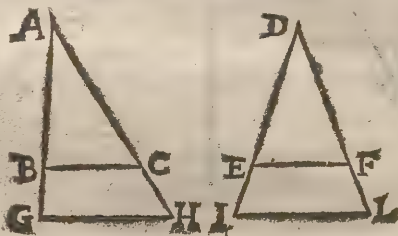
LEM-

LEMMA V. PROP. XXXXIII.

Si duo triangula ABC, DEF, habuerint circa angulos B, E, latera AB, DE, item latera BC, EF inter se æqualia, & in angulis BAC, EDF applicatæ sint GH, IL parallelæ ad BC, EF, sitque rectangulum BGH æquale rectangulo EIL. Dico latera BG, EI inter se æqualia esse.

Sed consultò omissa, præter mei instituti morem, affirmatiua demonstratione, libet potius indirectam, ac breuiorem afferre, simulque egregiæ indolis specimen exhibere nobilissimi, ac ingeniosissimi Romani Adolescentis, Bruti Annibali della Molara, ex selectissimis Ephebis SERENISSIMO MAGNO DVCI ministrantibus, de quo non ausim asserere, quæ sint ei maioris oblectamenti, an equestrium exercitationum ornamenta, quibus elegantissimè insignitur, an mathematicæ contemplationes, dum, etiam inter Aulæ strepitus, pacatos subtilioris Geometriæ nouit inuenire recessus, prout varia testantur problemata, ac theoremata, à me identidem ei proposita, & ab ipso quàm feliciter soluta, quorum, licet facillimum, posteriori tamen inseruiens hic habes.

Esto, si fieri potest, alterum ipsorum laterum, quale est BG, maius altero EI: habebit ergo GB ad BA, maiorem rationem quàm IE ad ED ipsi BA æqualem; & componendo GA ad AB maiorem rationem quàm ID ad DE, sed GA ad AB, est vt GH ad BC, & ID ad DE, vt IL ad EF; ergo GH ad BC habet maiorem rationem quàm IL ad EF, hoc est ad sibi æqualem BC, quare GH erit maior IL, & ponitur BG maior EI, vnde rectangulum BGH maius est rectangulo EIL: quod est contra hypotesim. Sunt ergo BG, EI inter se æquales. Quod erat, &c.



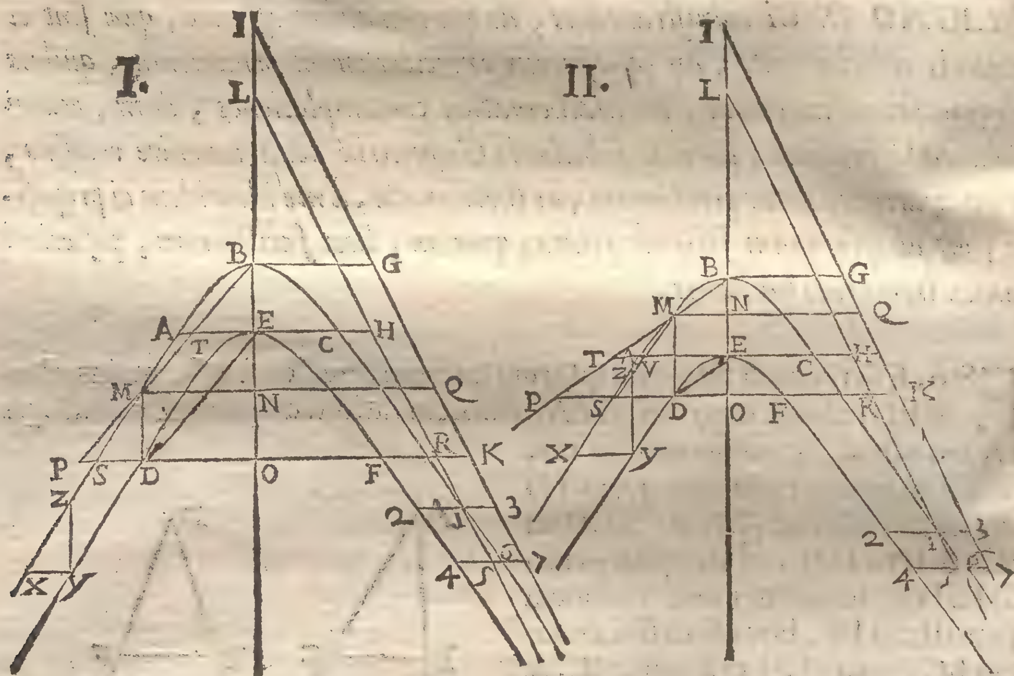


THEOR. XXIII. PROP. XXXXIV.

Hyperbolæ congruentes, per diuersos vertices simul adscriptæ, sunt inter se nunquam coeuntes, & semper simul accedentes: sed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

SInt duæ congruentes Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum recta latera sint BG, EH (quæ inter se æqualia erunt) & ipsarum transuersa sint BI, EL (quæ item æqualia erunt [a] cum sectiones ponantur congruentes.) Dico primùm has sectiones nunquam inter se conuenire.

[a] 1. Coroll. 19. h.



Nam producta contingente HE donec sectioni ABC occurrat in A, & C, ipsa quoque erit ordinata in sectione ABC (cum sint sectiones simul adscriptæ) & sectio DEF tota cadet infra contingentem AEC; sumptoque in ipsa ED quocunque puncto D, applicetur SDO, quæ iunctis regulis IG, LH occurrat in K, R; & cum sit triangulum IBG simile triangulo LEH (habent enim circa æquales angulos B, E, æqualia latera, vtrunque vtrique) erit angulus BIG æqualis angulo ELH, vnde regulæ IGK, LHR æquidistant, ideoque IK cadit extra LR, cum sit punctum I supra L, ergo OK maior est OR, sed est OB maior OE, igitur rectangulum BOK [b] siue quadratum SO, maius est rectangulo, EOR [c] siue quadrato DO; hoc est punctum D cadit intra sectionem ED, & sic de quocunque alio puncto eiusdem sectionis infra contingentem EA: quapropter huiusmodi Hyperbolæ inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c.

[b] Coroll. 1. huius.
[c] ibidem.

Am-

Ampliùs dico ipsam DEF quò longiùs aberit à vertice E infra EA, eò magis appropinquari sectioni B A M. Quoniam ducta D M parallela ad OEB, & MN ad DO, fiet parallelogrammum DN, cuius opposita latera MN, DO æqualia erunt: Itaque regulæ IG occurrat producta MN in Q, & regulæ LH producta DO in R: cum sit ostensa MN æqualis DO, erit quadratum MN [a] siue rectangulum BNQ, æquale quadrato DO [b] siue rectangulo EOR: sed in triangulis IBG, LEH sunt latera IB, LE, & BG, EH inter se æqualia, alterum alteri, quapropter æqualium rectangulorum BNQ, EOR latera BN, & EO [c] æqualia erunt: quare cum diametri segmenta BN, EO sint æqualia, facta prostapheresi, proueniet BE æqualis NO, sed est quoque MD æqualis NO in parallelogrammo DN, igitur rectæ BE, & MD inter se sunt æquales, at sunt etiam parallelæ, ergo coniuncta BM iunctæ ED æquidistat, sed BM secat NM, quare producta secabit quoque OD, sed extra sectionem BMA (cum BM sit intra sectionem, producta verò tota cadat extra) sitque occursus in P, & OD occurrat sectioni BMA in S, PM verò contingentem EA secet in T; & in secunda figura, in qua punctum A cadit inter puncta S, & M, iungatur SM, quæ cum tota cadat intra sectionem, necessariò secabit applicatam AE: veluti in V.

a Coroll. 1. huius.
b ibidem.
c 43. h.

Iam, in prima figura, cum in parallelogrammo P E opposita latera ET, DP sint æqualia, sitque EA maius ET, erit EA quoque maius ipso DP, sed est DP maius intercepto applicatæ segmento DS, erit ergo AE, eò maius ipso DS. In secunda autem figura cum pariter ET, DP sint æquales, sitque dempta TV minor dempta PS, erit reliqua EV maior reliqua DS, & eò magis EA maior eadem DS. Eodẽ penitùs modo ostendetur, quamlibet aliam interceptam ZY infra SD minorem esse ipsa SD: nam ducta YZ æquidistanter ad EB, demonstrabitur item YZ æqualem esse eidem BE, ac ideo YZ, & DM esse inter se equales, & parallelas: ex quo si iungantur MZ, & DY, ipsę æquales erunt, & parallelæ; completa igitur consimili constructione, ac supra, idem omninò insequetur, hoc est interceptam YX minorem adhuc esse DS: tales ergo interceptæ quò magis à tangente EA remouentur continuè decrescunt. Quare sectiones ABC, DEF sunt semper simul accedentes. Quod secundò, &c.

Præterea, si ad euitandam in hisce figuris linearum implicationem, concipiatur circumscriptæ Hyperbolæ ABC centrum esse I, asymptoton IG, & contingens ex vertice BG; at inscriptæ DEF centrum L, asymptoton LH, contingens autem ex vertice sit EH: cum harum sectionum latera sint data æqualia, erunt quoque ipsorum rectangula inter se æqualia, ideoque, & eorum subquadrupla [d] hoc est quadrata contingentium BG, EH; vnde ipsæ lineæ BG, EH æquales erunt, sed est etiam BI æqualis EL (nam vtra est dimidium æqualium versorum laterum) quare in triangulis IBG, LEH, cum sint latera IB, BG, lateribus LE, EH æqualia, & anguli ad B, E æquales, etiam anguli ad bases I, L æquales erunt, vnde asymptoti IG, LG inter se æquidistant; & cum sit à puncto L, quod est intra angulum ab Asymptotis circumscriptæ sectionis factũ, ducta LH alteri asymptoto IK æquidistans, producta [e] secabit omnino Hyperbolen ABC: quare LH asymptotos inscriptæ secat Hyperbolen circumscriptam; secet ergo in 1, per quod applicetur 2 1 3: Dico harum sectionum interuallum infra applicatam 2 1 3 per intercepta

d 1. secũdi conic.
e 11. h.

tercepta applicatarum segmenta metitum, licet semper magis, ac magis decrescat, esse tamen non minus interuallo 1 3, quod iuxta easdem æquidistantes ordinatim sectionibus applicatas, inter vtranque asymptoton cadit. Nam per ea, quæ infra demonstrabimus, interuallum 2 1, maius est interuallo 1 3. Pariter 4 5, est maius 6 7, communique addito 5 6, erit interuallum 4 6, maius interuallo 5 7, siue 1 3, & hoc semper vbicunque sumatur harum sectionum interuallun infra applicatam 2 1 3. Quare hyperbolæ congruentes per diuersos vertices simul adscriptæ, licèt semper magis accedentes, ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo. Quod erat vltimò, &c.

COROLL.

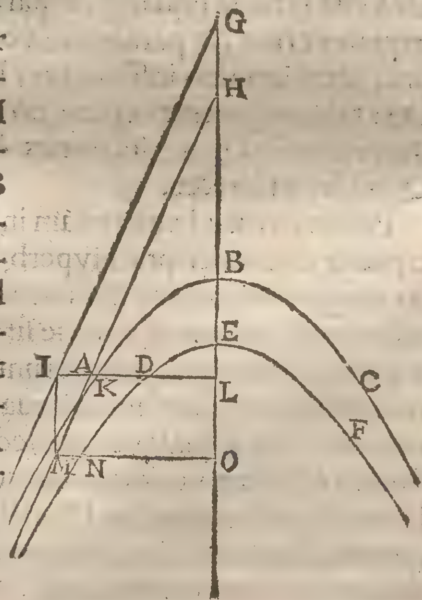
Ex his constat, congruentium Hyperbolarum non per eundem verticem simul adscriptarum asymptotos esse inter se æquidistantes, & asymptoton inscriptæ secare Hyperbolen circumscriptam.

Quod superiùs promisimus ostendetur sic.

Sint duæ congruentes Hyperbolæ KBC, DEF, per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, & circumscriptæ KBC sit centrum G, & asymptotos GI, inscriptæ verò sit centrum H, & asymptotos HM, quæ ipsi GI æquidistabit, per præcedens Coroll. sitque applicata quæcunque IL vtranque asymptoton, & Hyperbolen secans in I, A, K, D, communemque diametrum in L: dico interceptum applicatę segmentum AD inscriptæ Hyperbolę DEF, maius esse intercepto eiusdem applicatæ segmento IK inter asympton, & circumscriptam.

Ducta enim IM parallela ad GHO, & per M applicata MNO, erunt IH, IO parallelogramma, ac ideò tàm GH, quàm LO ipsi IM æquales erunt, & inter se; quare addita communi HL, erit GL æqualis HO, sed est GB æqualis HE, (cum sint semi-transuersa latera congruentium Hyperbolarum) vnde reliqua BL, reliquæ EO æqualis erit, & ob id semi-applicata LK semi-applicatę ON ęqualis, sed est tota LI æqualis totæ OM (cum sint oppositæ in parallelogrammo IO) ergo reliquæ KL, NM æquales erunt, sed est a DA maior NM, quare & eadem DA erit maior KI. Quod erat, &c.

a 10. h.



THEOR. XXIV. PROP. XXXXV.

Similes Hyperbolæ per diuersos vertices simul adscriptæ, & quarum eadem sit regula, sunt inter se nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad se propiùs accedentes, sed ad interuallum nunquam perueniunt æquale cuidam dato interuallo.

Sint duæ Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum eadem sit regula GH (sic enim similes erunt, quoniam ductis contingentibus BI, EL; est transuersum GB ad rectum BI, vt transuersum GE ad rectum EL.) Dico primùm, has in infinitum productas, nunquam simul conuenire. a 6. secúd. defin.

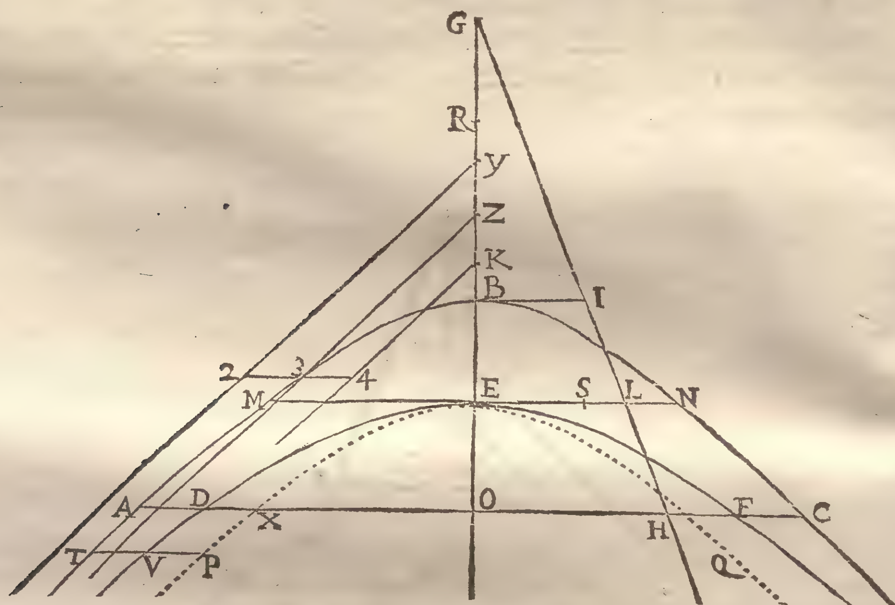
Protracta enim contingente LE, sectionem ABC secant in M, N, quæ erit ipsi ordinata, cum sectiones ponantur simul adscriptæ; patet sectionem DEF totam cadere infra contingentem MN. Iam sumpto in sectione DEF quolibet puncto D, per ipsum ordinatim applicetur ADOH alteram sectionem secans in A, regulam verò in H: erit quadratum AO, ad quadratum DO, vt rectangulum BOH ad rectangulum EOH (ob [b] ęqualitatem) vel vt altitudo BO ad altitudinem EO, sed est BO maior EO, quare quadratum AO maius erit quadrato DO, ex quo punctum D cadit intra Hyperbolen ABC; & sic de quibuscunque alijs punctis Hyperbolę DEF: quare huiusmodi sectiones inter se nunquam conueniunt. Quod primò, &c. b Coroll. 1. huius.

Iam si datæ Hyperbolæ, per verticem E, adscribatur Hyperbole PEQ cuius latera ER, ES æqualia sint lateribus BG, BI, vtrunque vtrique, ipsæ Hyperbolæ ABC, PEQ, congruentes [c] erunt, eritque, (ob æqualitatem) RE ad ES, vt GB ad BI, vel vt GE ad EL, quare Hyperbolæ DEF, PEQ c 1. Coroll. 19. h.

erunt

erunt similes, at sunt per verticem E simul adscriptæ, vnde PEQ minorum laterum inscripta *a* erit Hyperbolæ DEF maiorum laterum: & infra ADX applicata quacunque TVP; cum Hyperbolæ ABC, PEQ sint congruentes, & per diuersos vertices simul adscriptæ *b* erit intercepta AX maior intercepta TP: cumque Hyperbolæ DEF, PEQ sint similes, ac per eundem verticem simul adscriptæ *c* erit intercepta DX minor intercepta VP, vnde reliqua intercepta AD omnino erit maior reliqua intercepta TV; & hoc semper: quare huiusmodi Hyperbolæ ABC, DEF sunt ad se propiùs accedentes. Quod erat secundò, &c.

a 5. Coroll. 19.h.
b 44. h.
c 41. h.



Tandem, bifariam sectis transuersis lateribus GB, GE, RE, in Y, Z, K, erit Y centrum Hyperbolæ ABC, Z verò centrum DEF, ac demum K centrum PEQ: & cum sit GB minor GE, erit dimidium GY minus dimidio GZ; quare punctũ Z cadit infra Y: cumq; sit EG maior ER, erit dimidiũ EZ maius dimidio EK, vnde K punctum cadit infra Z. Si ergo ex Hyperbolarum centris Y, Z, ducantur earum asymptoti Y 2, Z 3, K 4, *d* erit Z 3, parallela ad K 4, & Y 2 *e* æquidistabit eidem K 4; quare asymptoti omnes Y 2, Z 3, K4, erunt inter se parallelæ: & cum Y 2 sit asymptotos ABC, & Z 3 sit intra angulum ab asymptotis comprehensum, ipsa sectionem ABC *f* secabit, vt in 3, per quod ordinatim ducta recta 2 3 4, alias asymptotos secans in 2, 4, infra ipsam applicetur quælibet alia TVP, singulas Hyperbolas secans in T, V, P. Erit intercepta TP *g* maior semper interuallo 2 4, sed ablata intercepta VP est semper *h* minor ablato interuallo 3 4, vnde reliqua intercepta TV inter datas sectiones ABC, DEF, erit omnino maior reliquo interuallo 2 3, quod inter datarum sectionum parallelas asymptotos est interceptum, ac iuxta ordinatim ductis æquidistantes metitur. Quod erat vltimò demonstrandum.

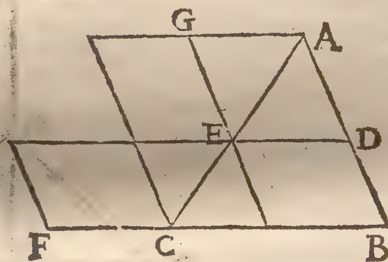
d Coroll. 41. huius.
e Coroll. 44. h.
f Coroll. 11. h.
g 44. h.
h 41. h.

COROLL.

EX his patet, ſimilium Hyperbolarum per diuerſos vertices ſimul adſcriptarum, & quarum eadem ſit regula, aſymptotos eſſe inter ſe parallelas, & aſymptoton inſcriptæ ſecare Hyperbolen circumſcriptam.

LEMMA VI. PROP. XXXXVI.

Si in quocunque triangulo ABC ducta ſit quæpiam linea DE baſi BC parallela, rectangulum ABC ſuperabit ADE rectangulo ſub DB, differentia altitudinum, & ſub aggregato baſium BC, DE.



PRoducta enim BC, ac ſumpta CF æquali ipſi DE, & completis in angulo ABC parallelogrammis AE, AC, DF. Conſtat parallelogrammum AC ſuperare parallelogrammum AE gnomone DCG, ſed gnomon DCG æquatur parallelogrãmis BE, GC, & GC æquatur DC, ſiue EF, quare AC ſuperat AE parallelogrammo DF, hoc eſt rectangulum ABC ſuperat rectangulum ADE, rectangulo DBF; ſed DB eſt differentia altitudinum, & BF aggregatum baſium BC, DE. Quare patet propoſitum.

THEOR. XXV. PROP. XXXXVII.

Similes Hyperbolæ concentricæ per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, ſunt inter ſe nunquam coeuntes, ac ſemper propiùs accedentes, & ad interuallum perueniunt minus quocunque dato interuallo.

SInt duæ ſimiles Hyperbolæ ABC, DEF per diuerſos vertices B, E ſimul adſcriptæ, quarum commune centrum ſit G, ſitque Hyperbolæ ABC tranſuerſum latus BH, rectum BI, Hyperbolæ autem DEF ſit tranſuerſum EL, rectum EM. Dico primùm has, in infinitum productas, nunquam inter ſe conuenire.

Producta enim contingente ME, donec vtrinque ſectioni ABC occurrat, ipſa erit ordinata in ſectione ABC (cum ſint ſectiones ſimul adſcriptæ) ac ſectio DEF cadet tota infra contingentem KEM; & ſumpto in DEC quolibet puncto D, applicataque per D recta ADN, quæ iunctis regulis HI, LM

occurrat in P, O; quoniam datæ ſectiones ſunt ſimiles, erit HB ad BI, vt LE ad EM, ſuntque anguli ad B, E æquales, (cum ſectiones ſint ſimul adſcriptæ) quare triangula HBI, LEM æquiangula erunt, ideoque regula HIP æquidiſtabit regulæ LMO; & triangula LNO, HNP inter ſe ſimilia.

Iam cum ſit GE æqualis ipſi GL, & ablata GB æqualis ablatæ GH, erit reliqua BE, reliquæ HL æqualis; ſed eſt EN minor HN, quare BE ad EN maiorem habet rationem, quàm LH ad HN, & componendo BN ad NE, maiorem item rationem quàm LN ad NH, vel quàm ON ad NP, ergo rectangulum ſub extremis BN, NP, ſiue [a] quadratum applicatæ AN, maius erit [b] rectangulo ſub medijs EN, NO, ſiue [c] quadrato applicatę DN, hoc eſt ipſa AN maior DN, ac propterea punctum D cadit intra Hyperbolen ABC, idemque de quolibet alio puncto ſectionis DEF: vnde ipſa DEF inſcripta erit ipſi ABC, vel erunt nunquam ſimul coeuntes. Quod erat primò, &c.

a Coroll. 1. huius.
b 17. ſept. Pappi.
c Coroll. 1. huius.

Ampliùs applicata infra ADT qualibet alia QRS, & Hyperbolę DEF per eundem verticem E adſcripta Hyperbola ETV, quæ ſit æqualium laterum, ſiue congruens Hyperbolæ ABC, applicatas ſecans in T, V: cum duæ Hyperbolæ EDR, ETV, ſint ſimiles, & per eundem verticem ſimul adſcriptæ; erit ETV, cuius latera æqualia ſunt ipſis lateribus HB, BI, inſcripta [d] ſectioni EDR, cuius maiora ſunt latera LE, EM: ſed erunt [e] ſimul ſemper recedentes; quare intercepta DT minor erit intercepta RV, eſt autem tota AT [f] maior tota QV; quapropter reliqua AD erit omnino maior reliqua QR; & hoc ſemper: Vnde ſimiles concentricæ Hyperbolæ per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, ſunt ad ſe propiùs accedentes. Quod ſecundò erat, &c.

d 5. Coroll. 19. h.
e 41. h.
f 44. h.

ALI-

ALITER.

DVcantur ex communi centro G asymptoti GX, GZ sectionis ABC, quę alterius similis, & concentricæ sectionis DEF [a] erunt quoque asymptoti, & ipsi GX, productæ contingentes IB, ME, occurrant in X, Y, & per G sit G 2, regulis HI, LM parallela, recta latera secans in 2, & 3; cum sit GE æqualis GL, & GB æqualis GH, erit E 3 æqualis 3 M, & B 2 æqualis 2 I, siue 3 4, quare E 4 est aggregatum E 3 cum B 2. Iam cum rectangulum GE 3 sit quarta pars rectanguli LEM, & quadratum EY eiusdem rectanguli [b] subquadruplum, ergo quadratum EY ęquatur rectangulo GE 3: eademque ratione est quadratum BX æquale rectangulo GB 2, sed rectangulum GE 3 excedit rectangulum GB 2 rectangulo BE 4, siue [c] quadrato KE, quare quadratum EY superat quadratum BX quadrato EK: sed productis applicatis AN, QS vsque ad communes asymptotos, ipsas, ac sectiones secantibus in 5 ADFC 6, & in 7 QR 8 9, est quadratum EY æquale [d] rectangulo 5 D 6, & quadratum BX ęquale rectangulo 5 A 6; vnde quadratorum excessus æquatur excessui rectãgulorum, sed excessus quadratorum est quadratum E K, & excessus rectangulorum 5 D 6, 5 A 6 [e] est rectangulum ADC; vnde quadratum EK æquatur rectangulo ADC; eademque ratione ostendetur idem quadratum EK æquale rectangulo QR 8, quare rectangula ADC, QR 8 inter se sunt æqualia, ideoque R 8 ad DC, vt DA ad QR, sed est R 8 maior DC (cum sit RS maior DN, & S 8 maior NC) ergo AD erit maior QR, & hoc semper, &c. Quod iterum erat secundò demonstrandum.

[a] Coroll. 40. huius.
[b] 8. huius.
*. 46. h.
[c] Coroll. 1. huius.
[d] ibidem.
[e] 179. sept. Pappi.
*. 32. h.

Dico tandem has similes concentricas Hyperbolas in infinitum productas ad interuallum peruenire minus quolibet dato interuallo ℞. Nam facta eadem penitus constructione, ac in vltima parte 42. huius, hoc quod exponitur, non absimili eiusdem argumento demonstrabitur. Quod vltimò, &c.

COROLL. I.

EX hac elicitur similium, & concentricarum Hyperbolarum, per diuersos vertices simul adscriptarum, Asymptotos communes esse.

COROLL. II.

COnstat etiam ex penultima parte huius, in prædictis Hyperbolis rectangula segmentorum applicatarum vtranque Hyperbolen secantium, qualia sunt rectangula ADC, QR8, omnia inter se æqualia esse.

Quod in prima parte præcedentium 44. 45. 47. earumque primis Corollarijs ostendimus, vniuersalius sequenti Theoremate demonstrabitur.

THEOR. XXVI. PROP. XXXXVIII.

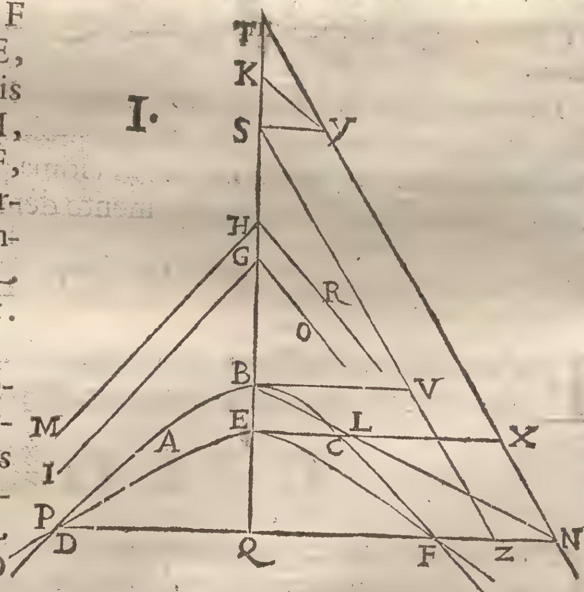
Similes Hyperbolæ per diuersos vertices simul adscriptæ haben asymptotos parallelas, & quando centrum interioris cadat vltra centrum exterioris, tunc huius asymptotos interiorem Hyperbolen secabit, ac ipsæ Hyperbolæ necessariò se mutuò secabunt. Cum verò centrum interioris idem sit cum centro exterioris, tunc vnius asymptotos erit asymptotos alterius; & sectiones erunt simul nunquam coeuntes. Et si interioris centrum cadat infra centrum exterioris, tunc eædem sectiones erunt inter se nunquam coeuntes; & asymptotos inscriptæ secabit Hyperbolen circumscriptam.

Sint, vt in vtraque figura huius propositionis, duæ similes Hyperbolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ, quarum centra sint G, H, & sectionis ABC asymptoti sint GI, GO; sectionis verò DEF sint HM, HR; Dico has asymptotos esse inter se æquidistantes.

Nam in similibus Hyperbolis ABC, DEF, anguli IGE, MHE, ab earum asymptotis, & diametris ad homologas partes facti [a] sunt æquales, suntque alterni, quare ipsæ asymptoti inter se æquidistabunt. Quod primò, &c.

[a] Coroll. 40. huius.

Iam in hac prima figura, (in qua centrum H interioris DEF remotius est à verticibus B, E, quàm sit centrum G exterioris Hyperbolæ ABC) cum sint HM, HR asymptoti Hyperbolæ DEF, & in loco ab eis, & sectione terminato ducta sit GI alteri asymptoton HM æquidistans, ipsa omnino sectionem DEF secabit. Quod secundò, &c.



Sed ipsa GI, cum sit asymptotos sectionis ABC, tota cadit extra ipsam BA, quare occursus prædictæ asymptoton GI cum sectione ED, erit extra sectionem BA, vnde ipsa interior sectio ED necessariò secabit priùs exteriorem BA. Quod tertiò, &c.

Ad pleniorem autem doctrinam, si quæratur, quo nam in puncto huiusmodi Hyperbolæ se mutuò secent, ita id consequetur.

Sumpta enim GS æquali GB, erit tota BS transuersum exterioris ABC; item sumpta HT æquali HE, erit tota TE transuersum interioris DEF.

Iam, vel H centrum interioris cadit in ipso puncto S; vel supra inter S, & T; vel infra inter G, & S.

Si primùm; cum ſit EH æqualis HT, eſſet etiam EH æqualis ST, vnde eius ſegmentum EB minor eſſet diſtantia ST. Si ſecundùm; cum ſit HT æqualis HE omnino ST maior eſſet eadem HE, & eò maior ipſius ſegmento BE. Si tertiùm; vt in hac ipſa figura, in qua centrum H interioris cadit inter S, & G; cum ſit HE æqualis HT, & ablata HB maior ablata HS (nam eſt tota SB ſecta bifariam in G) erit reliqua BE maior reliqua ST. Quapropter in hoc caſu, in quo centrum H interioris cadit vltra centrum G exterioris, vbicunq; ſit eius incidentia, demonſtratum eſt ſemper diſtantiam verticum B, E, minorem eſſe ipſa ST diſtantia inter ſuperiora extrema tranſuerſorum laterum ET, BS. Quod memento.

Ampliùs ſint harum ſectionum recta latera BV, EX, & regulæ TV, TX. Patet ob ſectionum ſimilitudinem, vt SB ad BV, ita eſſe TE ad EX, ſed anguli ad B, E, ſunt æquales (cum ſectiones ſint ſimul adſcriptæ, &c.) quare in triangulis SBV, TEX, anguli ad S, T, æquales erunt, ac ideò regulæ SV, TX inter ſe æquidiſtabunt. Cumque ſit ST maior BE, ſi dematur SK ipſi BE æqualis, ducaturque SY parallela ad EX, & abſcindatur EL æqualis SY, ac iungantur KY, BL: erunt in triangulis KSY, BEL, in quibus latera circum æquales angulos S, E, ſunt æqualia, vtrunque vtrique, anguli quoq; SKY, EBL æquales; ſuntque alterni, quare KY, & BL inter ſe ęquidiſtant, ſed KY ſecat TX, vnde & BL producta ſecabit TX, vt in N: Iam per N ordinatim ductis æquidiſtans applicetur NQDP, regulam SV, ſecans in Z, communem diametrum in Q, exteriorem ſectionem CBA in P, & interiorem in D: Cum in triangulo BQN ſit EL ipſi QN parallela, erit BQ ad QN, vt BE ad EL, & permutando QB ad BE, vt QN ad EL, ſiue ad SY, vel ZN, & per conuerſionem rationis BQ ad QE, vt NQ ad QZ, vnde rectangulum BQZ [a] ſiue quadratum applicatæ PQ æquale eſt rectangulo EQN, ſiue quadrato applicatæ DQ ex quo puncta P, D in vnum conueniunt, hoc eſt interior Hyperbole FED exteriori ABC occurrit in D; eademque ratione oſtendetur ipſas ſimul occurrere in F, altero extremo eiuſdem applicatæ DQF, quare in ipſis occurſibus ſe mutuò ſecant: quoniam ſi exempli gratia, huiuſmodi ſectiones non ſe ſecarent, ſed contigerent in D, contingerent ſe quoque in F, vt facillimum eſt demonſtrare, ſed Hyperbole ED ſecat omnino rectam GI extra ſectionem BA, vti ſuperius oſtendimus, quare hæc interſectio alio in loco cadet quàm in D, pariterque ad alteram partem ſectio EF ſecabit BC in alio puncto, præter in F: Quapropter coni-ſectio coni-ſectionem contingeret in duobus punctis D, F, & in alijs duobus punctis ſibi ipſis occurrerent, quod eſt [b] impoſſibile: vnde in ipſis occurſibus D, F ſe mutuò ſecant; quod ex abundanti oſtendere propoſuimus.

[a] Coroll. 1. huius.

[b] 37. 4. conic.

Si verò centrum H interioris idem fuerit cum G centro exterioris, etiam aſymptotos GI eadem erit cum aſymptoto HM, cum angulus IGB æqualis, vel [c] idem ſit cum angulo MHE; Ergo ſimilium concentricarum Hyperbolarum aſymptoti communes ſunt. Quod quartò erat, &c.

[c] Coroll. 40. huius.

Quod autem ſint ſimul nunquam coeuntes ſatis patet ex prima parte 47. huius, vel quàm breuiſſimè ex propoſ. 208. ſeptimi Pappi. Quod quintò, &c.

Si autem centrum H interioris DEF cadat infra G centrum exterioris ABC, vt in ſecunda figura, per verticem E contingenter applicata CEA; cum HM ſit intra angulum IGO ab aſymptotis factum, ac ipſi GI æquidiſtãs,

ipsa HM producta omnino secabit sectionem CBA, vel supra contingentem CEA, vt in N, vel in ipso occursu A, vel infra ad partes AL; si in N, vel in A, patet interiorem sectionem totam cadere infra applicatas ex N, vel ex A, & nunquam infra N, vel A sectioni BNA occurrere, ne priùs secet propriam asymptoton HM.

Si verò HM secet exteriorẽ BA infra contingentem CAE, vt in hac ipsa figura; item patet sectiones BA, ED infra LD nunquam simul conuenire, sin aliter propriam asymptoton secaret:

Præterea indirectũ producta communi diametro EBG, sumptisque in ea punctis V, T, quæ sint extrema transuersorum laterum datarum sectionum, ductisque regulis TX, VZ; ipsę vti superiùs ostensum fuit, inter se æquidistabunt. Ampliùs sumpto in portione ED quolibet puncto K, per ipsum applicetur KY vtranque Hyperbolen secans in P, K; regulas verò in Z, X.

II.

Iam, vel recta VZ est regula interioris sectionis DEF, & TX exterioris; vel ipsæ simul congruunt, si tamen puncta V, T, in vnum conueniant; vel è contra VZ est regula exterioris, TX verò interioris. Si primum, cum in sectione ABC quadratum applicatæ PY æquale [a] sit rectangulo BYX, & in Hyperbola DEF quadratum KY sit æquale rectangulo EYZ, sitque rectangulum BYX maius EYZ, cum sub maioribus lateribus contineatur, erit quoque quadratum PY, maius quadrato KY: vnde punctum K est intra sectionem ABC. Si secundum nempe sit VZ vtriusque sectionis communis regula, erit quadratum PY æquale rectangulo BYZ, & quadratum KY æquale rectangulo EYZ, sed rectangulum BYZ maius est EYZ, cum altitudo BY maior sit altitudine EY, quare quadratum PY maius est quadrato KY, siue punctum K est intra sectionem ABC. Si denique interior recta VZ fuerit regula exterioris sectionis ABC, & exterior TX, regula interioris DEF, erit HE ipsi HT æqualis, sed est ablata HB minor ablata GV (cum ponatur GB, quæ maior est HB, æqualis GV) ergo reliqua BE maior erit residuis segmentis GH, VT, & eò maior vnico segmento VT, sed est EY minor VY, quare BE ad EY maiorem habebit rationẽ quàm TV ad VY, vel quàm XZ ad ZY, & componendo BY ad YE maiorem habebit rationem quàm XY ad YZ, vnde rectangulum BYZ [b] siue quadratum PY [c] maius erit rectangulo EYX siue quadrato [d] KY, hoc est punctum K incidet intra sectionem ABC, & sic de quolibet alio puncto portionis DEF; Quare huiusmodi similes Hyperbolæ, neque infra applicatam LF, neque inter lineas LF, AC simul conueniunt, vnde sunt in totum nunquam coeuntes. Quod sextò, &c.

[a] Coroll. 1. huius.

[b] ibidem.

[c] 16. sept. Pappi.

[d] Coroll. 1. huius.

Quod

Quod tandem HI, aſymptotos inſcriptæ DEF, ſecet circumſcriptam Hyperbolen ABC, iam ſatis patet ex dictis. Quod ſupererat demonſtrandum.

MONITVM.

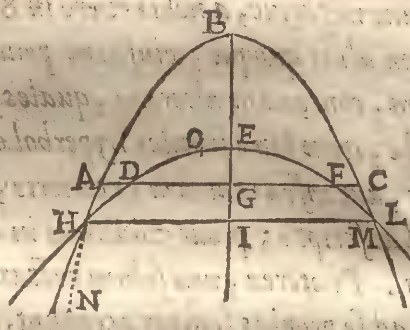
EN tibi Lector Geometra admiranda quædam Naturæ ſymptomata circa Aſymptoticas lineas iam olim à nobis detecta, ac ſimul directa demonſtratione firmata, dum in Conicis hucuſque animaduertimus non tantùm binas dari lineas in eodem plano exiſtentes, quæ licet ſemper inter ſe magis accedant, nunquam tamen (quod ſane mirum eſt) etiam ſi in infinitum productæ, ſimul conueniunt; quales ſunt, conuexa linea hyperbolica, & celebris illa recta Aſymptotos Apoll. ab ipſo tunc negatiuè, à nobis verò in 8. *&* 10. *huius affirmatiuè demonſtrata: verùm alias quoque, eiuſdem penitus naturæ reperiri, alteram nempe conuexam, concauam alteram, quales ſunt binæ congruentes parabolæ, vel hyperbolæ; item binæ ſimiles hyperbolæ, quarum centrum interioris, aut in ipſũ cadat, aut infra centrum exterioris, atque omnes ſint per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ; prout vidimus in* 42. 44. 45. 47. *& elicitur ex ipſa* 48. *huius. Præterea, non ſolùm rectam Aſymptoton, & Hyperbolen dari, quæ dum ad ſe propiùs ſemper accedunt, ad interuallum aliquando perueniunt minus quolibet dato interuallo, vti ex ipſo Apollonio, & ex noſtra* 10. *innotuit; ſed congruentes item parabolas, & concentricas hyperbolas per varios vertices ſimul adſcriptas hac ipſa admirabili affectione eſſe præditas, veluti in* 42. *&* 47. *à nobis fuit oſtenſum. Verum enimuerò haud minori ſaltem admiratione dignum videtur, binas pariter lineas inueniri, quæ licet nunquam coeuntes, & in infinitum productæ ad ſe propiùs accedentes, non tamen vnquam perueniunt ad interuallum cuiuſdam determinatæ magnitudinis: huiuſmodi enim ſunt congruentes Hyperbolæ, pariterque hyperbolæ ſimiles per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, prout didicimus in* 44. *&* 45. *Alias ampliùs deteximus lineas, quarum diſtãtia perpetuò augetur, ſed nunquam tamen peruenit ad interuallum æquale cuidam terminato interuallo: tales enim ſunt recta linea alteri aſymptoton æquidiſtans, & Hyperbolen ſecãs, vna cum eadem curua hyperbolica: tales item ſunt hyperbolæ ſimiles per eundem verticem ſimul adſcriptæ, prout in* 34. *&* 41. *Oſtendimus denique binas dari lineas ad eaſdem partes in infinitum productas, nunquam coeuntes, quæ ſimul, ac ſemel ſunt, & ad ſe propiùs accedentes, & inter ſe æquidiſtantes: quales ſunt demum, parabolæ congruentes per diuerſos vertices ſimul adſcriptæ, vti ex noſtra* 42. *eiuſque primo Coroll. iam ſatis patuit.*

THEO-

THEOR. XXVII. PROP. XXXXIX.

Si binæ Parabolæ, aut binæ concentricæ Hyperbolæ fuerint per diuersos vertices simul adscriptæ, ipsæ, vel ad neutram partem se vnquam secabunt, vel si ad alteram partem occurrant, occurrent quoque ad aliam, punctaque occursuum erunt extrema eiusdem communis applicatæ, ac in ijsdem occursibus se mutuò secabunt.

SInt duæ Parabolæ ABC, DEF, vel duæ concentricæ Hyperbolæ per diuersos vertices B, E simul adscriptæ. Dico primùm, si huiusmodi sectiones ad alteram partium, vt ad A nunquam conueniunt, ad aliam quoque C nunquam conuenire.



Nam sumpto in sectione DEF; ad partes C, quocunque puncto F, per ipsũ ordinatim applicetur recta CFGDA, quæ vtrinque producta, vtrique sectioni occurret (cùm ipsæ ob Hypotesim, sint sectiones in infinitam distantiam abeuntes ad inferiores partes) cumque in sectione ABC sit semi-applicata AG, æqualis GC, & in sectione DEF, semi-applicata DG, æqualis GF, sitque antecedens AG maior antecedente DG (cùm ad partes A nunquam couenìant) erit etiam consequens GC, maior consequenti GF, quare punctum F, sectionis DEF cadit intra ABC, & sic de reliquis. Quod primò, &c.

Si verò sectiones ad alteras partes, veluti ad A, & D conueniant vt in H, Dico ipsas ad alias quoque partes simul occurrere ad extrema puncta eiusdem applicatæ.

Nam, ducta per H communi applicata HI, ipsa producatur secans sectionem BC in L; & EF in M. Erit in sectione ABC semi-applicata HI æqualis IL, & in sectione DEF eadem HI æqualis IM; ergo IL, & IM æquales, ideoque sectionum puncta L, M in vnum conueniunt; Quare cum sectiones ABC, DEF non per vertices simul adscriptæ ad alteram partem occurrunt; occurrent quoque ad aliam, punctaque occursuum erunt extrema eiusdem communis applicatæ.

Quod autem in occursibus H, & L se mutuò secent, sic demonstratur. Nam si huiusmodi sectiones tangerent se mutuò in occursu H, ita vt sectionis, verbi gratia, ED partes HO, HN cadant totæ intra sectionem ABC: sumpto in altera ipsarum partium, vt puta OH, quolibet puncto D, & per ipsum ducta communi applicata ADGFG vtranque sectionem secans, erunt in sectione ABC rectæ AG, GC æquales, & in sectione DEF rectæ DG, GF itẽ æquales, sed est AG maior GD cum ponatur peripheria OH cadere intra BH, vnde & CG maior erit ipsa FG, hoc est punctum F cadet intra. Idemque demonstrabitur de quolibet alio extremo puncto cuiuscunque applicatæ inter O, & N, tùm supra, tùm infra occursum L: quare sectio DEF continget

ipsam

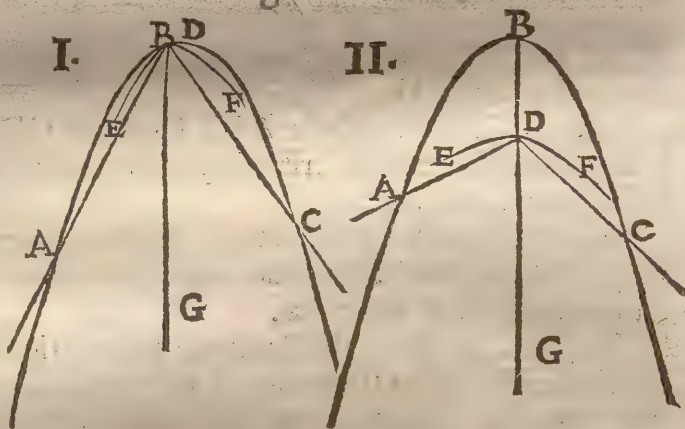
ipſam ABC in puncto L, ſed poſitum fuit eam quoque contingere in H: Ergo in duobus punctis H, L ſe contingent; quod eſt falſum; nam Parabole Parabolen, ſiue Hyperbole Hyperbolen concentricam *a* in duobus punctis non contingit. Non ergo tales ſectiones ſe tangunt in H; neque in L, ob eandem rationem; quare ipſæ in occurſibus H, & L ſe mutuò ſecant. Quod erat oſtendendum. *a* 28.31.4. conic.

THEOR. XXVIII. PROP. L.

Impoſſibile eſt Hyperbolen Parabolæ, per eundem, vel per diuerſos vertices inſcribere. Item.

Impoſſibile eſt Parabolen Hyperbolæ, per eundem, vel per diuerſos vertices circumſcribere.

ESto Parabole ABC, cui per punctum D in ea ſumptum, vt in prima figura, vel intra ipſam, vt in ſecunda, adſcripta ſit quæcunque Hyperbole EDF circa communem diametrum BDG, quæ per aliquas ſuæ peripheriæ partes DE, DF, hinc inde à diametro ſumptas cadat intra Parabolen ABC. Dico ipſam Hyperbolen, ſi producatur, ex vtraque parte Parabolen ſecare.



Nam ductis ex D rectis DA, DC vtrique aſymptoto Hyperbolæ EDF æquidiſtãtibus, hæ neceſſariò Parabolen ſecabunt, *a* vt in A, C; ſed cum Hyperbola in alio puncto quàm D nunquam *b* conuenient: quare, cum Hyperbola EDF ex vtraque parte in infinitum abeat, ſi producatur, occurret denique Parabolæ ABC inter puncta B, A, & puncta B, C; eamque ſecabit, nam ſi tantùm eam tangeret, vel non, ſi vlteriùs producatur intra Parabolen, ſecaret aliquandò rectas DA, DC; quod *c* eſt impoſſibile. Non igitur inſcribi vnquam poteſt Hyperbole datæ Parabolæ, per punctum in ea, vel intra ipſa datum; eadem ratione demonſtrabitur non poſſe circumſcribi Parabolen datæ Hyperbolæ per punctum in ea, vel extra ipſam datum. Quod erat, &c.

a 27. primi conic.

b Coroll. 11. huius.

c ibidem.

COROLL.

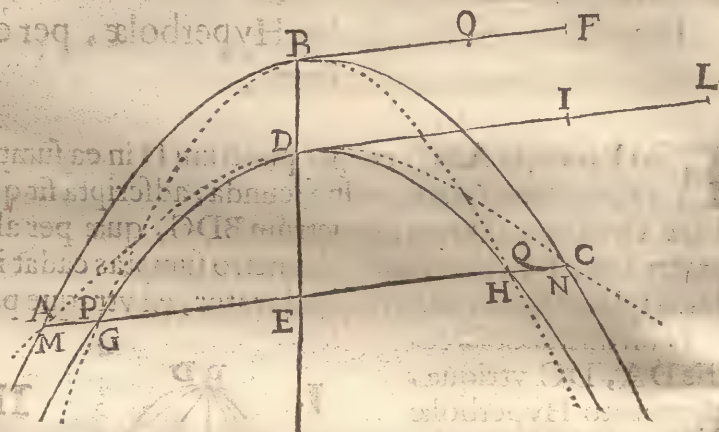
HInc patet non dari *MAXIMAM* Hyperbolen datæ Parabolæ, vel per eundem verticem, vel per diuerſos inſcriptibilem; itemque non dari *MINIMAM* Parabolen datæ Hyperbolæ, vel per eundem, vel per diuerſos vertices circumſcriptibilem.

PROBL. XVII. PROP. LI.

Datæ Parabolæ per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Parabolen inscribere, & è contra.

Datæ Parabolæ per punctum extra ipsam datum MINIMAM Parabolen circumscribere.

Sit data Parabole ABC, & oporteat primò per punctum D intra ipsam datum *MAXIMAM* Parabolen inscribere.



Ducatur diameter BDE, cuius rectum latus sit BF, (quod in posterùm intelligatur semper ex vertice cõtingenter applicatum sectioni, prout in præcedentibus factum est, & in quinta primarũ definitionũ monuimus) & per verticem D, circa diametrũ DE adscribatur [a] datæ Parabolæ ABC Parabole GDH, cuius rectum DI æquale sit recto BF; nam ipsa erit congruens datæ: Dico hanc esse *MAXIMAM* inscriptam quæsitam.

[a] 5. huius.

Nam cum ipsæ sint congruentes Parabolæ per diuersos vertices simul adscriptæ [b] erunt inter se nunquam coeuntes: quare GDH datæ ABC erit per datum punctum D inscripta.

[b] 42. h.

Ampliùs, quælibet alia Parabole per verticem D adscripta cum recto, quod minus sit ipso DI minor [c] est Parabola GDH, quæ verò cum recto DL, quod excedat ipsum DI, qualis est MDN, est quidem [d] maior GDH, sed omnino secat circumscriptam ABC. Nam si fiat vt LI ad ID, ita BD ad DE, & per E applicetur EMA secans BA in A, & DM in M. Cum sit BD ad DE, vt LI ad ID, erit componendo BE ad ED, vt LD ad DI; vnde rectangulum sub extremis BE, & DI, siue BF, hoc est [e] quadratum applicatæ AE in Parabola ABC, æquale erit rectangulo sub medijs ED, DL [f] siue quadrato applicatę ME in Parabola MDN, ac ideò AE, ME sunt æquales, quapropter Parabole DN occurrit sibi adscriptæ BA, per diuersos vertices in puncto M, & ob id in eodem occursu, & ad alteram quoque partem se mutuò [g] secabũt: Itaque congruens Parabole GDH erit *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò, &c.

[c] 2. Coroll. 19. h.
[d] ibidem.
[e] Coroll. 1. huius.
[f] ibidem.
[g] 50. h.

IAM datæ Parabolæ GDH, oporteat per punctum B extra ipsam datam *MINIMAM* Parabolen circumscribere.

Ducatur BDE diameter datę GDH, cuius rectum sit DI, & ei adscribatur per B, cum recto BF, quod æquet ipsum DI, congruens Parabole ABC:

Dico

Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

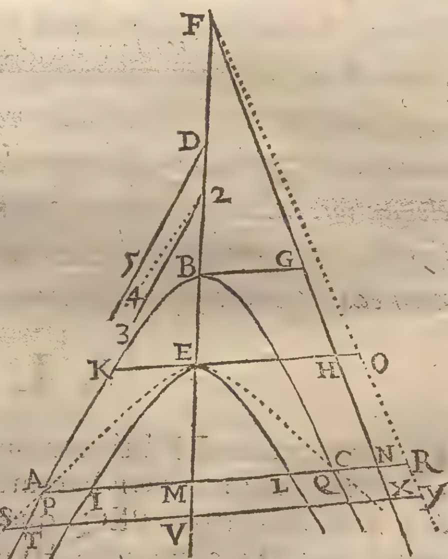
Cum sint enim ipsæ Parabolæ congruentes, & per diuersos vertices adscriptæ, erunt [a] inter se nunquam coeuntes quare ABC datæ GDH erit circumscripta. a 42. h.

Præterea, quælibet alia Parabole per B adscripta cum recto, quod excedat BF, maior est ipsa ABC, quę verò cum recto BO, quod minus sit ipso BF, qualis est PBQ, est quidem minor ipsa ABC, sed omnino secat inscriptam GDH. Quoniam si fiat vt FO ad OB, ita BD ad DE, ac per E applicetur EGP secans DG in G, & BP in P: cum sit BD ad DE, vt FO ad OB, erit componendo BE ad ED, vt FB ad BO; vnde rectangulum sub BE, & BO [b] siue quadratum applicatæ EP in Parabola PBQ æquale erit rectangulo sub medijs ED, & BF, siue DI, hoc [c] est quadrato applicatę EG in Parabola GDH: vnde EP, EG sunt æquales. Occurrit ergo Parabole BP, sibi adscriptæ DG per diuersos vertices, in puncto P, quare in eodem occursu, & ad alteram partem [d] se mutuò secant. Quapropter congruens Parabole ABC erit *MINIMA* circumscripta quæsita. b 1. Coroll. 1. h. c ibidem. d 50. h.

PROBL. XVIII. PROP. LII.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Hyperbolen inscribere, quarum eadem sit regula.

Esto data Hyperbole ABC, cuius centrum D; & punctum intra ipsam datum sit E. Oportet per E Hyperbolen inscribere, quæ sit *MAXIMA*, sed tamen eius regula sit quoque regula datæ sectionis.



Iungatur ED secans datā sectionem in B, & producta sumatur DF æqualis BD, erit [a] FB trāsuersum sectionis ABC, cuius vertex B, sitque BG eius rectum latus, & regula FG, quæ producatur, & per E sit ducta EH parallela ad BG, & per verticē E, circa communem diametrum BE, datę sectioni ABC [b] adscribatur Hyperbole IEL, cuius latera sint FE, EH, hoc est eadem sit regula FGH: patet ipsam IEL datæ ABC esse inscriptam, cum in infinitum productæ sint inter [c] se nunquam coeuntes. a 47. 1. conic. b 7. huius. c 45. h.

Dico amplius ipsam IEL esse *MAXIMAM*. Quoniam quęlibet alia adscripta per verticem E, cum eodem transuerso FE, sed cum recto, quod minus sit recto EH, minor [d] est ipsa IEL; quæ verò cum recto EO, quod excedat EH, qualis est Hyperbole PEQ, est quidem [e] maior ipsa IEL; sed omnino secat ipsam ABC. Nam si fiat vt OH ad HE, ita BE ad EM, & per M applicetur MPA Hyperbolen PEQ secans in P, BA verò in A; & producta secet regulam FH, in N, & iunctam regulam FO descriptæ Hyperbolæ PEQ in R. d 2. Coroll. 19. h. e ibidem.

Cum sit BE ad EM, vt OH ad HE, erit componendo BM ad ME, vt OE ad EH, vel vt RM ad MN; quapropter rectangulum BMN [a] siue quadratum applicatæ AM in Hyperbola ABC, æquale erit rectangulo EMR, [b] siue quadrato applicatę MP in Hyperbola PEQ; ac ideò lineæ MA, MP sunt æquales, quare Hyperbolæ ABC, PEQ occurrunt simul in puncto Q, in quo etiam se mutuò secabunt. Nã sumpto in sectione QEP infra P quolibet puncto S, per quod applicata STV, sectionem ABC, diametrum, ac regulas secans in T, V, X, Y: cum sit EM minor EV, habebit BE ad EM, vel OH ad HE, vel YX ad XV, maiorem rationem quam BE ad EV, & componendo YV ad VX maiorem rationem, quàm BV ad VE, vnde rectangulum YVE, [c] siue quadratum VS in Hyperbola EAS, [d] maius erit rectangulo XVB, [e] siue quadrato VT in Hyperbola ABC: vnde punctum S cadit extra Hyperbolen ABC, ac ideò ipsæ Hyperbolæ se mutuò secant, sicuti in altero extremo Q, eiusdem applicatæ. Erit ergo Hyperbole IEL, quæ datæ ABC similis est, & ad eandem regulam, *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod erat, &c.

a Coroll. 1. huius.
b ibidem.
c Coroll. 1. huius.
d 16. sept. Pappi.
e Coroll. 1. huius.

Verùm cum ad inuestigationem MAXIMAE, & MINIMAE inscriptæ, ac circumscriptæ sectionis, nil referat ignorare quo nam in puncto, maior, vel minor quæsitarum sectionum, datæ sectioni occurrat, (sufficit enim ostendere ipsas, vbicunq; sit earum occursus, aliquando se mutuò secare) ideo in proximè sequentibus problematibus, hac omissa methodo per applicatarum potentias, tanquam prolixiori, & minus concinna, hoc ipsum aliter elegantiori industria demonstrabimus, & licet id pluribus, ac varijs aggressionibus consequi possit, vt in hac, & proxima propositione videre licet, tamen eas eligemus, quæ apportunæ magis nobis videbuntur.

ALITER.

SEcetur igitur EF bifariam in 2, erit 2 centrum Hyperbolarum IEL, PEQ, ex quo ductis harum asumptotis, videlicet 2 3 inscriptæ IEL, & 2 4 circumscriptæ PEQ, quæ cadet [a] extra asymptoton 2 3, ex D quoque agatur D 5 asymptotos Hyperbolæ ABC.

Iam cum Hyperbolæ ABC, IEL similes sint, per diuersos vertices, & ad eandem regulam FGH simul adscriptæ, erunt earum asymptoti D 5, 2 3 inter [b] se parallelæ, sed 2 4 inter ipsas cadit, & alteram 2 3 secat in 2, quare ipsa 2 4 producta ad partes 4, secabit & reliquam D 5; sed est 2 4 asymptotos sectionis SPEQ, & quædam recta D 5 occurrit ei, ac sectionis diame-

a Ex vltima parte 37. huius.
b Coroll. 45. huius.

diametro vltra centrum 2 in D, quare si eadem D 5 producatur, necessariò [a] secabit Hyperbolen SPEQ, sed ipsa D 5 tota cadit extra Hyperbolen ABC, cum sit eius asymptotos, quapropter occursus rectæ D 5 cum Hyperbola SPEQ fiet extra ABC, ideoque sectio EP secabit priùs Hyperbolen ABC, & sic Hyperbole IEL erit *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod faciendum, ac demonstrandum erat. [a] 35. h.

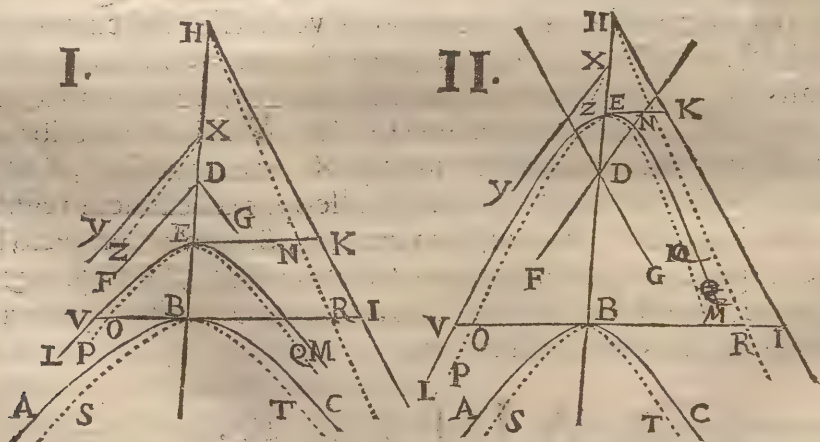
ALITER breuiùs.

PRoducatur contingens HE vsque ad circumscriptã sectionem ABC in K. Cum Hyperbolę ABC, IEL similes sint per diuersos vertices, & ad eandem regulam simul adscriptæ [b] erunt infra EK ad se propiùs accedentes, nimirum sectio KAT recedet ab EI per interuallum minus ipso EK; Verùm cum Hyperbolę PEQ, IEL sint concentricæ, & per eundem verticem simul adscriptæ, erunt semper magis recedentes, & ad interuallũ peruenient maius quocunq; dato interuallo, videlicet sectio EPS recedet ab eadem EI per interuallũ omnino maius eodẽ EK: quapropter sectiones KAT, EPS necessariò se mutuò secabunt: Vnde Hyperbole IEL erit *MAXIMA* inscripta quæsita. [b] 45. h. * 37. h.

PROBL. XIX. PROP. LIII.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum MINIMAM Hyperbolen circumscribere, quarum eadem sit regula.

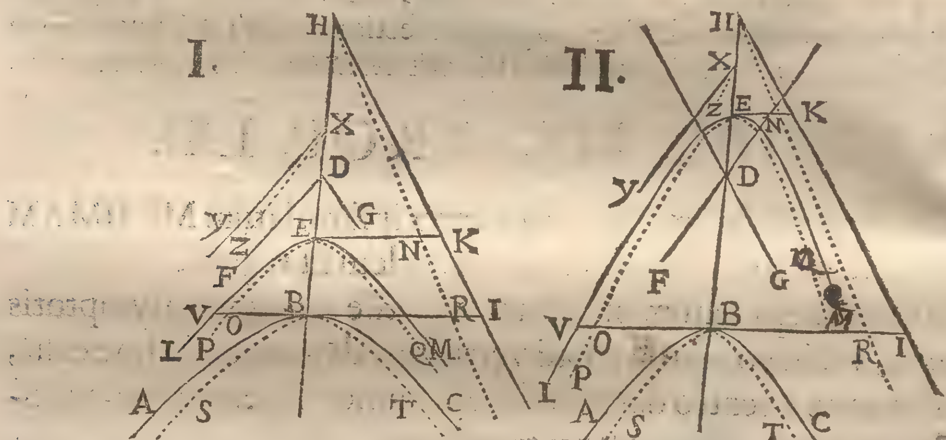
Oportet autem datum punctum, vel esse in angulo asymptotis contento, vel in eo, quod est ad verticem, dummodo in hoc casu, ipsius distantia à centro datæ sectionis, minor sit eius semi-transuerso latere per datum punctum transeunte.



ESto data Hyperbole ABC, cuius centrum D, asymptoti DF, DG, & datum extra ipsam punctum sit E, quod tamen sit in angulo asymptotali FDG, vt in prima figura; vel in eò qui ipsi est ad verticem, vt in secunda, dummodo coniuncta ED, & producta vsque ad sectionem in B, ipsa ED minor

nor sit semi-transuerso DB: (si enim datum punctum esset in angulis, qui deinceps sunt, recta linea per ipsum datum punctum, & centrum sectionis
a Monit. post 11. h. ducta non esset eius diameter, cum nunquam sectioni [a] occurreret, ac ideò problema, iuxta quintam secundarum definitionum insolubile esset: & cum fuerit in angulo ad verticem, vt in secunda, nisi distantia ED minor sit semi-transuerso DB, Hyperbole ad regulam datæ adscribi minimè posset, vt satis patet) oportet per E *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere, cuius regula eadem sit cum regula datæ sectionis.

Iungatur ED, & ad partes sectionis producatur donec ei occurrat in B,
b 47. primi conic. sumptaq; in directum DH æquali DB, erit HB transuersum [b] sectionis ABC, cuius vertex B: sit ergo BI eius rectum latus, & regula HI; sitque EK æquidistans BI, & per verticem B, cum transuerso EH, & recto EK, siue ad eandem regulam HI adscribatur Hyperbole LEM: patet ipsam datæ ABC esse
c 45. h. inscriptam, cum simul [c] sint nunquam coeuntes.



Dico ampliùs ipsam LEM esse *MINIMAM* quæsitam. Quoniam quælibet alia adscripta per verticem E, cum eodem verso HE, sed cum recto, quod
d 2. Coroll. 19. h. excedat EK, maior [d] est ipsa LEM; quæ verò cum recto EN, quod minus sit
e ibidem. EK, qualis OEQ, est quidem [e] minor eadem LEM, sed omnino secat ipsam ABC. Nam ad productam regulam HN, secante BI in R adscribatur per B
f ibidem. Hyperbole SBT; hæc tota cadet [f] intra ABC, eruntque SBT, OEQ duæ similes Hyperbolæ per diuersos vertices adscriptæ ad eandem regulam HR, estque ABC ipsi SBT, per eundem verticem, & cum maiori recto latere BI
g 52. h. adscripta, quare per præcedentem [g] sectiones ABC, OEQ se mutuò secabunt: Vnde Hyperbole LEM est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod faciendum, & demonstrandum erat.

ALITER.

SEcetur EH bifariam in X: erit X centrum vtriusque LEM, OEQ: si ergo ex centris X, D; ducantur XY, XZ, DF sectionum LEM, OEQ, ABC
h Ex vltima parte 37. huius. asymptoti, hoc est XY circumscriptæ LEM; XZ inscriptæ OEQ, quæ infra XY [h] cadet; & DF sectionis ABC, quæ ipsi XY æquidistabit; cum XZ secet

XY in

XY in X, producta secabit etiam DF asymptoton ABC, ac ipsam quoque sectionem ABC, [a] sed XZ tota cadit extra OEQ, cum sit eius asymptotos, quare occursus rectæ XZ cum sectione ABC cadet extra OEQ, ac ideò sectio ABC occurret priùs sectioni OEQ. Quapropter Hyperbole LEM est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod, &c. a 35. h.

ALITER breuiùs.

PRoducatur contingens IB vsq; ad circumscriptam sectionem in V. Cum sectiones BA, EL similes, & ad eandem regulam HI, infra BV ad se propiùs [b] accedant sectio BA recedet ab VL per interuallum aliquando minùs BV, sed inscripta OP recedit ab eadem VL per interuallũ maius eodem BV, cum sint semper magis recedẽtes, & [c] ad interuallum perueniant maius quolibet dato interuallo: quare BA, & OP omnino se mutuò secabũt. Quod iterum erat, &c.

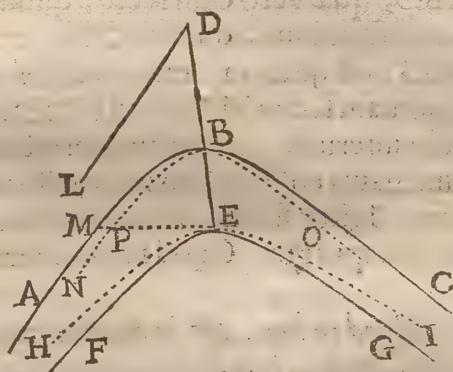
b 45. h.
c 37. h.

PROBL. XX. PROP. LIV.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM sibi concentricam Hyperbolen inscribere, & è contra.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum MINIMAM sibi concentricam Hyperbolen circumscribere. Oportet autem datum punctum esse in angulo asymptotali.

ESto data Hyperbole ABC, cuius centrum D, asymptotos DL, & punctum intra sectionem datum sit E: oportet primò per E *MAXIMAM* ei concentricam Hyperbolen inscribere.



Iungatur ED secans ABC in B: erit DB [a] semi-transuersum sectionis ABC, cui per E [b] cum semi transuerso ED adscribatur similis, & concentrica Hyperbole FEG, (hoc autem fieri posse manifestum est: nam sectionis FEG datur eius asymptotos DL, cùm similes concentricæ Hyperbolæ per diuersos vertices adscriptæ [c] habeant communem asymptoton, & cum datur transuersum latus, & asymptotos datur quoque rectum) patet hãc sectionẽ FEG datæ ABC esse inscriptam, cum sint [d] nunquã simul coeuntes.

a 47. primi conic.
b 7. huius.
c Coroll. 47. huius.
d 47. h.

Dico ampliùs hanc ipsam FEG esse *MAXIMAM* quæsitam: quoniam quælibet alia per E verticem adscripta ipsi ABC, vel FEG minor [e] est ipsa FEG; quælibet, verò cum recto, quod prædictum excedat, qualis est HEI, est quidem [f] maior eadem FEG, sed omnino secat circumscriptam ABC. Nam cum Hyperbolæ FEG, HEI sint concentricæ, & per eundem verticem E simul adscriptæ, sitque DL asymptotos inscriptæ FEG, ipsa secabit circum-

e 2. Coroll. 19. h.
f ibidem.

scri-

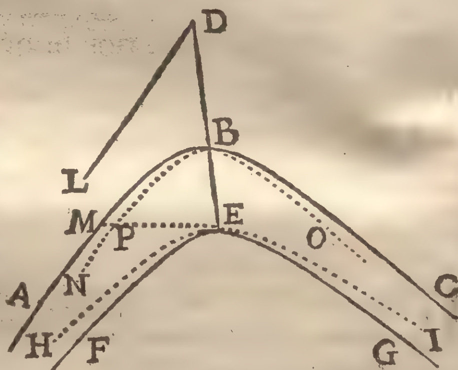
a 37.h. scriptam [a] HEL, sed eadem DL est asymptotos ABC, siue tota cadit extra ABC, quare DL, & sectio EH secabunt se mutuò extra sectionem BA, quapropter EH secabit priùs sectionem BA: ex quo similis, & concentrica Hyperbole FEG erit *MAXIMA* quæsita: Quod primò faciendum, & demonstrandum erat.

ALITER breuiùs.

b 47.h. DVcatur ex E contingens EM. Sectio MA accedit [b] sectioni EF per interuallum minus quolibet dato interuallo; at sectio EH quæ cadit extra EF, [c] recedit ab eadem EF per interuallum maius eodem dato interuallo; quare MA, & EH necessariò se mutuò secant: Vnde FEG est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod iterum, &c.

c 37.h.

IAM sit data Hyperbole FEG, cuius centrum G, asymptotos DL, & oporteat per datum extra ipsam punctum B (quod tamen sit in angulo asymptotali, ob rationem in præcedenti propos. allatam) *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.



Iungatur DB, & producatur sectioni FEG occurrens in E, & cum semi-transuerso BD, per verticem B, adscribatur similis, & concentrica Hyperbole ABC: patet hanc esse datæ FEG circumscriptã, cum nunquam [d] simul conueniant.

d 47.h.

Dico præterea ipsam esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam quæcunque alia adscripta per B ipsi FEG, vel ipsi ABC concentrica, cum recto, quod maius sit recto sectionis ABC, maior [e] est ipsa ABC, quæ verò cum recto, quod prædicto sit minus, qualis est Hyperbole NBO, est quidem [f] minor eadem ABC, sed omnino secat inscriptam FEG. Quoniam sectio MA accedit [g] sectioni EF per interuallum minus quolibet dato interuallo; sed sectio PN est intra MA, & ab ipsa [h] recedit per interuallum maius eodem dato interuallo; quare PN, & EF necessariò se mutuò secant. Igitur similis, & concentrica Hyperbole ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum erat.

e 2. Coroll. 19.h.

f ibidem.

g 47.h.

h 37.h.

Quod in hac, & in duabus præcedentibus factum est, idem simul, ac vniuersaliùs habebitur in sequenti.



PRO-

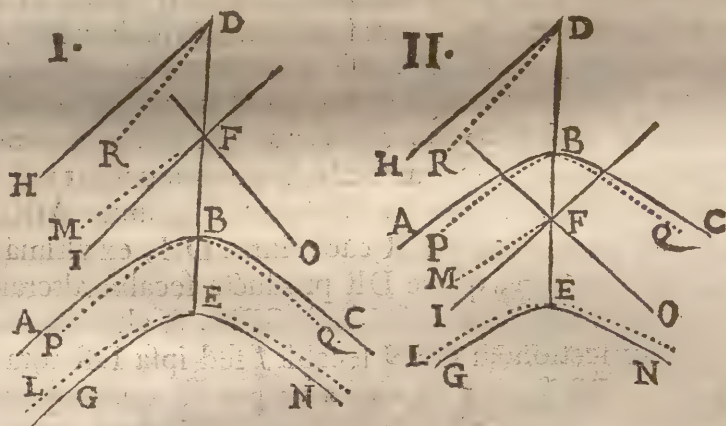
PROBL. XXI. PROP. LV.

Datæ Hyperbolæ, per punctum intra ipsam datum, cum dato semi-transuerso latere, quod tamen non excedat distantiam inter datum punctum, & datæ sectionis centrum, MAXIMAM Hyperbolen inscribere: & è contra.

Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum, cum dato semi-transuerso latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

Oportet autem datum punctum, vel esse in angulo asymptotali, vel in eo, qui est ad verticem; & si in primò casu, necesse est, vt semi-transuersum excedat interuallum inter datum punctum, & centrum datæ sectionis: in secundò verò sit cuiuslibet longitudinis.

Esto Hyperbole ABC, cuius centrum D, & datum intra ipsam punctum sit E: oportet primò per E, cum dato semi-transuerso EF (quod sit minus interuallo ED) *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere.

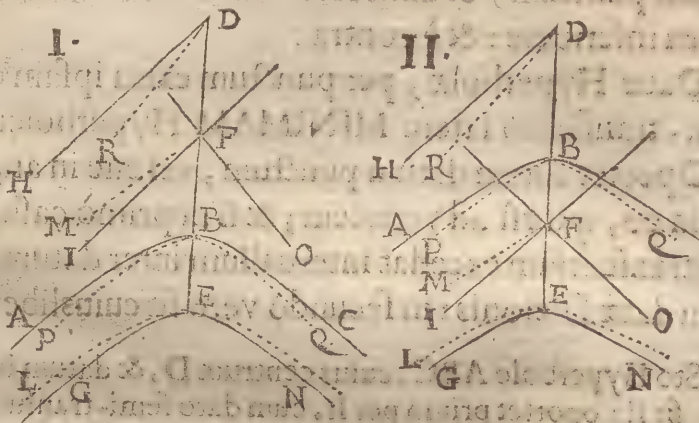


Iungatur ED secans ABC in B, & ex ipsa ED dematur EF æqualis dato semi-transuerso, & per verticem E, cum cētro F adscribatur sectioni [a] ABC Hyperbole EG similis datæ ABC; quæ (cum habeat centrum F, vel in ipso D, si nempe datum semi-transuersum EF æquale fuerit iunctæ ED, vel infra idem centrum D, si datum fuerit ipsa ED minus) erit [b] datæ Hyperbolæ ABC inscripta. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. a 6. huius. b 48. h.

Quoniam quælibet alia per verticem E, cum eodem transuerso EF adscripta, sed cum recto, quod sit minus recto sectionis EG, ipsa EG minor [c] est; quæ verò cum recto, quod ipsum excedat qualis est EL [d] est quidem maior eadem EG, sed omnino secat circumscriptam ABC. Nam ducta FI asymptoto sectionis EG, & FM sectionis EL, (quæ FM cadet extra EI, vt patet ex vltima parte 37. huius) ac DH sectionis ABC: erunt [e] DH, FI inter se parallelę, sed FM asymptotos EL producta secatur à DH, cum secetur quoque ab altera parallelarum in F, quare ipsa DH secabit [f] Hyperbolen EL; sed DH tota cadit extra ABC, cum sit eius asymptotos, ideò occursus rectę DH cum sectione EL, erit extra ipsam ABC, vnde EL necessariò secabit priùs circumscriptam ABC. Erit ergo EG *MAXIMA* inscripta quæsita, cum dato semi transuerso EF. Quod primò erat, &c. c 2. Coroll. 19. h. d ibidem. e 48. h. f 35. h.

IAM oporteat datæ Hyperbolæ GEN, cuius aſymptoti ſint FI, FO per datum extra ipſam punctum B (quod tamen ſit, vel in angulo aſymptotali IFO, vt in prima figura, vel in eo, qui ipſi eſt ad verticem, vt in ſecunda, ob id quod in 53. huius monuimus, cum dato ſemi-tranſuerſo latere BD (quod in primo caſu excedat diſtantiam BF, in ſecundo verò ſit cuiuslibet longitudinis) *MINIMAM* Hyperbolen circumſcribere.

Iungatur FB, quę protracta datæ ſectioni GEN occurrat in E, & producta EB ad partes oppoſitæ ſectionis, ſumatur BD æqualis dato ſemi-tranſuerſo; quę ex hypoteſi vtrobique cadet in angulo aſymptotali, ſiue



a 6. huius. b 48. h. vltra centrum F, & per verticem B, datæ Hyperbolæ GEN, adſcribatur a ſimilis Hyperbole ABC, cum ſemi-tranſuerſo dato BD, quæ ipſi GEN b erit circumſcripta; Dico hanc eſſe *MINIMAM* quæſitam. Quoniam quælibet

c 2. Coroll. 19. h. d ibidem. e 48. h. alia per B ei adſcripta cum recto, quod maius ſit eius recto latere, maior c eſt ipſa GEN, quæ verò cum recto, quod prædicto ſit minus, qualis eſt PBQ, eſt quidem d minor eadem GEN, ſed omnino ſecat inſcriptam GEN. Ductis enim DH, DR, FI, quæ ſint aſymptoti ſectionum ABC, PBQ, GEN: e erit DH ipſi FI parallela, & DR cadet infra DH, ex vltima parte 37. huius, ſed ei occurrit in H, quare DR producta ſecabit alteram parallelam FI, nempe aſymptoton ſectionis GEN, & vlterius producta, ipſam,

f 35. h. & ſectionem GEN ſecabit f ſed ipſa DR tota cadit extra PBQ, cum ſit eius aſymptotos, quapropter occurſus rectæ DR cum ſectione GEN cadet extra ſectionem PBQ, ac ideò inſcripta ſectio GEN, ſectionem PBQ prius ſecabit: vnde ABC erit *MINIMA* circumſcripta quęſita. Quod ſecundò faciendum, ac demonſtrandum erat.

* * *



PROBL. XXII. PROP. LVI.

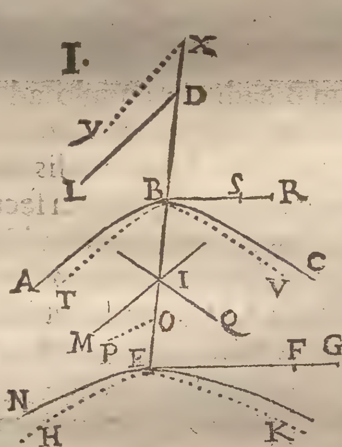
Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datũ, cum dato recto latere non excedente rectum Hyperbolæ, quæ similis sit, & concentrica datæ per datum punctum adscriptæ, MAXIMAM Hyperbolen inscribere: & è contra.

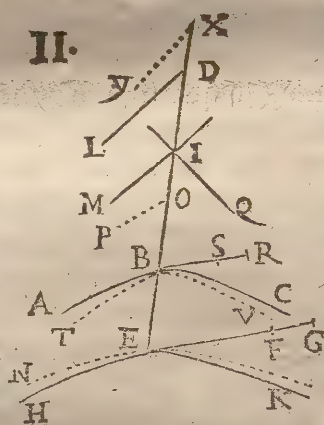
Datæ Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum, cum dato recto latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

Oportet autem datum punctum, vel esse in angulo asymptotali, vel in eo, qui est ad verticem, dummodo in primò casu datum rectum latus non sit minus recto eius Hyperbolæ, quæ similis sit, & concentrica datæ per datum punctum adscriptæ, in secundò verò sit cuiuslibet magnitudinis.

Sit data Hyperbole ABC, cuius centrum D, & datũ intra ipsam punctum sit E; oportet primò per E, cum dato recto EF *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere.

Iungatur ED secãs ABC in B, & per E concipiatur [a] adscribi Hyperbole EN similis, & concentrica datę ABC, cuius rectum sit EG, quod ex more, ordinatim applicetur diametro EB, & cum dato recto EF, quod non sit maius EG, adscribatur ipsi ABC similis Hyperbole HEK, cuius centrum sit I; erunt ergo Hyperbolæ EH, EN inter se similes, quare vt rectum EF, ad rectum EG, ita semi-transuersum EI ad semi-transuersum ED, & ponitur EF non maius EG, quare EI non maius erit ED, siue punctum I centrum sectionis EH, vel cadet in ipso D, vel infra D centrum ABC, quapropter ipsa EH datæ ABC erit [b] inscripta.



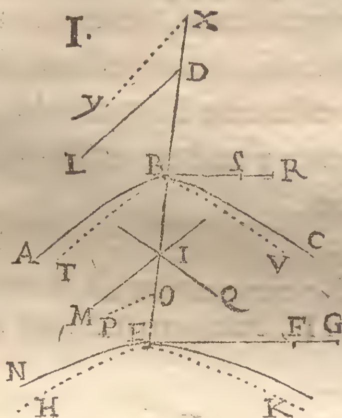


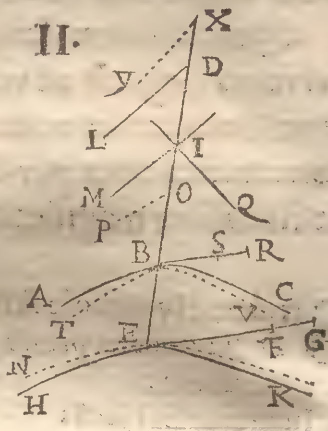
Ampliùs: dico ipsam EH esse *MAXIMAM* quæsitam. Nam quælibet alia per E adscripta, cum eodem recto EF, sed cum semi-transuerso, quod maius sit ipso EI, est [c] minor sectione EH, quæ verò cum eodem recto EF, at cum semi-transuerso EO, quod minus sit EI, qualis ponatur esse sectio EN, est quidem [d] maior eadem EH, sed omnino secat datam ABC: quoniam ductis DL, IM asymptotis sectionum ABC, EH, ipsæ erunt [e] inter se parallelæ: ductaque OP asymptoto sectionis EN, ipsa OP secabit IM infra [f] contingentem, ex communi sectionum vertice E, & producta alteri æquidistanti DL occur-

a 6. huius.
b 48. h.
c 3. Coroll. 19. h.
d ibidem.
e 48. h.
f Corol. 36. huius.

a 35. h. occurret, si ergo ipsa DL producatur, omnino secabit a Hyperbolen EN, sed DL tota cadit extra sectionem ABC, cum sit eius asymptotos, quare occursus rectæ DL, cum sectione EN, cadet extra ABC, ac ideò EN secabit priùs circumscriptam ABC: vnde sectio HEK est *MAXIMA* inscripta quæsita, cum dato recto EF. Quod primò erat, &c.

IAM oporteat datæ Hyperbolę HEK, cuius asymptoti IM, IQ, per datum extra ipsam punctum B, quod (per ea, quæ in 53. huius) sit vel in angulo ad verticem asymptotalis, vt in prima figura, vel in ipso asymptotali MIQ, vt in secunda, cum dato recto latere *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.





Iungatur BI, & producatur vsque occurrat datæ sectioni HEK in E; erit IE, ipsius semi-transuersum, cuius rectum latus sit EF, & ex B cõcipiatur adscribi Hyperbole TBV similis, & concentrica datæ HEK, cuius rectum sit BS; & datũ rectum BR, in casu primæ figuræ (in quo datum punctum B cadit in angulo ad verticem asymptotalis MIQ) sit cuiuslibet longitudinis; in secundo verò non sit minus BS, & per B cum recto BR adscribatur Hyperbole ABC similis datæ HEK, quæ item similis erit TBV, & sit eius centrum D: erit ergo in secunda figura, ob Hyperbolarum ABC, TBV similitudinem, rectum BR ad BS vt semi-transuersum BD ad semi-transuersum BI, estq; BR non minus BS, quare BD erit non minus

b 18. h. BD; ex quo centrum D sectionis ABC, vel cadet in I, vel supra I centrum similis sectionis HEK: vnde ipsa ABC erit b omnino datæ HEK circumscripta.

Dico tandem ipsam ABC esse *MINIMAM* quæsitam: Quoniam alia Hyperbole, quæ per B adscribitur, cum eodem recto BR, sed cum semi-trans-

c 3. Coroll. 19. huius. uerso, quod minus sit BD, est c maior ipsa ABC; quæ verò cum eodem recto BR, & cum semi-transuerso BX, quod excedat BD, qualis dicatur esse

d ibidem. sectio TBV, est quidem d minor eadem ABC, sed omnino secat datã KEH. Ductis enim similium Hyperbolarum ABC, HEK asymptotis DL, IM; ipsę erunt inter se parallelæ; ductaque XY asymptoto sectionis TBV; cum sint Hyperbole ABC, TBV per eundem verticem B adscriptæ, cum eodem recto BR earum asymptoti DL, XY infra contingentem ex vertice B se mutuò

e Coroll. 36. huius. secabunt, e & cum XY secet DL, & alteram huic æquidistantem IM secabit;

f 35. h. sed est IM asymptotos HEK, vnde XY producta f secabit quidem HEK, at XY tota cadit extra TBV, cũ sit eius asymptotos; quare XY conueniet cum sectione HEK, extra Hyperbolen TBV, vnde ipsa TBV secabit priùs inscriptam sectionem HEK. Quapropter sectio ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita: cum dato recto BR. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

C O-

COROLL. I.

EX quinque proximè præcedentibus problematibus satis constat, *MAXIMAM*, vel *MINIMAM* Hyperbolen, inscriptam, vel circumscriptam cuilibet datæ per punctum intra, vel extra Hyperbolen datũ in locis possibilibus, ad eandem regulam, aut concentricè adscriptam, vel cuius centrum pro inscripta cadat infra centrum datæ, & pro circumscripta cadat vltra, semper eidem datæ Hyperbolæ similem esse.

COROLL. II.

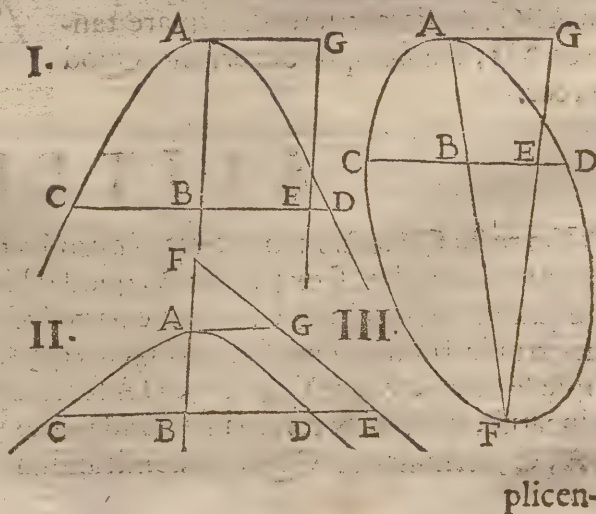
PAtet quoque, *MAXIMAM* Hyperbolarum datæ Hyperbolæ similium, per datum intra ipsam punctum inscriptarum, esse concentricam, cum hæc, inter similes, sit *MAXIMORVM* laterum. Item *MINIMAM* Hyperbolarum datæ Hyperbolæ similium per datum extra ipsam punctum in angulo asymptotali, circumscriptarum, esse pariter concentricam; cum eadem, inter similes, sit *MINIMORVM* laterum.

PROBL. XXIII. PROP. LVII.

Datis magnitudine, & positione cuiuslibet coni-sectionis diametri segmento, & vna applicatarum, & pro Hyperbola, & Ellipsi dato etiam transuerso latere; imperatam coni-sectionem describere.

SIt in qualibet figura, pro quacunque coni-sectione, datum magnitudine, & positione diametri segmentum AB, & vna applicatarum CD, & pro Hyperbola, & Ellipsi in secunda, & tertia, datum sit quoque rectum latus AF, quod pro Hyperbola in secunda vltra BA ipsi in directum ponatur, & in tertia, ex A ad partes B: oportet circa diametrum AB, super applicatam CD, quæsitam coni-sectionem describere.

Fiat in singulis figuris, vt AB ad BC, ita BC ad BE ipsi BC in directum posita, & per E, in prima figura, ducta EG parallela ad BA, vel in secunda, & tertia iuncta FE, occurrat AG, (quæ ipsi CD æquidistet) in G, & per verticem A cum data diametro AB, datisque lateribus AF, AG describatur [a] quæsiti nominis sectio CAD, cuius ordinatim ductæ ad angulum ABD ap-



[a] 5. 6. 7. huius.

plicen-

plicentur. Dico ipsam esse quæsitam. Cum enim sit CB media proportionalis inter altitudinem BA, & latitudinem BE, erit a BC, itemque ei æqualis BD, descriptæ sectionis semi-applicata, nempe sectio per C, & D omnino transibit; estque A vertex, AB diameter, & AF transuersum Hyperbolę, aut Ellipsis, ex constructione: quare factum est quod erat propositum.

a Coroll. prop. 1.h.

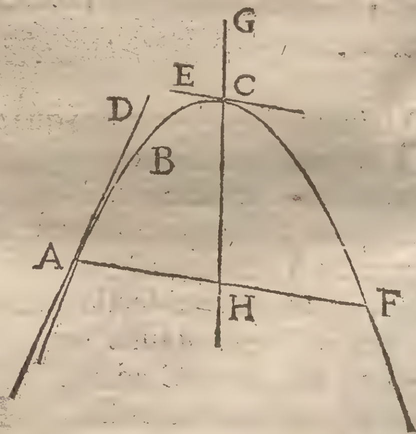
COROLL.

Ex hac constat quomodo, magnitudine, & positione datis transuerso latere, aut diametro AF, & vna applicatarum CD, per terminos, A, C, F, D, Ellipsis describi possit.

THEOR. XXIX. PROP. LIIX.

Si coni-sectionem, vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant, ipsæ productæ conuenient simul extra sectionem; sed in Parabola, vel Hyperbola sibi ipsis occurrent ad partes peripheriæ à contactibus terminatę: In Ellipsi verò ad partes sui ipsius portionis à linea tactus iungente abscissæ, in qua centrum nõ reperitur.

Esto Parabole, vel Hyperbole ABC (nam de circulo, & Ellipsi id ab Apollonio ostensum fuit in vigesima septima secũdi conicorum) quàm in punctis A, C tangant rectæ AD, CE. Dico, si producantur ad partes sectionis ABC à contactibus A, C terminatæ ipsas inter se conuenire.



Si enim per alterum contactuum, vt per C, intelligatur sectionis diameter HCG, certum b est contingentem AD, si producatur, cum diametro HG extra sectionem conuenire, hoc est ad partes G; si ergo AD secat CG, necessariò secabit priùs tangentem CE, quæ cadit inter sectionis peripheriam ABC, & diametrum HC: quare tangentes AD, CE sibi ipsis occurrunt. Quod erat, &c.

b 24. 25. pr. conic.

ALITER.

Cum recta CE sectioni occurrat, & producta ex vtraque parte extra sectionem cadat, si ex puncto A, quod est in sectione, ducta sit AF, ipsi EC æquidistans, producta ex vtraque parte sectioni c occurret; sed AD tota cadit extra sectionem, cum sit contingens; quare AD non congruit cum AF, sed ipsę se mutuò secant. Cum ergo DA secet alteram æquidistantium AF, si producatur, secabit, & reliquam CE ad partes peripheriæ ABC à contactibus A, C, terminatæ. Quod demonstrandum erat.

c 18. primi conic.

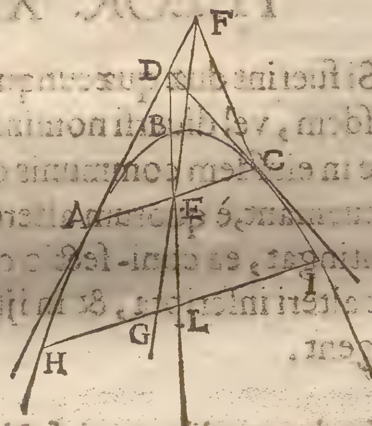
THEO-

THEOR. XXX. PROP. LIX.

Si coni-ſectionem, vel circuli circumferentiam recta linea contingat conueniens cum diametro, cui à tactu ſit ordinatim applicata vſque ad ſectionem, recta linea iungens alterum terminum applicatæ, & occurſum tangentis cum diametro, erit eidem ſectioni, ad alteram diametri partem contingens.

SIt coni-ſectio quæcunque, vel circuli circumferentia ABC, cuius diameter ſit DE, & ſit quæpiam AD ſectionem contingens in A, diametro occurrens in D, & ex contactu A ducta ſit in ſectione diametro DE ordinatim applicata AC, dico iunctam DC ſectionem quoque contingere.

Si enim poſſibile eſt, quæ ex C ducitur contingens, non ſit CD, ſed alia CF, quæ cum tangente AD *a* conueniet, ſed in alio puncto quàm D, vt in F. *a 58. h.*



Iam cum FA, FC ſectionem contingant, & per contactus ducta ſit AC, quæ bifariam ſecta eſt à diametro DE in E, ſi iungatur FEG ipſa *b* erit ſectionis diameter, hoc eſt bifariam ſecabit quamlibet aliã HI ipſi AC æquidiſtanter ductam, vt in G, ſed DEL quoque bifariam ſecat eandem HI in L, cum DEL ſit diameter, per hypoteſim; ergo eadem recta HI in duobus diuerſis punctis G, & L bifariam diuiditur: quod eſt abſurdum. Non eſt ergo ex C alia contingens linea quàm CD. Quod erat, &c. *b 29. ſecundi conic.*

Cum Propoſitionum 13. ac 14. ſept. Pappi, in hac noſtra tractatione frequens ſit vſus, liceat hoc loco eas transferre, vtranque ſimul ſequenti Theoremate demonſtrare.

THEOR. XXXI. PROP. LX.

Rectangulorum ſub partibus datæ rectę terminatæ MAXIMVM eſt id, quod ab æqualibus ſegmentis producitur; reliquorum verò id, quod fit à partibus minus inæqualibus, maius eſt eo, quod ab inæqualioribus continetur.

SIt data recta linea AB terminata bifariam ſecta in C, & non bifariam vtcunque in D, E, &c. Dico, &c.

Cum enim recta AB ſecta ſit bifariam in C, & non bifariam in D, erit quadratum AC, ſiue rectangulum ACB, æquale rectangulo ADB, vna cum

cum quadrato intermediæ partis DC; rectangulum ergo ACB superat rectangulum ADB; & hoc semper; ergo rectangulum ACB, sub æqualibus partibus compræhensum, est *MAXIMVM*. Quod primò, &c.

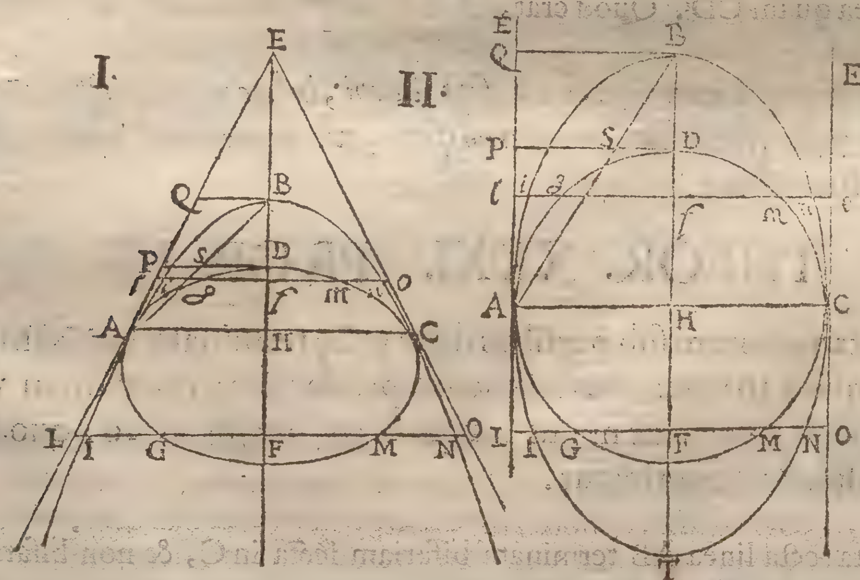
Item, quadrato dimidiæ A C æquatur rectangulum ADB, vna cum quadrato DC, & eidem quadrato AC æquatur rectangulum AED vna cum quadrato EC, ergo rectangulum ADC cum quadrato DC, æquale erit rectangulo AEB, cum quadrato EC, est autem quadratum DC minus quadrato EC, cum sit linea DC minor EC, ex hypotesi; ergo rectangulum ADC maius erit rectangulo AEB. Quod secundò, &c.

A E D C B

THEOR. XXXII. PROP. LXI.

Si fuerint duæ quæcunque coni-sectiones, non excepto circulo, eiusdem, vel diuersi nominis per diuersos vertices simul adscriptæ, quæ in eiusdem communis ordinatim ductæ extremis punctis simul conueniant, è quorum altero eadem recta linea vtranque sectionem contingat, ea coni-sectio cuius vertex cadit infra verticem alterius erit alteri inscripta, & in ijsdem tantùm applicatæ extremis se contingent.

Sint duæ quælibet coni-sectiones ABC, ADC non excepto circulo, eiusdem, vel diuersi nominis, per diuersos vertices B, D simul adscriptæ,



quarum communis diameter sit BH, communisq; applicata sit AC, in cuius extremis A, C, sectiones simul occurrant, & ex eorum altero veluti ex A

recta

recta AE vtranque sectionem contingat. Dico sectionem ADC, cuius vertex D est infra alterius verticem B, totam cadere intra sectionem ABC, hoc est ei esse inscriptam, & in extremis A, C, se mutuò contingere.

Nam producta AE vsque ad occursum cum diametro in E (si tamen applicata AC non fuerit diameter circuli, vel Ellipsis, vt in secunda figura, quo in casu contingentes AE, CE sibi ipsis, & coniugatæ diametro BT [a] æquidistabunt) iungatur ECO, quæ item vtranque sectionem [b] continget in C: & applicetur quæcunque LO. *lo* easdem sectiones secans in I, N, G, M. *i*, *n*, *g*, *m*, contingentes verò in L, O. *l*, *o*; ducanturque ex verticibus tangentes BQ, DP, quę ordinatim ductis æquidistabunt, & iungatur AB, secans DP in S.

[a] 27. sec. conic. & 6. eiusd.
[b] 59. h.

Iam cum sit AH æqualis HC, erit LF. *lf* æqualis FO. *fo*, estque IF. *if* æqualis FN. *fn*, & GF. *gf*, ipsi FM. *fm* (sunt enim sectionum semi-applicatæ) quare reliquæ LI. *li*, ON. *on*, æquales erunt, itemque LG. *lg*, OM. *om* inter se æquales, ideoque rectangulum OIL. *oil* æquabitur rectangulo NLI. *nli*, & rectangulum OGL. *ogl* rectangulo MLG. *mlg*. Et cum in sectione ABC sit [c] quadratum BQ ad quadratum QA, hoc est quadratum SP ad PA, vt rectangulum NLI. *nli* ad quadratum LA. *lA*, & in sectione ADC quadratum DP ad idem PA [d] sit vt rectangulum MLG. *mlg* ad idem quadratum LA. *lA*, habeatque quadratum SP ad PA minorem rationem quàm DP quadratum, ad idem quadratum PA, habebit quoque rectangulum NLI. *nli* ad quadratum LA. *lA* minorem rationem quàm rectangulum MLG. *mlg* ad idem quadratum LA. *lA*; quare rectangulum NLI. *nli*, hoc est OIL. *oil*, minus est rectangulo MLG. *mlg*, siue rectangulo OGL. *ogl*; vnde punctum I remotius [e] est ab ipso F quàm pũctum G. *g*, sed I. *i* est in ipsa sectione ABC; quare punctum G. *g* sectionis ADC cadet intra ABC, & sic de quolibet alio puncto sectionis SADCT, præter A, C; vnde ipsa ADC inscripta erit sectioni ABC, & in punctis tantùm A, C extremis eiusdem applicatæ se mutuò contingent. Quod erat demonstrandum.

[c] 16. tertij conic.
[d] ibidem.
[e] conuers. 60. h.

THEOR. XXXIII. PROP. LXII.

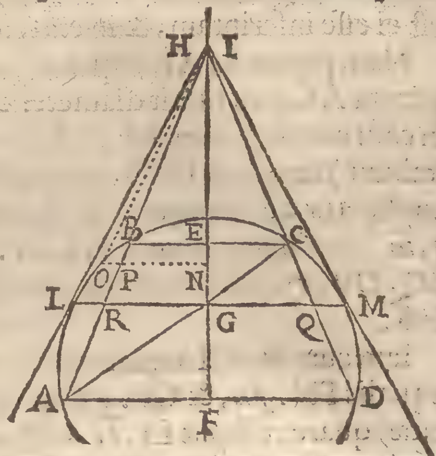
Si extrema inæqualium basium mensalis, cuiuscunque coni-sectionis, vel circuli, ad vtranque diametri partem rectis lineis iungantur, ipsæ simul, & in eodem diametri puncto conuenient, à quo, si ad terminos ordinatim ductæ per intersectionem diagonalis cum diametro, ducantur aliæ rectæ lineæ, hæ omnino sectionem contingent.

Sit mensalis coni-sectionis, vel circuli ABCD, cuius basis, AD maior, BC minor, diameter EF. Dico si iungantur AB, DC, ipsas cum diametro, & in eodem puncto conuenire, ac ducta diagonali AC secante diametrum in G, & applicata LGM, si per extrema puncta L, M, ad predictum occursum ducantur rectæ, ipsas sectionem contingere.

Cum sit enim AF maior BE, & ipsi parallela, occurret AB cum FE ad partes B, E, vt in H; itemq; DC cum eadem FE, vt in I, vtraque verò [a] extra sectio-

[a] 22. primi conic.

ctionem, & cum sit FH ad HE, vt FA ad EB, vel vt FD ad EC, vel vt FI ad IE, erit diuidendo FE ad EH, vt FE ad EI, quare EH, & EI sunt æquales hoc est productę AB, DC in eodem puncto H cum diametro conueniunt, & si sectio fuerit Hyperbolæ [a] infra angulum ab asymptotis factum; ideoque ex H duci poterunt Hyperbolen contingentes.



a 25. sec. conic.

Iam, si ductæ HL, HM sectionem non contingant, ducatur ex H contingens HO ad aliud punctũ quàm L, vt ad O, & per O applicetur OPN; erit [b] ergo AP ad PB, vt AH ad HB, sed AH ad HB, est vt AF ad BE, vel ad EC, vel vt FG ad GE (ob similitudinem triangulorum AFG, CEG) vel vt AR ad RB, ergo AP ad PB erit vt AR ad RB: quod est falsum. Non ergo contingens ex H ad aliud punctum peruenit quàm L, & sic non ad aliud quàm M. Quare iunctæ HL, HM sectionem contingunt. Quod erat, &c.

b 37. tertij conic.

SCHOLIVM.

HInc est, quod si circa diametrum rectilineæ, vel conicæ mensalis tanquam circa transuersum latus, & per extrema applicatæ, quæ per pũctum inter sectionis diagonalis eiusdem mensalis cum diametro, ordinatim ducitur, Ellipsis describatur, ipsa, mensalis latera in eiusdem applicatæ extremis omnino continget, nempe ei erit inscripta.

Nam pro rectilinea mensali ABCD, & pro ALBCMD coni-sectionis, vel circuli cuius basis AD, maior sit basi BC, ostendimus AH ad HB esse vt AR ad RB, ergo & FH ad HE erit vt FG ad GE, vnde Ellipsis, quæ describitur cum transuerso EF, & applicata RQ, vel LM à rectis HA, HD in [c] punctis R, Q, vel à rectis HL, HM in punctis L, M contingetur; sed ipsæ HL, HM, vti nuper ostendimus in ijsdem punctis sectionem quoque contingunt: quare huiusmodi Ellipsis, & mensalem rectilineam, & conicam ALBCMD [d] in ijsdem applicatæ extremis contiget, ac ipsi mensali, erit inscripta, cum etiam AD, BC ex diametri terminis F, E ordinatim ductis æquidistantes eandem Ellipsim contingant.

c 4. huius.

d 61. h.

At pro mensali coni-sectionis ALBCMD, si ipsa fuerit mensalis Elliptica, vel circularis, cuius opposita latera AD, BC sint æqualia, erunt quoque eorum dimidia AF, EC æqualia, ac ideo etiam FG æqualis GE, hoc est G centrũ erit Ellipsis, quæ per ELFM describitur cum transuerso EF; & applicata LM erit eius diameter coniugata. Vnde quæ per L, & M communi applicatæ EF vtriusque sectionis æquidistantes ducentur [e] vtranque sectionem contingent, quàm contingunt quoque applicatæ AD, DC: quapropter Ellipsis, quæ per E, L, F, Q describitur eidem mensali Ellipticæ, vel circulari [f] erit inscripta.

e 32. primi conic.

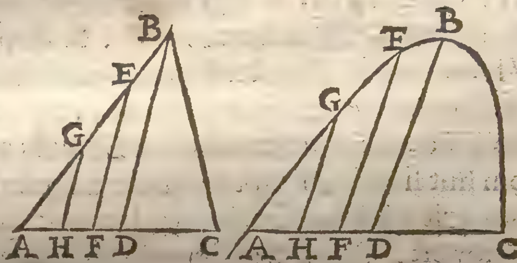
f 61. h.

THEO-

THEOR. XXXIV. PROP. LXIII.

In quacunque coni-ſectione, etiam in triangulo, MAXIMA diametro æquidiſtantium inter ſectionem, & quamcunque ordinatim applicatam interceptarum, eſt ipſa diameter; aliarum verò ea, quæ propinquior eſt diametro, maior eſt remotiori.

ESto triangulum, vt in prima figura, vel circuli, aut Ellipſis, vel Parabolæ, vel tandem Hyperbolæ portio ABC, vt in ſecunda, quarum diameter ſit BD, & ordinatim applicata ſit AC. ductiſque quotcunque EF, GH, &c. parallelis ad BD. Dico BD eſſe *MAXIMAM*, diametro reliquarum verò, propinquiorem EF, maiorem eſſe remotiori.



Nam ſi concipiatur ex B duci quædam linea ordinatim applicatæ AC æquidiſtans *a* quæ tota cadet extra ſectionem, iungique recta linea puncta E, B *b* quæ tota cadet intra, patet ipſam EB ad alteram partem productam (cum ſecet in B eam, quæ ducta ſit ex B parallela ad AC) conuenire quoque cum CA ad partes A, & ſic BD maiorem eſſe recta EF, ſiue omnium *MAXIMAM*. Quod primò, &c.

a 17. primi conic.

b 10. pri. conic. & 32. eiuſd.

Item ſi puncta G, E, iungantur recta linea *c* ipſa omnino cum diametro extra ſectionem conueniet, ac propterea ſecabit priùs eam, quæ ex B ducta ſit ipſi AC ęquidiſtans; cum ergo GE ſecet vnam parallelarum, ſecabit quoque, ſi producatur, alteram CA ad partes A, & ſic EF erit maior ipſa GH. Quod ſecundò, &c.

c 22. pri. conic. & 23. eiuſd.

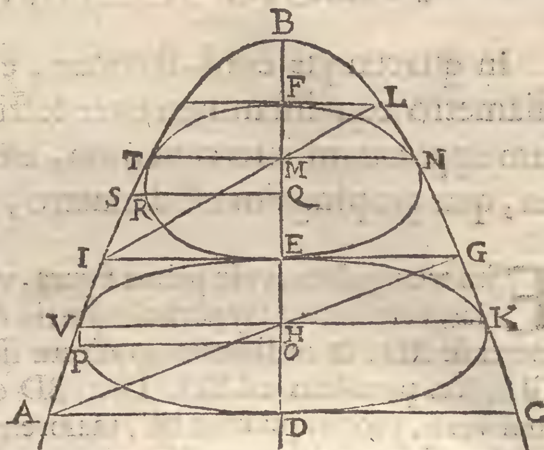
THEOR. XXXV. PROP. LXIV.

Ellipſium æqualium diametrorum, eidem angulo, vel Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut portioni Ellipticæ, vel circulari, quæ non ſit maior Ellipſis, vel circuli dimidio, inſcriptarum, ſe mutuò, ac ſectionem contingentium, quæ propior eſt vertici, minor eſt remotiori.

ESto ABC, vel angulus rectilineus, vel Parabole, vel Hyperbole, aut portio non maior dimidio ſemi-Ellipſis, vel ſemi-circuli, cuius vertex B, diameter BD, & circa æqualia ipſius ſegmenta DE, EF adſcriptæ ſint dato angulo, vel ſectioni Ellipſes DVE, ETF, ope diagonalium AG, IL, & applicatarum KHV, NMT, vt in præcedenti Scholio monuimus, quæ anguli latera, vel ſectionem contingent in K, V, N, T, eique erunt inſcriptæ, & ſe mutuò contingent in E (cum applicata LEG vtranque ſectionem contingat.)

 Dico

Dico Ellipsim ETF vertici B propiorem, minorem esse Ellipsi DVE ab ipso vertice remotiori.



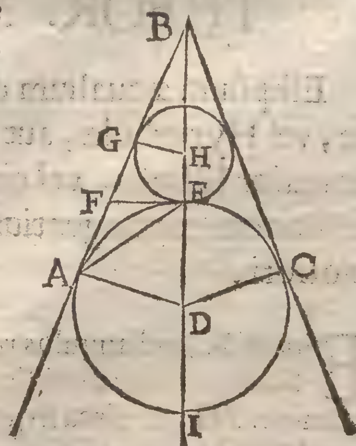
Applicata enim ADC; est DH ad HE, vt AD, ad EG, sed est a AD maior EG, quare & DH erit maior HE, eademq; ratione EM maior MF, vnde harum Ellipsiũ centra cadent infra H, & M, vt in O, & Q, ex quibus applicatis OP, QR Ellipsium semi-diametris coniugatis, productaque QR vsque ad sectionem in S, cum in Ellipsi DVE sit OP b maior HV, & in angulo, vel sectione ABC sit HV c maior QS, & QS maior QR, eò magis OP erit maior QR, & duplum duplo maius, hoc est Ellipsis DVE coniugata diameter, maior coniugata diametro Ellipsis ETF; sed trãsuersa latera ED, EF sunt æqualia, vnde & latus rectum Ellipsis DVE maius recto ETF, suntque huiusmodi Ellipses æqualiter inclinatæ cum eidem sectioni sint simul adscriptæ: quare Ellipsis DVE, maius habens rectum latus, maior erit d ETF minoris recti lateris, quę dati anguli, vel sectionis vertici propior est. Quod erat demonstrandum.

a 32. vel 63. huius.
b 63. h.
c 32. h.
d 2. Coroll. 19. h.

PROBL. XXIV. PROP. LXV.

Per datum punctum in axe dati anguli rectilinei MAXIMVM circulum inscribere: & è contra.

Sit datus angulus rectilineus ABC, cuius axis, siue linea ipsum bifariam secans sit BD, in quo datum sit punctum E, per quod oporteat *MAXIMVM* circulum inscribere.



Ducatur ex E super axim BD perpendicularis EF, cui infra F sumatur FA æqualis, & ex A erigatur AD perpendicularis ad BA, quæ axi occurret in D (cum angulus ABD sit omnino acutus, & BAD rectus, hoc est simul sumpti minores duobus rectis). Dico punctum D esse centrum quæsiti circuli. Nam iuncta AE; cum sint FA, FE inter se æquales, erunt anguli ad basim AE æquales, sed toti FED, FAD æquales sunt, cum sint recti, vnde reliqui DEA, DAE ęquales erũt, siue latus DE ipsi DA æqualis. Ductaque DC perpendiculari ad BC; in triangulis DBA, DBC sunt anguli ad B, & ad A, & C æquales inter se, & latus BD commune, ergo, & DC ipsi DA, siue DE, ęqualis erit: quapropter si cum centro D, interuallo DA circulus describatur, ipsæ per puncta E, & C transibit, eritque angulo ABC inscriptus, cum ob rectos angulos ad A, C ipsius

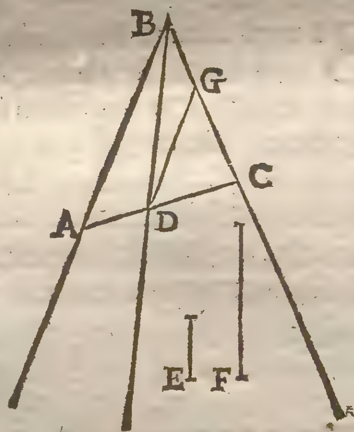
C ipsius latera BA, BC eum contingant; & erit *MAXIMVS*: Nam licet facta supra EF eadem penitùs, constructione nempe sumpta FG æquali ad FE, & ducta GH perpendiculari ad GA, ostendetur pariter H esse centrum alterius circuli dato angulo inscripti, sed is erit minor circulo ex DE, cum ob parallelas GH, AD, sit AB ad BG, vt DA ad HG, sed est AB maior BG, vnde radius DA erit maior radio HG, siue circulus AEC maior circulo ex HE. Iam quilibet alius circulus per E, dato angulo adscriptus, cuius diameter minor sit EI, minor est ipso AEC, & quilibet alius, cuius diameter sit maior ipsa EI, est quidem maior AEC, sed omnino secat dati anguli latera, cum hæc circulum contingant: ex quo circulus ex DE erit *MAXIMVS* inscriptus quæsitus. Quod erat primò, &c.

SI verò ad datum punctum B extra circulum AEC, cuius sit centrum D, sit ei circumscribendus *MINIMVS* angulus rectilineus; iam per se patet angulum ABC, à ductis contingentibus ex B, esse *MINIMVM* quæsitum. Quod vltimò faciendum, ac demonstrandum erat.

LEMMA VII. PROP. LXVI.

In dato angulo, à recta linea per verticem vtcunque secto, lineas applicare, quæ à prædicta diuidantur in data ratione.

SIt datus angulus ABC, vtcunque sectus à recta BD, punctum in eo sit D, ex quo oportet rectam, qualis est ADC, applicare ita vt ipsius partes AD, DC sint in data ratione, veluti E ad F.



Ducatur DG parallela ad alteram linearum, angulum continentium, vt ad AB; & fiat vt E ad F, ita BG ad GC, iungaturque CD, quæ cum BA conueniat in A. Dico factum esse, quod proponebatur.

Et enim, ob parallelas, vt AD ad DC, ita BG ad GC, vel E ad F. Quod, &c.

SCHOLIVM.

SI data ratio E ad F, fuerit ratio æqualitatis, tunc BD, licet præter morem, vocetur dati anguli diameter, & si bifariam, & ad rectos angulos ipsas applicatas secuerit, dicatur axis.



PRO-

PROBL. XXV. PROP. LXVII.

Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum MAXIMAM Parabolen inscribere: & è contra.

SIt datus angulus rectilineus ABC, & datum, intra ipsum, punctum sit D. Oportet per D *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

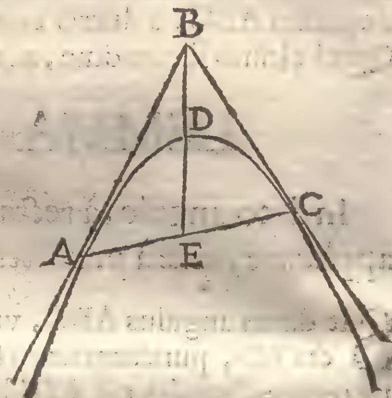
a 66. h. Sumatur DE æqualis DB, & per E in angulo ABC [a] applicetur, recta AEC, quæ à diametro AE sit bifariam secta in E, & per verticem D circa

b 57. h. diametrum ED, & applicatam AC magnitudine, & positione datam [b] describatur Parabole ADC. Dico ipsam esse quæsitam.

c 2. huius. Quoniam cum sint DE, DB æquales, rectæ AB, CB sectionem [c] contingent, vnde Parabole erit dato angulo inscripta; eritque *MAXIMA* quoniam quælibet Parabole per D ipsi ADC adscripta cum recto, quod eius recto sit minus

d 2. Coroll. 19. h. ipsa ADC [d] minor est, quælibet verò adscripta cum recto, quod prædictum excedat licet eadem

e ibidem. sit [e] maior, secat tamen latera dati anguli. Quare Parabole ADC est *MAXIMA*. Quod primò, &c.



SI verò data sit Parabole ADC, & extra ipsam datum sit pũctum B, per quod ei oporteat *MINIMVM* angulum rectilineum circumscribere. Ducta BE parabolæ diametro, & sumpta DE æquali DB applicataque AEC, iunctisque BA, BC. Erit angulus ABC *MINIMVS* quæsitus,

f 2. huius. vt satis perspicuè patet, Nam cum ipsæ BA, BC sectionem [f] contingant omnes aliæ ex B ductæ minorem angulum dato ABC adscriptum constituentes, sectionem secabunt, quare, &c. Quod vltimò, &c.

MONITVM.



Monendus hic Lector est, quod dum in hoc, & in sequentibus problematibus, dato angulo, per datum punctum adscribitur, vel inscribi, aut circumscribi proponitur, quæsita coni-sectio, vel circulus; & e contra, dum datæ coni-sectioni, vel circulo per datum punctum adscribitur, vel inscribitur, aut circumscribitur quæsitus angulus; id semper à nobis accipi intelligitur in eodem sensu quintæ secundarum definitionum huius, qua in præcedentibus hactenus vsi sumus; nempe lineam, quæ per datum punctum educta diameter est datæ, vel quæsitæ sectionis, esse quoque diametrum dati, vel quæsiti anguli, siue eius vertici occurrere; ita vt quæ in angulo ducuntur æquidistantes ordinatim applicatis coni-sectionis, vel circuli, sint quoque ab eadem sectionis diametro per

datum

datum punctum transeunte bifariam sectæ, quod à lineis ad anguli verticem non collimantibus consequi minimè posset. Si verò inscriptio, ac circumscriptio alijs conditionibus confici iubeatur, aliæ item definitiones, & constructiones diuersæ ad problematum solutiones requirerentur, quas omnes, licet nobis fortuitò datum sit Geometriæ legibus subijcere, temporis tamen angustijs obsequentes, hic ~~eas~~ omittere necesse fuit; sed aliàs forsan, Deo dante, si quid vnquam ocij nacti fuerimus, hanc ipsam de MAXIMIS, & MINIMIS doctrinam, & duplò, & triplò auctiorem denuò proferemus: Interim varijs stimulis, qui ad hæc edenda nos vrgent, obtemperantes, præsens argumentum absoluere properemus, vt citius (alteram huius tractationis partem aggrediendo) ad noua pariter, & apprimè iucunda in conicis accidentia deueniamus, & quod pluris est, præcipuè vtilitatis fundamenta iaciendo, abstrusionis doctrinæ mysteria perspicacioribus ingenijs aperiamus.

PROBL. XXVI. PROP. LXVIII.

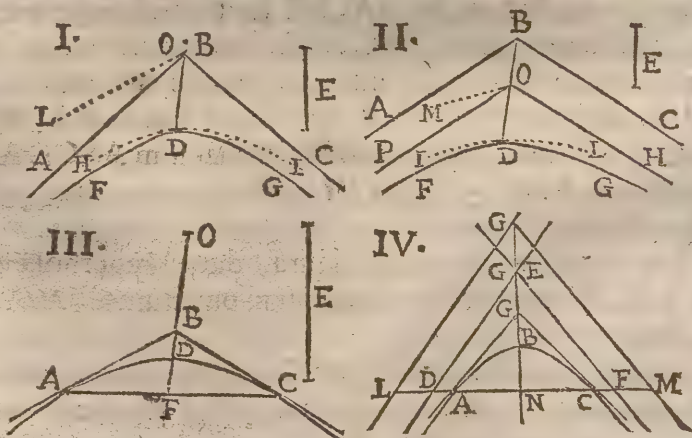
Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum, cum dato semi-transuerso latere, MAXIMAM Hyperbolen inscribere. Item,

Datę Hyperbolæ, per punctum extra ipsam datum, MINIMVM angulum rectilineum circumscribere.

Oportet autem, ad hoc vt anguli circumscriptio fiat iuxta allatam definitionem, ac præcedens monitum, datum punctum, vel esse in centro, vel intra angulos, ab asymptotis constitutos.

SIt, in tribus primis figuris, datus angulus rectilineus ABC, & datum intra ipsum punctum sit D: oportet per D *MAXIMAM* Hyperbolen inscribere, cuius semi-transuersum latus æquale sit dato E.

Iungatur DB, & secetur ex ipsa, DO ęqualis E. Iam, vel DO æqualis est DB, vt in prima figura, vel minor vt in secunda, vel maior vt in tertia. Si primùm, describatur [a] per D, cũ asymptotis BA, BC Hyperbole FDG: & ipsa erit *MAXIMA* quæsita.



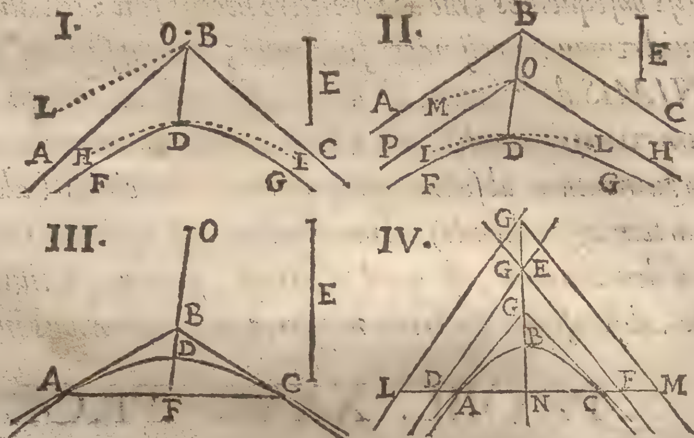
a 4. sec. conic.

Nam, quæ cum eodem transuerso, eidem angulo per D adscribitur, cum recto, quod minus sit

recto

a 2. Coroll. 19. h. *b* ibidem. *c* 37. h.

recto FDG, minor est *a* ipsa FDG, quæ verò cum recto maiori, est quidem maior *b* FDG, qualis est HDI, sed omnino secat latera dati anguli ABC: quoniam ducta BL asymptoto sectionis HDI, ipsa cadet *c* extra BA, sed BH est asymptotos inscriptæ FDG, quare ipsa BH producta secabit Hyperbolen circumscriptam DH, eadem ratione BC secabit DI: quapropter Hyperbole FDG est dato angulo *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod, &c.



Si verò data magnitudo E, vel ei æqualis DO, minor fuerit distantia DB inter datum punctum, & dati anguli ABC verticem, vt in secunda figura; ducantur ex O, rectæ OP, OH, asymptotis BA, BC æquidistantes, & intra asymptotos OP, OH describatur *d* per D Hyperbole FDG: & hæc erit *MAXIMA* inscripta quæsita.

d 4. sec. conic.

Quoniam, quæ cum eodem transuerso, sed cum recto minori adscribitur per D, minor est *e* FDG, quæ verò cum recto maiori, qualis est IDL, est quidem *f* maior, sed omnino secat latera dati anguli BA, BC; quoniam ducta OM asymptoto circumscriptæ IDL, cadet *g* extra OP asymptoton inscriptæ FDG, & producta secabit BA, cum secet in O alteram parallelam OP; quare BA producta secabit *h* quidem Hyperbolen DIL: vnde FDG est *MAXIMA* quæsita. Quod, &c.

e 2. Coroll. 19. h. *f* ibidem. *g* ex 37. h. *h* 35. h.

Si tandem DO, quæ ipsi E æqualis est, excedat DB. Fiat vt OB ad OD, ita OD ad OF, & per F applicetur *i* in angulo ABC ordinata AFC, & cũ semi-transuerso OD, per puncta A, D, C, describatur *l* Hyperbole ADC, circa diametri segmentum DF, & applicatam AC. Dico hanc esse *MAXIMAM* quęsitam.

i Schol. 66. h. *l* 57. h.

Quoniam, cum sit FO ad OD, vt DO ad OB, erit rectangulum FOB æquale quadrato OD, quare BA, BC Hyperbolen *m* contingent; siue Hyperbole ADC dato angulo ABC erit inscripta; eritque *MAXIMA*; quoniam, quæ cum recto minori *n* cadit intra, quæ verò cum maiori cadit quidem *o* extra ADC, sed necessariò secat dati anguli latera BA, BC, cum sectio Hyperbole in infinitum produci possit, & spacium ABCDA sit vndique clausum: quare ipsa ADC est *MAXIMA* inscripta quæsita, per datum punctum D. Quod primò faciendum, ac demonstrandum erat.

m cõuers. 37. primi conic. à Comand. *n* 2. Coroll. 19. h. *o* ibidem.

IAM oporteat (in quarta figura) datæ Hyperbolæ ABC, cuius asymptoti ED, EF, per datum extra ipsam punctum G, *MINIMVM* angulum circũscribere.

Itaque, vel datum punctum G congruit cum centro E, vel cadit in angulo asymptotali, vel in eo, qui huic est ad verticem; sic enim semper, quę per G, & centrum E ducitur, tum Hyperbolæ, tum anguli est communis diameter, non autem si datum punctum alibi cadat. Si primùm; ipse angulus asymptotalis

ptotalis DEF erit Hyperbolæ circumſcriptus, cum totus cadat extra, & quęlibet ſectionis diameter, eaſdem ipſi applicatas, ad latera anguli productas, bifariam *a* ſecet: eritque *MINIMVS*; nam quælibet alia linea, quæ per G, vel per E (quod idem eſt) intra ipſum ducitur, minorem quidem cum altera aſymptoto conſtituit angulum, ſed omnino ſecat *b* Hyperbolen. Si ſecundum, duci poterunt *c* ex G Hyperbolen contingentes GA, GC, & tunc angulus AGC erit quæſitus circumſcriptus: quoniam ſi iungatur AC, & bifariam ſecetur in N, iuncta GN *d* diameter eſt ſectionis, ſimulque anguli; qui erit *MINIMVS*, vt per ſe patet, cum quæ ex G ducitur intra angulum AGC ſecet omnino Hyperbolen. Si tertium: ducantur GL, GM aſymptotis ęquidiſtantes, & angulus LGM erit Hyperbolæ ABC circumſcriptus, cum circumſcriptus ſit angulo aſymptotali DEF: nam ducta GEN ſectionis diametro, applicataque quacunque LDANCFM; in triangulis LGN, MGN eſt ND ad DL, vt NE ad EG, vel vt NF ad FM, ſuntq; *e* ND, NF inter ſe ęquales, quare DL, FM ęquales erunt, & totę NL, NM ęquales, ſiue GEN circũſcripti etiam anguli LGM diameter erit: inſuper idem angulus LGM erit *MINIMVS*: nam recta, quę ex G intra ipſum ducitur, minorem angulum cum altera nunc ductarum conſtituens, ſi producatur, ſecat vnam aſymptoton (cum ei æquidiſtanter ductam ſecet in G) quare vlteriùs producta ſecabit *f* ipſam Hyperbolen. Datę igitur Hyperbolę per datum extra ipſam pũctum in locis poſſibilibus, circumſcriptus eſt *MINIMVS* quæſitus angulus. Quod, &c.

a ex 8. 2. conic.
b 8. huius.
c 49. ſec. conic.
d 29. ſec. conic.
e ex 8. 2. conic.
f 35. h.

PROBL. XXVII. PROP. LXIX.

Datę Hyperbolę, per punctum intra ipſam datum, MAXIMVM angulum inſcribere. Item,

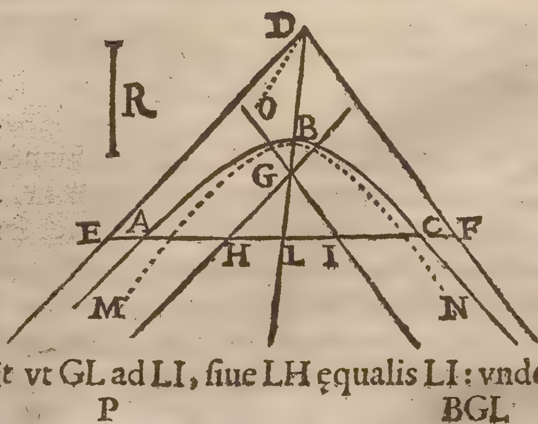
Dato angulo, per punctum extra ipſum datum, cum dato ſemi-transuerſo latere, MINIMAM Hyperbolen circumſcribere.

Oportet autem datum punctum eſſe in angulo, qui eſt ad verticem dato.

Sit data Hyperbole ABC, cuius aſymptoti ſint DE, DF, & punctum intra ipſam ſit G, per quod ei oporteat *MAXIMVM* angulum inſcribere.

Ducantur ex G rectæ GH, GI aſymptotis æquidiſtantes. Dico angulum HGI eſſe *MAXIMVM* quæſitum.

Nam iuncta DG, & producta ad L, ipſa GL neceſſariò diuidet angulum HGI (vt ſatis patet) ſumptoque in ea quolibet puncto L, & applicata in Hyperbola, ad diametrũ BL, ordinata ELF, latera anguli HGI ſecāt in H, I; erit ob triangulorum ſimilitudinem, DL ad LE, vt GL ad LH, ſed DL ad LE eſt vt DL ad LF, cum LE, LF ſint æquales, & DL ad LF eſt vt GL ad LI, quare GL ad LH erit vt GL ad LI, ſiue LH ęqualis LI: vnde



BGL erit diameter, tum datæ Hyperbolæ, tum descripti anguli; & cum GH, GI, per punctum G, in Hyperbola sumptum, ductæ sint asymptotis æquidistantes, ipsæ, ad partes B productæ, Hyperbolæ occurrent, cum asymptotos secent, sed ad partes H, I, nunquam cum sectione conuenient, a at quæcunque ducatur ex G extra angulum HGI, secabit producta alteram asympto-ton (cum secet in G ipsi parallelam GH) ac ideò priùs Hyperbolen datam; est igitur HGI *MAXIMVS* inscriptus angulus, vti quærebatur. Quod primò erat, &c.

a Coroll. 11. huius.

IAM sit datus angulus HGI, & datum punctum sit B, in angulo tamen, qui ei est ad verticem: oportet per B *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere, cum dato semi-transuerso R.

Iungatur GB, & producatur, sumaturque BD æqualis R; & per D agantur DE, DF, ipsis GH, GI parallelæ, & per B cum asymptotis DE, DF describatur b Hyperbole ABC; Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

b 4. sec. conic.

Nam eadem ratione, vt supra, ostendetur DBGL esse diametrum sectionis, & dati anguli, & rectas GH, GI, ad partes H, I productas (cum asymptotis æquidistent) nunquam cum sectione conuenire; ideoque Hyperbolen ABC dato angulo esse circũscriptam: sed est quoque *MINIMA*, quoniam, quæ cum eodem transuerso adscribitur, sed cum recto maiori, c maior est ipsa ABC; quæ verò cum recto minori, qualis est MBN, est quidem d minor ABC, sed omnino secat latera dati anguli: quoniam ducta DO, quæ sit asymptotos inscriptæ MBN, ipsa cadet e infra DE, sed eam secat in D, quare producta, alteram parallelam secabit GH, sed DO tota cadit extra BM, vnde occursus DO cum GH erit extra BM; siue GH necessariò secabit priùs sectionem BM. Est igitur sectio MBN *MINIMA* circumscripta quæsita dato angulo HGI, per datum punctum B, & cum dato semi-transuerso R. Quod vltimò faciendum erat.

c 2. Coroll. 19. h.
d ibidem.
e ex 37. h.

PROBL. XXVIII. PROP. LXX.

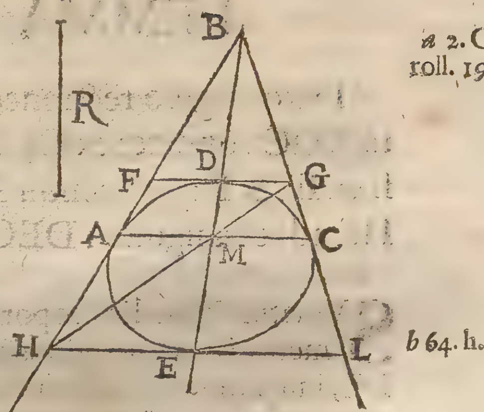
Dato angulo rectilineo, per punctum intra ipsum datum, cum dato transuerso latere, MAXIMAM Ellipsim inscribere: & è contra.

SIt datus angulus ABC, & punctum intra ipsum sit D, per quod ei oporteat, cum dato transuerso R, *MAXIMAM* Ellipsim inscribere.

Sumatur DE æqualis R, & per D, & E in angulo ABC applicentur a FDG, HEL, & iungatur HG diametrum secans in M, per quod applicetur AMD, & circa diametrum DE, ac per terminos applicatæ AC, describatur b Ellipsis DAEC. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. Quoniam, ipsa ADCE est mensali HFGL, siue dato angulo c inscripta, & quælibet alia Ellipsis eidem angu-

a 66. h.
b Coroll. 57. h.
c Schol. 62. h.

angulo per D adſcripta, cum eodem tranſuerſo latere DE, ſed cum recto, quod minus ſit recto adſcriptæ DAEC, eſt ipſa [a] minor, adſcripta verò cum recto maiori, eſt quidem maior eadem, ſed omnino ſecat anguli latera BA, BC, vt ſatis conſtat. Ampliùs, Ellipſis, quæ per D ſupra applicatam FG eidem angulo contingenter inſcribitur, cum tranſuerſo latere æquali ipſo DE, vel dato R (ſi tamen interceptum diametri ſegmentum DB maius fuerit DE) eſt omnino [b] minor prædicta ADCE: quare ipſa eſt *MAXIMA* inſcripta quæſita. Quod erat, &c.



a 2. Coroll. 19.h.

b 64. h.

Notandum eſt autem, quod ſi ABC fuerit quælibet coni-ſectio, vel circulus, eadem penitùs conſtructione, ac demonſtratione inſcribetur ei *MAXIMA* Ellipſis ADCE, cum dato tranſuerſo R, quod tamen in Ellipſi, vel circulo, non excedat maius diametri ſegmentum.

SI verò data ſit Ellipſis ADCE, & per punctum B extra ipſam datum circumſcribendus ſit ei *MINIMVS* angulus rectilineus. [c] Ducantur ex B Ellipſim contingentes BA, BC; nam angulus ABC erit *MINIMVS* circumſcriptus quæſitus: quoniam ducta AC, ac bifariam ſecta in M, iunctaque BME, ipſa [d] erit Ellipſis diameter, ſimulque dati anguli ABC, cum omnes ipſi AC æquidiſtanter ductæ ab eadem BM bifariam ſecentur: vnde angulus ABC erit datæ Ellipſi ADCE circumſcriptus: eritque *MINIMVS*; quoniam quæcunque recta, quæ ex B intra angulum ABC ducitur, cum altera contingentium minorem angulum conſtituens, neceſſariò ſecat datam Ellipſim ADC: quare angulus ABC eſt *MIMIMVS* circũſcriptus quæſitus. Quod, &c.

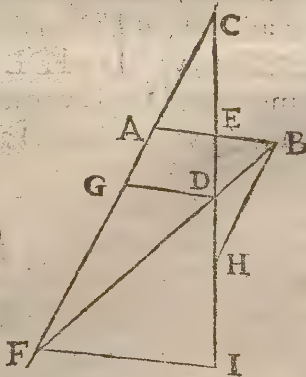
c 49. sec. conic.

d 29. sec. conic.

LEMMA VIII. PROP. LXXI.

Si duæ rectæ AB, CD ſe mutuò ſecent in E, ſitque AE æqualis EB, ſed CE maior ED, dico iunctas CA, BD, ſi producantur, conuenire ſimul ad partes A, D, vt in F, & ſi per D ducatur DG parallela ad AE, eſſe FC ad CA, vt FG ad GA.

SVmpta enim EH æquali ipſi EC, erit EH maior ED, & iuncta BH, in triangulis BEH, AEC erunt latera circùm æquales angulos ad E, æqualia: quare reliqui anguli EBH, EAC æquales, vnde BH parallela ad CA, hoc eſt anguli BAG, ABH duobus rectis æquales; ideoque duo BAG, ABD minores duobus rectis: occurrit ergo BD cum CA producta ad partes D, A; ſitque occurſus in F, ex quo ducatur FI parallela ad DG, vel ad AE.



Cum ſint ergo triangula FDI, BDE ſimilia, erit FI ad EB, vel ad AE, hoc eſt FC ad CA, vt FD ad DB, vel vt FG ad GA. Quod erat, &c.

LEMMA IX. PROP. LXXII.

Dato angulo rectilineo ABC, cuius diameter BDE, & applicata ADC; oportet ex C, infra ADC, secantem ducere CEF, ita vt si ex E, & F applicentur EH, FG ipsi ADC parallelæ, quadratum HE ad rectangulum DEG, datam habeant rationem O ad P.

Sumatur Q media proportionalis inter O, & P; & ex D, nisi DA sit diametro BD perpendicularis, erigatur DL, & fiat vt O ad Q, ita DA ad DL, iunctaque BLM, sumatur LM æqualis LD, & per M demittatur ME perpendicularis ipsi BDE: dico per punctum E quæsitam secantem transire.

Nam iuncta MD, ductaque MN ipsi BM perpendiculari cum sint anguli LMN, LDN recti, erũt anguli NMD, NDM duobus rectis minores; quare MN ipsi DE occurret in N; cumque angulus LMD, æqualis sit angulo LDM, erunt residui ex rectis DMN, MDN æquales, hoc est ND æqualis NM, facto igitur centro N, interuallo ND, describatur circulus DMG, qui vtrãque LD, LM, continget in D, M, cum anguli ad D, M sint recti: ducatur tandem EH parallela ad DA.

Iam cum BM circulum DMG contingat in M, sitque ME diametro DG perpendicularis [a] erit GB ad BD, vt GE ad ED, & permutando BG ad GE, vt BD ad DE, sed est BG maior GE, ergo & BD maior DE, estque AD æqualis DC, & anguli ad verticem D æquales, quare iunctæ BA, CE, productæ, conuenient simul ad partes A, E, vt in F [b] eritque FB ad BA, vt FH ad HA, & permutando BF ad FH, vt BA ad AH, vel vt BD ad DE, vel vt BG ad GE, & diuidendo BH ad HF, vt BE ad EG, quare iuncta FG ipsis EH, DA æquidistabit. Et quoniam est HE ad EB, vt AD ad DB, & BE ad EM, vt BD ad DL (ob triangulorum similitudinem) erit ex æquo HE ad EM, vt AD ad DL, & quadratum HE ad quadratum EM, hoc est ad rectangulum DEG, vt quadratum AD ad DL, vel vt quadratum O ad quadratum Q, vel vt linea O ad P. Quod erat faciendum.

[a] 36. primi conic.

[b] 71. h.

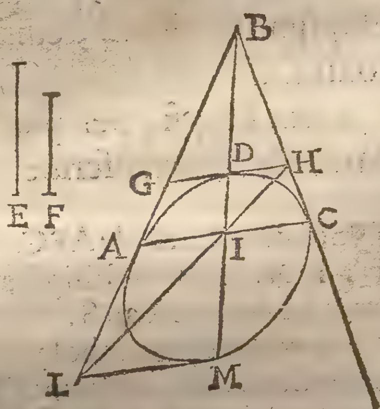
PRO-

PROBL. XXIX. PROP. LXXIII.

Dato angulo rectilineo, per punctum in qualibet eius diametro datum, MAXIMAM Ellipsim inscribere, cuius latera datam habeant rationem.

Sit datus angulus ABC, diameter BD, & datum punctum D, per quod oporteat Ellipsim inscribere, cuius transuersum latus ad rectum, datam quamcunque habeat rationem E ad F, & sit *MAXIMA*.

Applicetur per D, [a] ordinatim GDH, & per H ducatur HIL diametrum secans in I, & BA in L, ita vt ex I, & L ductis AI, LM ipsi DH parallelis, rectangulum DIM, ad quadratum AI, rationem [b] habeat E ad F, & cum trāsuerso DM, per extrema applicatæ AC, Ellipsis [c] describatur DAMC. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam. — a 66. h. — b 72. h. — c Coroll. 57. h.

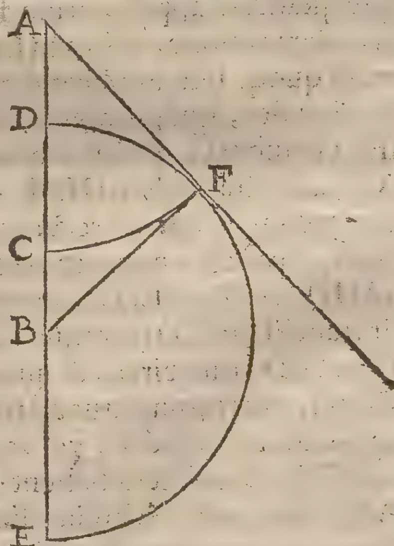


Est enim [d] LB ad BG, siue MB ad BD, vt LA ad AG, siue vt MI ad ID, quare BA, BC Ellipsim [e] contingent, ideoque ipsa erit angulo inscripta, eritque *MAXIMA*, vt in præcedentibus ostensum fuit. Quod erat, &c. — d 71. h. — e 34. pri. conic.

LEMMA X. PROP. LXXIV.

Datis medijs proportionalibus, Arithmetica nempe, & Geometrica inter easdem ignotas extremas; ipsas extremas inuenire.

Sit AB media arithmetica, & AC media geometrica inter duas easdem ignotas extremas, quarum idem sit terminus A, & simul congruere intelligantur: patet primò AB superare ipsam AC, cum media arithmetica sit maior media geometrica. Iam oporteat datis AC, AB ignotas extremas proportionales inuenire.



Fiat centro A interuallo AC circulus CF, cui ex puncto B contingens ducatur BF, quæ cum radio FA rectum efficiet angulum, vnde subtensa BA erit maior ipsa BF; si ergo cum centro B, interuallo BF describatur semi- circulus DFE, ipsæ secabit BA infra A, sed tamen vltra C (cum sit BC minor BF, eo quod AC æquatur AF, & tota AB minor est duobus AF, FB) secabitque productam AB in E; quem circu-

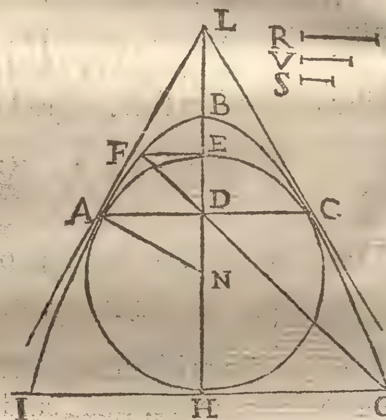
circulum dico in punctis D, E, quæsitum soluere: nempe AE, & AD esse quæsitas extremas. Nam cum sit BD æqualis BE, erit data AB media arithmetica inter inuentas EA, AD. Cumque sit BF radius circuli EFD, & angulus BEA rectus, erit FA ipsi circulo contingens, quare rectangulum EAD æquabitur quadrato AF, siue quadrato AC, vnde data AC erit media geometrica inter easdem inuentas EA, AD. Quare ignotæ extremæ, sunt inuentæ, vti quærebantur. Quod, &c.

PROBL. XXX. PROP. LXXV.

Datæ Parabolæ, per punctum intra ipsam datum, MAXIMAM Ellipsim inscribere, cuius latera datam habeant rationem: & è contra.

Datæ Ellipsi, per punctum extra ipsam datum, MINIMAM Parabolen circumscribere.

Esto data Parabole ABC, & datum intra ipsam punctum sit E; oportet per E *MAXIMAM* Ellipsim inscribere, cuius rectum latus ad transuersum rationem habeat R ad S.



Ducatur ex E Parabolę diameter BED, & applicetur EF, & sumpta V media proportionali inter S, & R; fiat vt R ad V, ita FE ad ED, iunctaque FD, quæ producta sectioni occurrat *a* in G, ex quo applicata GHI, circa transuersum latus EH, & terminos applicatæ AC describatur *b* Ellipsis AECH. Hanc dico esse quæsitam.

a 27. primi conic.

b Coroll. 57. h.

Cum enim in Parabola *c* sint diametri segmenta BH, BD, BE proportionalia, sintque quadrata applicatarum IH, AD, FE in eadem ratione *d* ipsorum segmentorum, erunt quoq; ipsæ applicatæ continuæ proportionales, quapropter rectangulum sub IH, vel sub HG, & FE æquabitur quadrato AD, ac proinde quadratum AD, ad rectangulum HDE, erit vt rectangulum sub GH, EF, ad idem rectangulum HDE; sed rectangulum sub GH, EF, ad sibi simile rectangulum HDE, (habent enim circa rectos angulos latera proportionalia, cum sit GH ad HD, vt FE ad ED, & permutando GH ad FE, vt HD ad DE) est vt quadratum FE ad ED (vtraque enim proportio, duplicata est proportionis lineę FE ad ED) quo circa, & quadratum AD ad rectangulum HDE, hoc est in Ellipsi, *e* vt rectum latus ad transuersum, erit vt quadratum FE ad ED, vel vt quadratum R ad V, vel vt data linea R ad S. Descripta est ergo Ellipsis AECH, cuius latera habent datam rationem R ad S, & est *f* datæ Parabolæ ABC inscripta. Amplius dico, ipsam esse *MAXIMAM* Ellipsium quarum latera sint in ratione R ad S, siue esse *MAXIMAM* sibi similium: nam, quæ cum minoribus lateribus datæ Parabolæ per E adscribitur ad partes H, minor est;

c Coroll. 1. 13. h.

d 20. primi conic.

e 22. primi conic.

f Schol. 62. h.

nor [a] est; quæ verò cum maioribus est quidem [b] maior, sed omnino secat Parabolen ABC, vti ostensum fuit in præcedentibus. Quamobrem Ellipsis AECH, datæ Parabolæ per datum intra ipsam punctum E est *MAXIMA* inscripta quæsita. Quod primò erat, &c.

a 5. Coroll. 19. h.
b ibidem.

IAM sit data Ellipsis AECH, cuius centrum N, & datum extra ipsam punctum sit B, per quod oporteat *MINIMAM* Parabolen circumscribere.

Iungatur BN secans Ellipsim in E, & posita NE media geometrica, & NB media arithmetica inter easdem ignotas extremas, reperiantur [c] ipsæ extremę, quę sint ND, NL, & per D ad Ellipsis diametrum EH applicetur ADC, & per verticem B, circa diametri segmentum BD, & per terminos A, C describatur Parabole ABC. Dico hanc esse *MINIMAM* quæsitam.

c 74. h.

Cum enim sit NE media geometrica inter LN, ND, erit rectangulum LND æquale quadrato NE; & per D applicata est in Ellipsi recta ADC, si iungantur LA, LC ipsæ Ellipsim contingent [d] in A, C; cumque sit NB media arithmetica inter easdem LN, ND, erunt ipsarum differentiæ LB, BD inter se æquales; vnde eædem LA, LC Parabolen [e] contingent, quocirca hæc datæ Ellipsi erit circumscripta. Eritque *MINIMA*: quoniam quæ per B eidem Ellipsi adscribitur cum recto maiori, maior [f] est ABC, quæ verò cum minori est quidem [g] minor, sed omnino secat Ellipsim, vti ex præcedentibus, & per se satis constat. Quapropter Parabole ABC est *MINIMA* circumscripta quæsita. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

d 57. h.
e conuer. 37. primi conic. ex Comand.
f 2. h.
g 2. Coroll. 19. h.

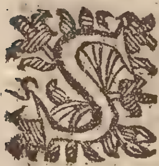
COROLL. I.

EX prima parte huius patet, quod si datum punctum D fuerit in axe Parabolæ, & data ratio sit æqualitatis, inscribenda Ellipsis, idem erit, ac circulus; tunc enim applicata ADC erit axi perpendicularis, & quadratum AD æquabitur rectangulo HDE; ideoque AECH erit circulus: ex quo habebitur, quo pacto per punctum E in axe Parabolæ, *MAXIMVS* circulus inscribatur: applicata enim EF, cui sumpta æquali ED, iunctaque FD, & producta in G, & applicata GH, ipsa dabit EH diametrum quæsiti circuli.

COROLL. II.

PAtet etiam semi-applicatas in Parabola, ex terminis diametri *MAXIMI* inscripti circuli, ęquari contiguis segmentis eiusdem diametri, ab applicata ex contactu circuli cum sectione abscissis. Si enim sit FE æqualis ED, ob similitudinem triangulorum, erit etiam GH æqualis HD.

MONITVM.



I quis in vigesimo nono, ac trigesimo antecedenti Problemate, à seueritate geometricæ demonstrationis expeteret, non tantum Ellipses, per datum punctum ibi contingenter inscriptas, ad partes verticis, tum anguli, tum Parabolæ oppositas, MAXIMAS esse sibi ipsis similium per idem punctum, ad easdem partes inscriptarum,

ptarum, ſed eſſe MAXIMAS quoque earum, quæ ad partes verticum inſcribuntur; id ſequenti Theoremate, in angulo, & qualibet coni-ſectione, vel circulo conſequetur, ſimulque dabitur Methodus ipſis inſcribendi ſimiles Ellipſes, quæ ſucceſsiuè ſe mutuò, & anguli, vel ſectionum latera contingant.

THEOR. XXXVI. PROP. LXXVI.

Ellipſes inſcriptæ eidem angulo, vel Parabolæ, vel Hyperbolę, aut portioni Ellipticæ, vel circulari, quæ non excedat Ellipſis, vel circuli dimidium, ſe mutuò, & anguli latera, vel ſectionem, vel circulum contingentes, & quarum diagonales menſalium, quibus inſcribuntur, inter ſe æquidiſtent, ſunt ſimiles, & quæ propior eſt vertici, minor eſt remotiori.

SIt ABC, vel angulus rectilineus, vt in prima figura, vel Parabolæ, vel Hyperbolæ, aut portio non maior ſemi-circuli, vel ſemi-Ellipſis dimidio, vt in ſecunda, cuius vertex B, diameter BD, & circa ipſius ſegmentum DE, inter applicatas AC, IF, ducta diagonali AF, ſecante diametrum ED in K, & applicata per K recta GKH, per extrema G, E, H, D, [a] deſcribatur Ellipſis GEHD, quæ per Scholium 62. huius, menſali AIFC, hoc eſt dato angulo, vel ſectioni erit inſcripta. Et per I ducta IL parallela diagonali AF, diametrum ſecante in O, conſimili conſtructione, ac ſupra, deſcribatur in menſali INLF Ellipſis PMQE. Dico primùm has Ellipſes inter ſe ſimiles eſſe.

[a] Coroll. 57. h.

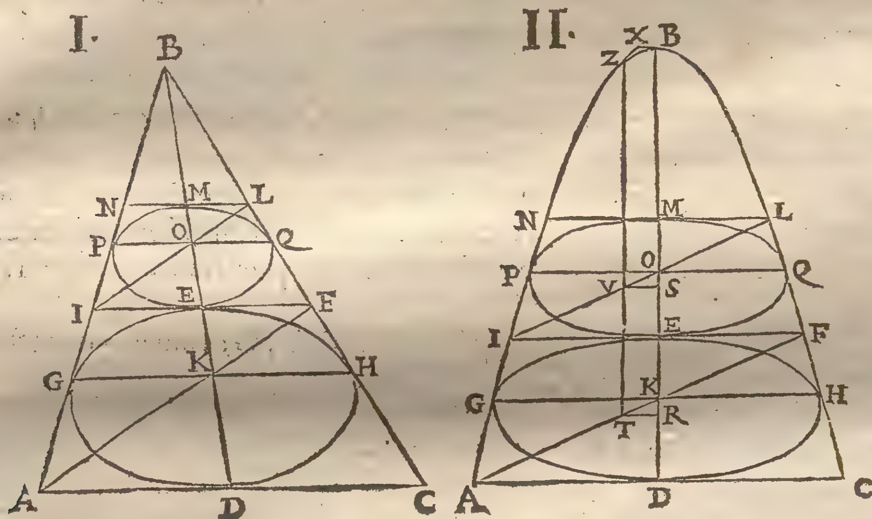
Nam, in prima figura, proportio rectanguli GKH, ad rectangulum AKF, componitur ex ratione GK ad KA, ſiue (per triangulorum ſimilitudinem) PO ad OI, & ex ratione HK ad KF, ſiue QO ad OL, ſed etiam proportio rectanguli POQ, IOL, ex ijſdem rationibus componitur, quare in triangulo, rectangulum GKH ad AKF, eſt vt rectangulum POQ ad IOL.

Iam, in ſecunda figura, eadem ratione, vt in 64. huius, oſtendetur huiuſmodi Ellipſium centra cadere infra K, O; nempe in R, S, per quæ ſi applicentur RT, SV, ipſæ, diagonales ſecabunt in T, V; cum ſit DR æqualis RE, erit AT æqualis TF, ob parallelas; item IV æqualis VL; ſuntque AF, IL æquidiſtanter ductæ in ſectione, vel circulo, quare iuncta TV erit earundem æquidiſtantium diameter, quæ producta ad aliud punctum, præter B, ſectioni occurret, vt in Z, eritque [b] ſectionis, vel circuli diameter: ſi ergo ex verticibus B, Z, agantur BX, ZX ordinatim applicatis GH, AF æquidiſtantes, hæ ſectionem [c] contingent, & ſimul [d] conuenient in X; eritque rectangulum GKH ad rectangulum AKF, vt quadratum BX ad quadratum ZX; item erit [e] rectangulum POQ ad IOL, vt idem quadratum BX ad idem ZX, quapropter rectangulum GKH ad AKF, erit vt rectangulum POQ ad IOL, quod etiam ſuperiùs in prima figura demonſtratum fuit. Itaque, cum ſit in vtraque, rectangulum GKH ad AKF, vt rectangulum POQ ad IOL, &

[b] 28. sec. conic.
[c] 17. primi conic.
[d] 59. h.
[e] 17. tertij conic.

rectan-

rectangulum AKF ad rectangulum DKE, vt quadratum AK ad KD (ob laterum proportionalitatem) vel vt quadratum IO ad OE (ob triangulorum AKD, IOE similitudinem) vel vt rectangulum IOL ad EOM (ob homologorum laterum proportionalitatem) erit, ex æquali, rectangulum GKH, vel quadratum GK ad rectangulum DKE, siue vt rectũ latus Ellipsis GEHD ad eiusdem transuersum, vt rectangulum POQ, siue quadratum PO, ad rectangulum EOM, vel vt rectum Ellipsis PMQE ad ipsius transuersum: cum ergo huiusmodi Ellipses habeant latera proportionalia, sintque æqualiter inclinatæ, erunt [a] inter se similes. Quod erat primò demonstrandum. a 6. sec. defin. h.



Præterea, cum sit AD ad DK, vt IE ad EO, sitque AD maior [b] IE, erit DK maior EO. Item, cum sit FE ad EK, vt LM ad MO, sitque FE maior LM, erit EK maior MO, ergo integra transuersa diameter DE, maior toto transuerso latere EM; sed transuersum DE ad transuersum EM, est vt rectum vnius ad rectum alterius, vt superiùs demonstrauimus, estq; transuersum DE maius EM, quare rectum recto maius erit, siue Ellipsis GEHD maiorum laterum, maior [c] erit Ellipsi PMQE minorum laterum, quæ tùm in angulo, tùm in sectione, aut semi-Ellipsi, vel semi-circulo vertici B propior est. Quod vltimò ostendere propositum fuit. b 32. vel 63. h. c 5. Coroll. 19. h.

SCHOLIVM.

Si ergo in figuris 29. & 30. Problematis, concipiantur methodo superiùs allata, per datum punctum inscribi Ellipses ad partes verticis, vel anguli, vel sectionis, quæ similes sint alijs ad oppositas partes per idem punctum inscriptis (si tamen sectionis, vel circuli portio, quæ ab applicata per datum punctum terminatur, huius Ellipsis sit capax, quod accidet, quando in secunda præcedentium figurarum, diagonalis IL, quæ ex I ducitur diagonali AF æquidistans, & occurrens sectioni in L, punctum L pertingat ad B, vel

Q cadat

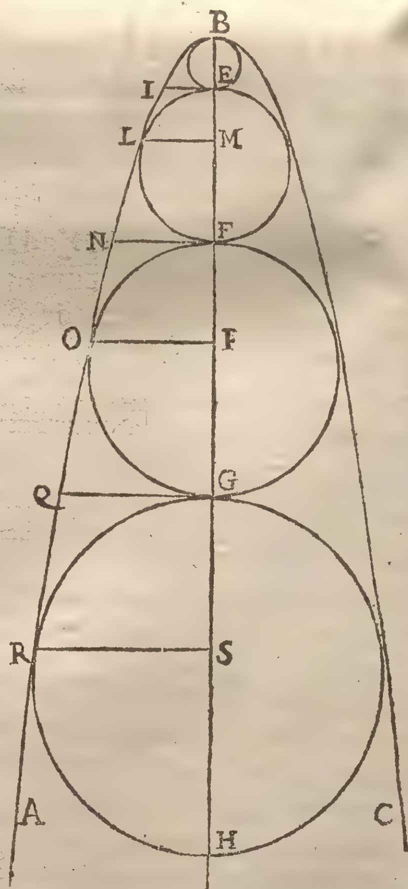
cadat inter I, & B; tunc enim in portione IBF, per punctum E, Ellipsis alteri GEHD similis inscribi nũquam poterit, qualis semper inscribi potest in triãgulis IBF, MBL, &c. primæ figuræ; quod omne, vel leuiter intuenti satis patebit) illę omnino his minores erunt, cum verticibus sint propiores; & ob id, quæ ad oppositas partes ibi inscribuntur, erunt quidem *MAXIMAE* quæsitæ.

THEOR. XXXVII. PROP. LXXVII.

MAXIMI circuli in Parabolæ inscripti, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in ratione quadratorũ, disparium numerorum ab vnitate incipientium.

Sit Parabole ABC, cuius axis BH, vertex B; & *MAXIMI* circuli in ea inscripti, & à vertice successiuè se mutuò contingentes sint, quorum diametri BE, EF, FG, GH, &c. contactus verò sint, primi vertex B, secundi punctum L, tertij O, quarti R, &c. dico huiusmodi circulos, esse inter se, vt quadrata numerorum disparium ab vnitate incipientium, nempe 1. 9. 25. 49. &c.

Ducantur, tum ex diametrorum terminis E, F, G; tum ex contactibus L, O, R ordinatæ EI, FN, GQ, LM, OP, RS.



Iam cum circulus BE sit *MAXIMVS* inscriptibilium per verticẽ B, [a] erit BE ęqualis recto lateri Parabolę, sed EI est [b] media proportionalis inter EB, & rectum latus, hoc est inter æquales lineas, quare EI æqualis erit ipsi EB, quæ concipiatur, vt vnum; estque EI [c] æqualis EM, ergo EM, est vt 1, & tota BM, vt 2; sed est [d] vt BE ad BM, ita BM ad BF, vel vt 1 ad 2, ita 2, ad 4; erit ergo BF, 4: estque BM, 2; quare FM, siue [e] FN, siue [f] FP erit pariter 2; vnde tota BP erit 6; estque BF ad BP, vel vt 4 ad 6, ita [g] BP ad BG, & vt 4 ad 6, ita 6 ad 9, vnde BG erit 9, sed est BP, 6, ergo GP, siue GQ, vel GS erit 3; quare tota BS, erit 12, sed vt BG ad BS, vel vt 9 ad 12, ita BS ad BH, & vt 9 ad 12, ita 12 ad 16, quare BH, erit 16. Si ergo dum BE est, vt 1, BF est 4, BG, 9, & BH, 16; ipsa BE cum earum differentijs EF, FG, GH, erunt, vt sunt numeri 1, 3, 5, 7, qui sunt numeri impares ab vnitate incipientes, sed circuli sunt, vt quadrata suorum diametrorum, ipsæque BF, EF, FG, GH sunt inscriptorum circulorum diametri, quare hi *MAXI-*

a 1. Coroll. 20. h.
b Coroll. 1. h.
c 2. Coroll. 75. h.
d 1. Coroll. 13. h.
e 2. Coroll. 75. h.
f ibidem.
g 1. Coroll. 13. h.

MI cir-

MI circuli, erunt, vt quadrata eorumdem numerorum disparium ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

PROBL. XXXI. PROP. LXXVIII.

Datæ Hyperbolę, per punctum intra ipsam datum MAXIMAM Parabolen inscribere; & è contra.

Datæ Parabolæ, per punctum extra ipsam datum cum dato semi-transuerso latere MINIMAM Hyperbolen circumscribere.

SIt data Hyperbole ABC, cuius centrum E, & punctum intra ipsam datum sit G. Oportet per G *MAXIMAM* Parabolen inscribere.

Iungatur EG secans Hyperbolen in B, & concipiatur EG esse mediam arithmeticam, EB verò mediam geometricam inter easdem ignotas extremas, quæ reperiantur, [a] & sint EH, EF, & per F applicetur AFC, & circa diametrum GF adscribatur [b] ipsi Hyperbolæ ABC, Parabole DAGCM, quarum communis applicata sit AC. Dico ipsam Parabolen esse quæsitam. [a] 74. h. [b] 57. h.

Cum enim sit FE ad EB, vt EB ad EH, erit rectangulum FEH æquale quadrato EB, quare AH Hyperbolen [c] continget. Cumque sit EG media arithmetica inter FE, EH, erunt ipsarum differentiæ FG, GH æquales, vnde eadem AH Parabolen quoque [d] continget: quare Parabole DGM Hyperbolæ ABC [e] erit inscripta. Quod autem sit *MAXIMA*, patet; cum quælibet alia per G adscripta cum recto minori, minor est AGC, quę verò cum maiori, est quidem maior, sed omninò secat Hyperbolen ABC, cum sectio Parabole in infinitum abeat, & superficies ABCGA vndique sit clausa. Quod primò, &c.

[c] conuers. 37. primi conic. Comand. [d] 2. h. [e] 61. h.

IAM sit data Parabole AGC, & datum extra ipsam pũctum sit B, per quod oporteat, cum dato quolibet semi-transuerso D, *MINIMAM* Hyperbolen circumscribere.

Ducatur per B diameter Parabolæ DGF, quæ vltra B producatur, sumaturque BE ipsi D æqualis, & facta EB media geometrica, & EG media arithmetica inter easdem ignotas extremas, reperiantur [f] ipsæ extremæ, quæ sint EH, EF; & per F applicetur in Parabola AFC; & super AC ad diametri segmentum BF, cum semi-transuerso BE describatur [g] Hyperbole ABC. Dico ipsam esse *MINIMAM* quæsitam. [f] 74. h. [g] 57. h.

Si quidem iuncta HA, iisdem omnino argumentis, ac supra, demonstrabitur ipsam HA, & Parabolen, & Hyperbolen contingere, vnde sectiones se mutuò contingent, [h] & Hyperbole ABC erit Parabolæ circumscripta: eritque *MINIMA*; nam quælibet alia Hyperbole per B adscripta cum eodem transuerso, sed cum recto maiori, maior est ipsa ABC, quæ verò cum minori, est quidem minor, sed cum ipsi ABC sit inscripta, & ad partes verti- [h] 61. h.

ci oppositas, sit infinitæ extensionis, secaret omnino Parabolen AGC, vt per se patet: quapropter Hyperbole ABC erit *MINIMA* circumscripta quęsita. Quod secundò faciendum, ac demonstrandum erat.

MONITVM.



AEC de MAXIMARVM, & MINIMARVM coni-sectionum, circuli, & anguli reciproca inscriptione, ac circumscriptione, per punctum in ipsis, vel intra, vel extra datum, iuxta sæpius memoratam definitionem, hactenus pertractasse sufficiat, quæ si grata vobis fuisse perceperimus, multa his similia, & alia quàm plurima ad aliud tempus proferemus. Cæterùm, in proximè sequentibus, quæ ad vberiorem doctrinam, & alteri præsertim huius operis parti maximè conducunt, hac omissa definitione, inscriptio, & circumscriptio aliter fiet, prout in ipsis propositionibus exponetur.

LEMMA XI. PROP. LXXIX.

Si recta AB secta fuerit in C, & in D, ita vt AB ad BC, sit vt AD ad DC: Dico si BD bifariam secetur in E, punctum E cadere inter B, & C, & rectangulum AEC, æquari quadrato ED.

CVm sit enim AB ad BC, vt AD ad DC, erit permutando BA ad AD, vt BC ad CD, sed est BA maior AD, quare BC erit maior CD: ex quo punctum E bifariam secans BD cadit inter B, & C.



Ampliùs producatur BA ad F, & secetur AF æqualis AD.

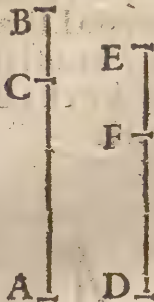
Iam cum demonstratum sit esse BA ad AD, vt BC ad CD, erit BA ad AF, vt BC ad CD; & componendo BF ad FA, vt BD ad DC; & sumptis antecedentium dimidijs, EA ad AF, siue ad AD, vt ED ad DC, & per conuersionem rationis, AE ad ED, vt DE ad EC, vnde rectãgulum AEC ęquabitur quadrato ED. Quod erat, &c.



LEM-

LEMMA XII. PROP. LXXX.

Si fuerit rectangulum ABC, æquale rectangulo DEF, sitque AC maior DF, erit BC minor EF.

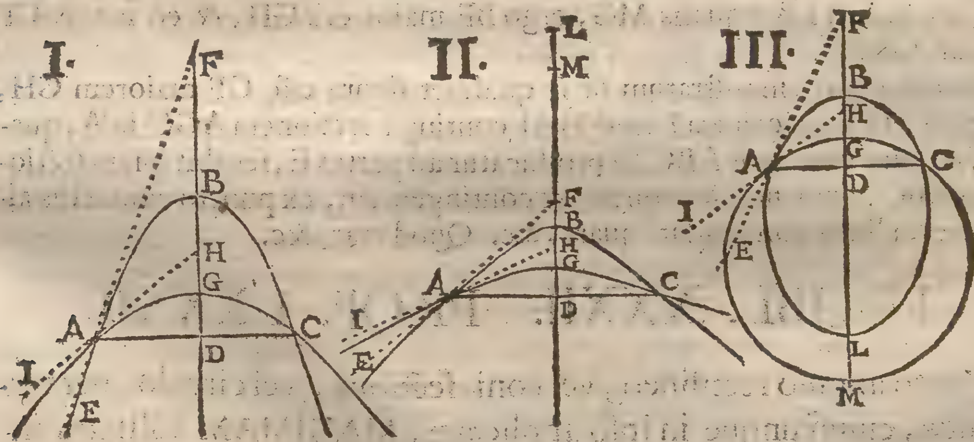


SI enim dicatur BC æqualem, vel maiorem esse EF, cum sit data AC maior DF, esset omnino AB maior DE, & BC dicitur æqualis, vel maior EF, ergo rectangulum ABC esset omnino maius rectangulo DEF, sed æquale positum fuit. Ergo patet propositum.

THEOR. XXXVIII. PROP. LXXXI.

Si recta linea ad alterũ terminũ cuiusdam applicatæ coni-sectionem, vel circulũ cõtingat, ipsa omnino secabit sibi adscriptã eiusdẽ nominis sectionẽ circa eandẽ applicatam, & cum æquali transuersa diametro, si sectiones fuerint Hyperbolæ, vel Ellipses, aut circuli.

ESto quæcunque coni-sectio, vel circulus ABC, cuius diameter BD, & vna applicatarum sit AC, & ad ipsius terminum A, sit recta contingens EAF, quæ diametro occurret *a* in F; & sumpto in diametri segmento BD quolibet puncto G, cum diametro GD, & applicata AC in qualibet figura, *a* 24. 25. pr. conic.



sed etiam, pro Hyperbola in secunda, & pro Ellipsi, vel circulo, in tertia, cum dato transuerso latere GM, quod æquale sit transuerso BL datæ sectionis, describatur *b* eiusdem nominis sectio AGC: dico hanc omnino secari à contingente EAF. *b* 57. h.

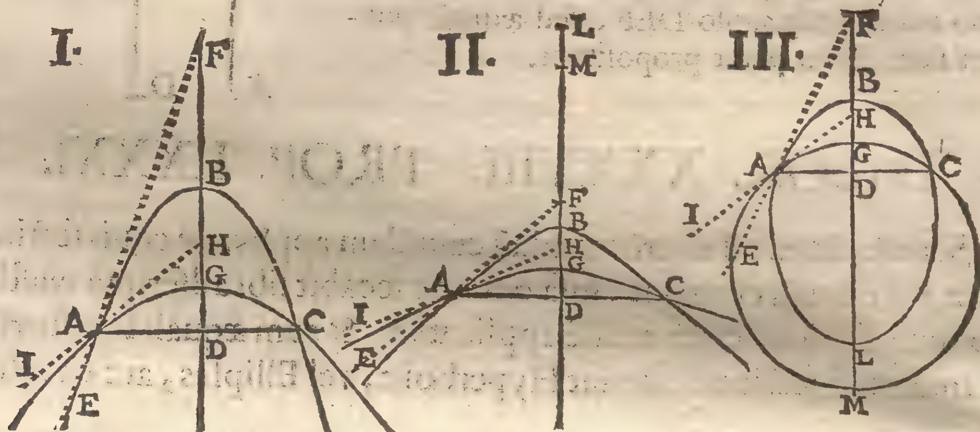
Ducatur enim per A recta IAH, quæ sectionem contingat AGC, cum eius diametro conueniat in H.

Iam in prima figura exhibente Parabolas, cum AF contingat sectionem ABC,

a 35. pri. conic. b ibidem. ABC, erit DB æqualis [a] BF; cumque AH contingat AGC erit DG [b] æqualis GH, ſed eſt DB maior DG ex conſtructione, quare, & BF erit maior GH, & GF eò maior GH: quod memento.

Præterea, in ſecunda figura, cum ſit LB, æqualis MG, & BD maior GD, ex conſtructione, habebit LB ad BD minorem rationem, quàm MG ad GD, & componendo LD ad DB, ſiue [c] LF ad FB minorem quàm MD ad DG, ſiue [d] quàm MH ad HG, & iterum componendo LB ad BF, minorem quàm MG ad GH, ſed eſt LB æqualis MG, quare BF erit maior GH, & eò magis GF maior GH.

c 36. primi conic. d ibidem.



In tertia denique, cum ſit LB æqualis MG, & DB maior DG, ex conſtructione, habebit LB ad BD minorem rationem, quàm MG ad GD, & diuidendo LD ad DB ſiue [e] LE ad FB, minorem quàm MD ad DG, vel [f] quàm MH ad HG, & diuidendo iterum, LB ad BF minorem rationem, quàm MG ad GH, ſed eſt LB æqualis MG, ergo BF maior erit GH, & eò magis GF maior GH.

e 36. primi conic. f ibidem.

Itaque cum demonſtratum ſit in qualibet figura eſſe GF maiorem GH, punctum H incidet infra F; ſed HAI contingit ſectionem AGC in A, quare FA, quæ contingit ABC, ſi producatur ad partes E, ſecabit ipſam ſectionem ABC, cum inter ſectionem, & contingentem, ex puncto contactus altera recta linea non [g] cadat: quare, &c. Quod erat, &c.

g 32. primi conic.

PROBL. XXXII. PROP. LXXXII.

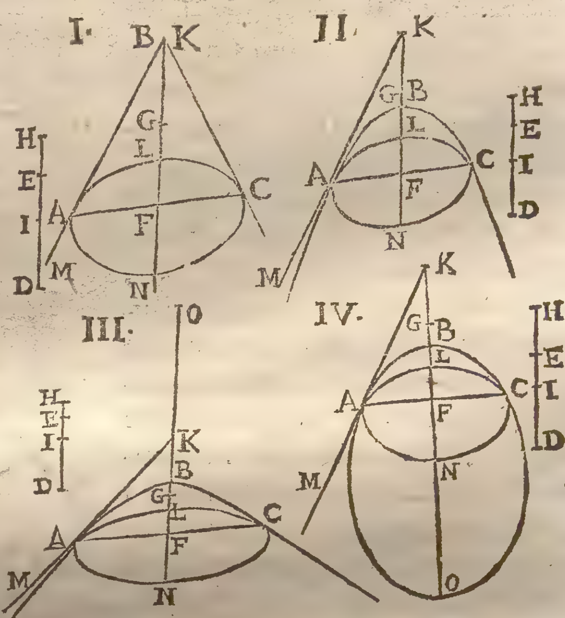
Dato angulo rectilineo, vel coni-ſectione, vel circulo, per terminos, cuiuſcunque in ipſo applicatæ, MAXIMAM Ellipſim inſcribere, cuius tranſuerſum latus æquale ſit dato.

Oportet autem, ſi data ſectio fuerit Ellipſis, datum tranſuerſum minus eſſe diametro datæ Ellipſis, ad quam data applicata ordinatim ducitur.

ESto ABC datus angulus, vt in prima figura; vel Parabole, vt in ſecunda; vel Hyperbole, vt in tertia; vel tandem Ellipſis, aut circulus, vt in quarta,

quarta, & in ipsis concipiatur quædam AC ad diametrum BF ordinatim ducta; oportet per eius terminos A, C, dato angulo, vel sectioni, *MAXIMAM* Ellipsim inscribere, cuius transuersa diameter æqualis sit datæ lineæ DE, quæ tamen, pro Ellipsi ABCO, quartæ figuræ, minor sit eius transuersa diametro BO.

Ducatur [a] ex A, sectionem ABC contingens AK, quæ diametro occurret [b] in K, & KF, in angulo etiam rectilineo, bifariam secetur in puncto G, quod in Parabola cadet in ipsa B, cum (ob tangentem AK) sit KB [c] æqualis BF, & in Hyperbola cadet infra B, cum sit FB maior BK (sumpta enim eius transuersa diametro BO, est OF ad FB, [d] vt OK ad KB, & permutando OF ad OK, vt FB ad BK, sed est OF maior OK, quare, & FB erit maior BK) in Ellipsi verò cadet supra B, cũ sit KB maior BF (nam est OK ad KB, [e] vt OF ad FB, & KF bifariam secta est in G, ac ideo G cadet supra B.) Præterea ad datam rectam DE applicetur parallelogrammum æquale quadrato GF, excedens figura quadrata, idque sit rectangulum DHE; sumptaque HI media proportionali inter DH, HE, erit rectangulum DHE, siue quadratum GF, æquale quadrato HI, ergo rectæ GF, HI æquales inter se. Insuper sumatur GL æqualis HE, & erit reliqua LF æqualis reliquæ EI; & punctum L cadet omnino infra B, siue intra angulum, vel sectionem, cum in angulo, & Hyperbola cadat infra G, quod est intra angulum, vel sectionem, & in Parabola cadat infra G, quod est in ipsa sectione; in Ellipsi verò, prædictum punctum L cadet infra B; quoniam cum sit OK ad KB, vt OF ad FB, & KF bifariam secta in G, per constructionem, erit rectangulum OGB [f] æquale quadrato GF; (hic notatione dignum videtur, hanc ipsam affectionem verificari etiam in Hyperbola, nempe rectangulum OGB æquari quadrato GF, vel GK) siue quadrato HI, siue rectangulo DHE; sed est OB maior DE, quare GB erit [g] minor HE, siue minor GL, hoc est punctum L erit quoque intra Ellipsim ABCO. Sumatur præterea in quacumque figura FN æqualis ID, erit ergo LN æqualis datæ ED (cum sit quoque LF æqualis EI) & punctum N in quarta figura cadet omnino intra Ellipsim ABCO: quoniam cum sit rectangulum DHE, siue NGL, æquale quadrato HI, siue GF, & sit etiam rectangulum OGB æquale eidem quadrato GF, vt superiùs demonstrauimus, erunt rectangula OGB, NGL inter se æqualia, & ideo, vt OG ad GN, ita LG ad GB, sed est LG maior GB, vt paulò ante ostendimus, quapropter, & OG erit maior GN, siue punctum N cadet intra Ellipsim ABCO.

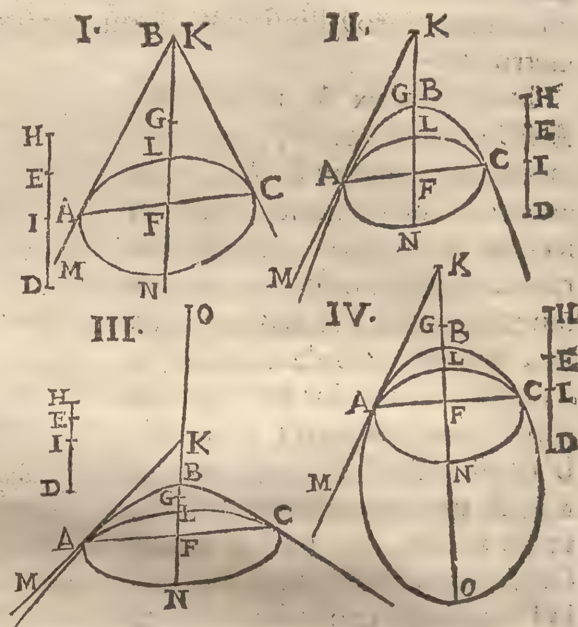


a 2.4.h.
b 24.25. pr. conic.
c 35. primi conic.
d 36. primi conic.
e ibidem.
f 79.h.
g 80.h.

Tandem cum trãsuerso LN, quod æquatur datę lineæ ED, circa applica-

tam

* Coroll. 57. h. tam AC describatur * Ellipsis ALCN. Dico hanc esse *MAXIMAM* inscriptã quæsitam.



Nam, in qualibet figura, cum sit rectangulum DHE, siue NGL æquale quadrato HI, siue GF, erit NG ad GF, vt GF ad GL, & componendo NG cum GF, hoc est NK, erit ad GF, vt FG cum GL, siue vt KL ad GL, & permutando NK ad KL, vt GF ad GL, a Coroll. 12. h. vel vt NG ad GF, vel vt [a] NF ad FL, quæ sunt differentiæ, trium proportionalium NG, GF, GL; b 4. h. ergo recta KAM tanget [b] Ellipsim ALCN, siue hæc angulo ABC erit inscripta, sed in alijs figuris, ipsa KAM tangit quoque datã ei simul adscriptam sectionem ABC, (ex constructione) adĩdem terminum cõmunis ap- c 61. h. plicatæ AC, quapropter Ellipsis ALCN datæ sectioni, vel circulo [c] erit inscripta.

Dico demum hanc esse *MAXIMAM*: quoniam quæ ipsi adscribitur per eosdem terminos applicatæ AC, & cum transuersa diametro æquali ipsi LN, d 81. h. *licet minor fuerit eadem ALCN*, secat [d] contingentem KAM, in A, atque aliò ad partes AK, si nempe vertex nouiter adscriptæ cadat supra L; vel ad partes AM, si cadat infra, vt ex ipsa 81. huius facilè elicitur: cum ergo inouiter adscripta Ellipsis secet contingentem KAM, in se ipsam rediens, secabit omnino datam sectionem ABC, quare Ellipsis ALCN, est *MAXIMA* dato angulo, vel sectioni ABC inscripta, circa datam applicatam, & cum data transuersa diametro DE, immo potiùs ipsa ALCN est vnica huiusmodi conditionibus inscriptibilius. Quod faciendum, & demonstrandum erat.

COROLL.

Ex hac constat interceptum diametri segmentum inter quamlibet applitam, & verticem, æquale esse (in Parabola) intercepto segmento eiusdem diametri inter verticem, & occursum contingentis, ductæ ex termino applicatæ, cum diametro: in Hyperbola, verò maius, sed in Ellipsi, vel circulo minus esse.

Demonstratum est enim, in secunda figura, KB æqualem esse BF, in tertia verò KB, minorem BF, & in quarta KB maiorem BF.

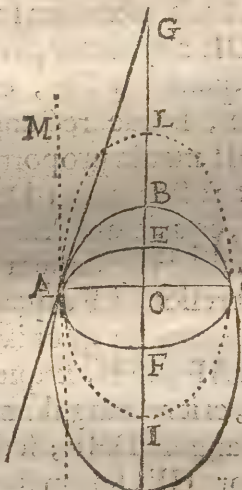


THEO-

THEOR. XXXIX. PROP. LXXXIII.

Si binarum Ellipsium simul adscriptarum altera alteri fuerit inscripta, & per terminos communis applicatæ se mutuò contingant; quælibet alia Ellipsis datis adscripta, cum eadem applicata, & cum æquali transuerso latere, inscriptam Ellipsim omnino secabit.

SInt duæ Ellipses ABCD, AECF simul adscriptæ, circa communem applicatam AC, sitque ipsarum altera, nempe AECF, alteri inscripta, ita vt in extremis tantùm A, C, se mutuò contingant: dico, si his alia adscribatur Ellipsis ALCI, circa eandem applicatam AC, & cum transuerso LI, quod æquale sit ipso BD transuerso circumscriptæ, ipsam ALCI omnino secare inscriptam AECF.



Nam si alterum extremum transuersæ diametri LI, quale est punctum L, cadat intra inscriptam, vt inter E, & O, tunc aliud extremum I necessariò cadet extra, infra F, cum sit LI, siue BD maior EF, ex quo manifestè patet, Ellipsim ALCI secare inscriptam AECF.

Si verò vtrunque extremum L, I, cadit extra inscriptam, vti exhibetur ab hac figura; tunc ducta AG, quæ circumscriptam ABCD contingat in A, ipsa, vtrinque producta, ad alteram partium secabit [a] omnino ALCI; vnde, quæ ex A cõtingit ALCI, diuersa erit ab AG, & sit ipsa AM. *a 81. h.*

Iam si ALCI non secat inscriptã AECF; contingat in A, C, si possibile est. Cum ergo recta AM contingat Ellipsim ALCI, atque hæc contingat inscriptam Ellipsim AECF, eadem recta AM, in A quoque continget AECF, sed etiam AG eandem AECF contingit in A: quare ex eodem puncto A ductæ erunt binæ rectę lineę eandem Ellipsim contingentes; quod est [b] impossibile. Non igitur Ellipsis ALCI contingit inscriptam AECF, quapropter in occursibus A, C necessariò eam secabit. Quod ostendere propositum fuit. Sed hoc idem *b ex 32. pr. conic.*

ALITER affirmatiuè.

CVm recta AG contingat ad A circumscriptam Ellipsim ABCD, atque hæc ad idem A contingat inscriptam AECF, ipsa AG omninò continget ad A inscriptam AECF; sed MA (quę vt supra ostendimus, diuersa est à GA) hanc secat in A; quare MA producta, ad alteram partium omninò secabit inscriptam AECF, & eò magis Ellipsis ALCI, quam contingit ad A recta MA, ad eandem partem secabit inscriptam AECF. Quod erat, &c.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXXIV.

Datæ Ellipsi, vel circulo, per terminos cuiuscunque in ipso applicatę MINIMAM Ellipsim circumscribere, cuius transuersum latus æquale sit dato, quod tamen maius sit transuersa diametro datæ Ellipsis.

Sit data Ellipsis, vel circulus ABCO, cuius transuersa diameter BO, & quædam ad eam applicata AC: oportet per terminos A, C, cum transuerso DE, quod excedat BO *MINIMAM* Ellipsim circumscribere.

Ducatur ex A contingens AK productæ diametro occurrens in K, & KF bifariam secetur in puncto G, quod cadet iuter B, & K, vt in 83. h. ostensum fuit; & ad datam lineam DE applicetur parallelogrammum, æquale quadrato GF, excedens figura quadrata, sitque rectangulum DHE, & sumpta HI media proportionali inter DH, HE, erit rectangulum DHI, siue quadratum GF, ęquale quadrato HI, hoc est linea GF æqualis HI: sumpta ergo GL æquali HE, erit reliqua LF æqualis EI, & pūctum L cadet extra B: quoniam cum sit OK ad KB, [a] vt AF ad FB, sitque KF bifariam secta in G, erit rectangulum OGB æquale [b] quadrato GF, siue quadrato HI, siue rectangulo DHE; sed est OB minor DE, ex constructione, quare GB erit maior [c] HE, siue maior GL; itaque punctum L cadet extra Ellipsim ABCO. Sumatur ampliùs FN æqualis ID, & erit tota LN æqualis datæ ED, itemque punctum N cadet extra Ellipsim ABCO: Nam cum sit rectangulum DHE, siue NGL æquale quadrato HI, siue GF, sitque rectangulum OGB, æquale eidem quadrato GF, vt supra ostendimus, erunt rectangula OGB, NGL inter se æqualia, & ideo vt OG ad GN, ita LG ad GB, sed est LG minor GB, vt superiùs demonstrauimus, vnde, & OG minor erit GN, nempe punctum N cadet extra Ellipsim ABCO. Postremò cum transuerso latere NL, quod æquale est datæ lineæ DE, circa applicatam AC [d] describatur Ellipsis ALCN. Dico hanc esse *MINIMAM* circumscriptam quæsitam.

Quoniam cum sit rectangulum NGL æquale quadrato GF, erit NG ad GF, vt GF ad GL, & componendo, NG cum GF, siue NK, erit ad GF, vt FG cum GL, siue vt KL ad GL, & permutando NK ad KL, vt GF ad GL, vel vt NG ad GF, vel vt [e] NF ad FL, ergo recta KAM Ellipsim ALCN contingit [f] in A, sed eadem KAM contingit quoque ad idem punctum A Ellipsim ABCO: quapropter Ellipsis ALCN datæ ABCO erit [g] circumscripta. At ipsa erit *MINIMA*; nam quælibet alia, quæ ipsi adscribitur per eosdem terminos communis applicatæ AC, & cum transuersa diametro æquali ipsi LN, *licet maior fuerit eadem ALCN*, inscriptam ABCO omnino [h] secat; ergo ALCO est

a 36. primi conic.
b 79. h.
c 80. h.
d Coroll. 57. h.
e Coroll. 12. h.
f 4. h.
g 61. h.
h 83. h.

ALCO est *MINIMA* circumscripta datæ Ellipsi ABCO, per terminos applicatæ AC, cum dato transuerso DE: immo ipsa ALCN vnica est, his conditionibus circumscriptibilis. Quod faciendum, & demonstrandum erat.

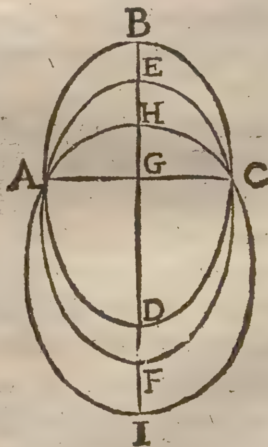
SCHOLIVM.

SI quæratur, qua nam ratione in prop. 82. ad finem, dicatur *licet minor fuerit eadem ALCN* in hac verò, *licet maior fuerit eadem ALCN* (perinde ac si, per terminos A, C, cum diametro æquali ipsi LN alia in ea describi possit Ellipsis minor ALCN, in hac verò alia maior ALCN) vtrunq; nos haud temerè dixisse ex sequēti Theoremate manifestum fiet, à quo habebitur quamlibet aliam Ellipsim per A, C, adscriptam, cum transuerso ęquali ipsi LN, sed cuius segmenta ab applicata AC abscissa, sint magis inæqualia quàm sint segmenta NF, FL, minorem esse ipsa ALCN; & è contra, eadem quę cum segmentis minus inæqualibus, quàm sint NF, FL, eadem ALCN maiorem esse.

THEOR. XL. PROP. LXXXV.

Ellipsium, per terminos communis applicatæ simul adscriptarum, & quarum transuersa latera sint æqualia, MINIMA est ea, cuius communis ordinatim ducta sit diameter coniugata: aliarum verò illa, cuius segmenta diametri sunt minùs inæqualia, minor est ea, cuius diametri segmenta sunt magis inæqualia.

SInt duę Ellipses ABCD, AECF, per terminos eiusdem applicatæ AC simul adscriptæ, & quarum transuersa BD, EF sint æqualia, sitq; AGC coniugata diameter Ellipsis ABCD, siue G eius centrum. Dico primùm hanc minorem esse altera AECF, siue esse *MINIMAM*, &c.



Etenim, cum sit DB æqualis EF, & DB bifariam secta in G, erit EF in pūcto G inæqualiter secta, vnde rectangulum BGD maius erit rectangulo EGF, cum sit [a] *MAXIMVM*; ideoque rectangulum BGD ad quadratum AG, siue transuersum [b] BD ad rectum Ellipsis ABCD, maiorem habebit rationem quàm rectangulum EGF ad idem quadratum AG, siue quàm [c] transuersum EF ad rectum Ellipsis AECF: sed transuersa BD, EF sunt æqualia, ergo rectū Ellipsis ABCD, minus erit recto AECF: si igitur Ellipsis huiusmodi Ellipses (cum sint ęqualiter inclinatæ) concipiantur esse per eundem verticem simul adscriptæ, ita vt transuersæ diametri simul congruant, ipsa ABCD, cuius rectum minus est, inscripta erit, [d] siue minor AECF, cuius rectum maius est, & sic minor quacūque alia, cuius diametri segmenta sint inæqualia: quare ABCD erit *MINIMA*, &c.

a 60. h.

b 21. primi conic.

c ibidem.

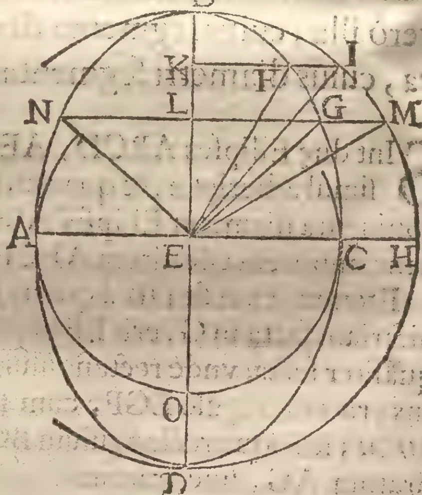
d 2. Coroll. 19. h.

Insuper, sit alia adscripta Ellipsis AHCI, cuius segmenta diametri HG, GI sint adhuc magis inæqualia, quàm segmenta EG, GF: dico AECF mirem esse Ellipsi AHCI. Ostendetur enim, vt supra, rectangulum EGF maius esse rectangulo HGI, & rectum latus Ellipsis AECF, minus esse recto AHCI, siue Ellipsim AECF inscribi posse AHCI, hoc est ipsa minorem esse. Quod erat vltimò demonstrandum.

THEOR. XLI. PROP. LXXXVI.

MAXIMA semi-diametrorum, à centro Ellipseos eductarum, est semi-axis maior, MINIMA verò semi-axis minor: aliarum autem, quæ cum MAXIMA minorem constituit angulum maior est: & quatuor sunt in Ellipsi æquales semi-diametri, quarum vna tantùm cadit in vnoquoque Ellipsis quadrante, genito ex axium intersectione.

SIt Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD; minor AC, centrum E. Dico primùm maiorem semi-axim EB esse omnium semi-diametrorum *MAXIMAM*, & semi-axim minorem EA omnium *MINIMAM*.



Cum centro enim E, & interuallo EB descripto circulo BHD, ipsæ cadit totus a ex 26. h. extra Ellipsim, cum ei sit [a] circumscriptus, vnde semi-diameter EB erit *MAXIMA*; & facto cētro E, cum radio EA descripto circulo EOC, ipsæ totus cadet intra Ellib ibidem. psim, cum ei sit [b] inscriptus, ex quo, EA erit *MINIMA*. Quod erat primò, &c.

Ampliùs in quadrāte Ellipseos AFCE ductæ sint quotcunque semi-diametri EF, EG, & sit angulus BEF minor BEG: dico EF maiorem esse EG.

Applicentur enim per F, G, ad maiorem axim BE rectæ KF, LG, quæ productæ, circuli peripheriæ BIH occurrant in I, M, & iungantur EI, EM.

c 21. primi conic. Erit in semi-circulo BHD, quadratum ML ad IK, vt rectangulum DLB ad DKB; & in semi-Ellipsi BCD, quadratum GL ad FK, [c] vt idem rectangulum DLB ad idem DKB, ergo quadratum ML ad IK, erit vt quadratum GL ad FK, siue linea ML ad IK, vt pars GL ad partem FK, & vt reliqua MG d 63. h. ad reliquam IF, sed est GL [d] maior FK: quare MG erit maior IF, ideoque rectangulum MGL sub maioribus lateribus contentum, maius erit rectangulo IFK sub minoribus, & duplum vnius, alterius duplo maius.

Iam cum triangula EKI, ELM sint rectangula ad K, L, erunt triangula EFI, EGM obtusiangula ad F, G, estque linea EI æqualis EM, ergo quadradratum EI, hoc est duo simul quadrata EF, FI, cum duplo rectanguli KEI, maiora erunt quadrato EM, siue duobus simul quadratis EG, GM,

cum

cum duplo rectanguli LGM; sed duplum rectanguli KFI, maius est duplo rectanguli LGM, vt superius ostensum fuit; quare his demptis, erunt reliqua quadrata EF, FI simul, maiora reliquis simul EG, GM, sed quadratum FI minus est quadrato GM, cum sit linea FI minor GM, ergo reliquum quadratum EF maius erit reliquo EG, siue semi-diameter EF maior semi-diametro EG. Quod secundo erat, &c.

Dico tandem, in vno quoque Ellipseos rectangulo quadrante, nempe in quadrante ABE, reperiri aliam semi-diametrum ipsi EG æqualem.

Producta enim applicata GL ad N, & iuncta EN, in triangulis ELG, ELN, est NL æqualis LG, & LE communis, & anguli ad L recti, quare bases EG, GN æquales erunt, & sic in quolibet alio quadrante; & vnaquæque semi-diametrorum vnica est in eodem quadrante, cum quæ ad partes maioris axis ducuntur, maiores sint, & quæ ad partes minoris, minores: quapropter à centro Ellipseos quatuor tantùm (in rectangulis quadrantibus inter semi-axes) semi-diametri æquales ad eius peripheriam duci poterunt. Quod vltimò demonstrandum erat.

COROLL. I.

Hinc est, quod *MAXIMA* diametrorum, in Ellipsi, est axis maior, *MINIMA* verò axis minor; eadem enim est ratio de duplis, ac de subduplis.

COROLL. II.

Patet etiam, quod si ex Ellipseos centro ad interuallum cuiuscunque semi-diametri, quæ non sit axis, circulus describatur, ipsum ad partes maioris axis cadere intra, ad partes verò minoris cadere extra, & in quatuor tantùm punctis Ellipsim secare.

THEOR. XLII. PROP. LXXXVII.

Si ad extremum axis datæ coni-sectionis ducta fuerit contingens linea, quæ cum alia ad alterum sectionis punctum contingente conueniat; semper ea, quæ inter occursum, & axem intercipitur (qui tamen in sectione Ellipsis, sit axis maior) minor est altera contingente: & in Ellipsi tantùm, contingens ex minori axe altera contingente maior est.

Sit coni-sectio AB, cuius axis BC (qui tamen in Ellipsi sit axis maior) & in Hyperbola, ac Ellipsi sit centrum D, sitque ex vertice B contingens linea BE; sumptoque in sectione quolibet alio puncto A (quod tamen in Ellipsi non sit alterum axis extremum; nam ipsæ contingentes, per 27. secundi conic. inter se æquidistarent) ab eo ducatur contingens AE *a* quæ quidem cum BE conueniet in E. Dico tangentem BE ipsa AE minorem esse. *a* 58. b.

Ducatur per occursum E diameter DEF, iungaturque AB. Patet ipsam diametrum, cum transeat per occursum tangentium, secare AB tactus iungentem *b* bifariam in F. *b* 30. secundi conic.

Iam

Iam in Parabola, quam exhibet prima huius schematis figura, cum sint BC, EF diametri [a] ipsæ erunt inter se parallelæ, BA verò eas secat, quare angulus GBF æquatur angulo EFA, sed est GBF obtusus, cum GBE sit rectus (nam est CB axis Parabolæ) ergo angulus quoque EFA obtusus erit; siue maior consequenti BFE.

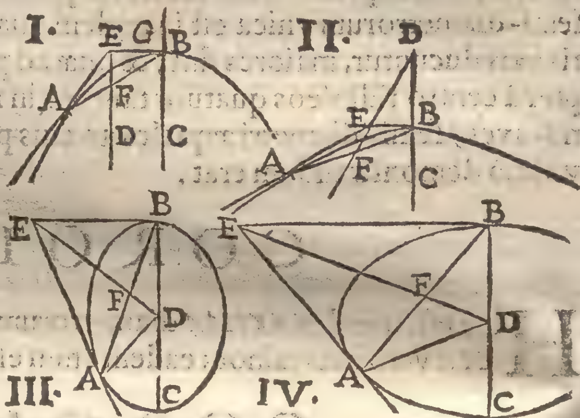
[a] cõuers. 46. pr. conic.

In Hyperbola verò secundæ figuræ, cum angulus CBA externus trianguli DBF sit acutus, (nam CBE rectus est) sitque maior interno BFE, is quidem acutus erit, & qui ei deinceps EFA erit obtusus, siue maior ipso BFE.

In Ellipsi tandem tertiæ figuræ iuncta DA, cum in trianguiis DFB, DFA sit BF çqualis AF, & communis FD [b] basis verò BD maior DA, erit angulus BFD maior angulo DFA,& ei ad verticẽ EFA maior angulo ad verticẽ BFE.

[b] 86. h.

In triangulis itaq; AFE, BFE, cuiuslibet harum figurarum, cum sit latus AF æqualis FB, & FE commune, augulus verò EFA demonstratus sit maior angulo BFE, erit basis AF maior basi BE. Quare contingens BE ex termino maioris axis, minor est altera contingente AE. Quod primò probandum erat.



Si verò, in Ellipsi ABC, quartæ figuræ, axis BC fuerit minor. Positis, & constructis ijsdem. Cum in triangulis AFD, BFD sit latus AF æquall lateri BF, & commune FD, basis verò AD maior basi DB (cum minor semi-axis DB sit *MINIMA* [c] semi-diametrorum) erit angulus AFD, siue BFE maior angulo BFD, hoc est AFE, suntque in triangulis BFE, AFE latera BF, AF [d] inter se æqualia, & latus FE commune: quare basis BE, erit maior basi AE. Quod fuit vltimò demonstrandum.

[c] ibidem.

[d] 30. sec. conic.

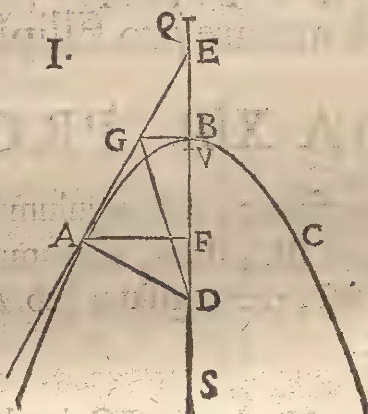
THEOR. XLIII. PROP. LXXXVIII.

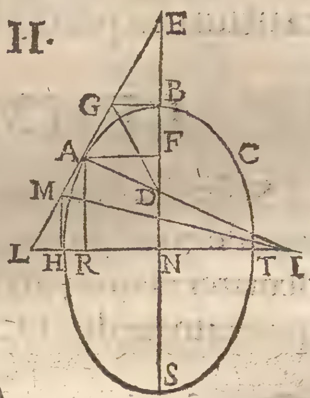
Si coni-sectionem recta linea contingens cum axe conueniat, & à tactu erigatur contingenti perpendicularis, hæc necessariò cum axe conueniet, in Ellipsi cum vtroque axe, sed priùs cum maiori; parsque ipsius intercepta inter contactum, & occursum cum axe, qui tamen in Ellipsi sit axis maior, semper minor erit eo axis segmento, quod inter occursum, & verticem intercipitur.

Cum autem in Ellipsi, contingens linea minori axi occurret, tunc prædicta perpendicularis inter contactum, & minorem axem intercepta, maior semper erit segmento minoris axis, quod inter occursum, & verticem intercipitur.

Sit coni-sectio ABC, cuius axis BD, & prima figura Parabolen, aut Hyperbolen repræsentet, secunda verò Ellipsim, cuius axis maior, sit BS, & ex

& ex puncto A in sectione extra verticem sumpto ipsam [a] contingat recta AE; quæ cum axe SB, [b] conueniet, & in Ellipsi cum vtraque axe SB, TH; sintque occursus E, L, & à contactu A erigatur ipsi perpendicularis AD. Dico primùm hanc cum axe conuenire, & in Ellipsi cum vtraque axe, sed priùs cum maiori. a 2. 4. h. b 24. 25. pr. conic.





Ducatur ex A recta AF axi ordinatim applicata, quæ cum axe rectum angulum AFE cōstituet, ac ideo angulus AEF acutus erit, sed est rectus EAD, quare AD conuenit cum EBD, vt puta in D. Eadem ratione in Ellipsi demonstrabitur ipsam AD conuenire quoque cum minori axe HT, si ex A ordinatè ei applicetur AR: nam cum angulus ARL sit rectus, angulus ALR acutus erit, sed LAD rectus ponitur, quare AD conuenit quoque cum axe minori HT, vt in I. Quod autem priùs cum maiori axe conueniat, ita ostendetur. Etenim cum recta AF sit ad axim applicata, & contingens AE cum axe in E conueniat, N verò sit centrum Ellipsis, erit rectangulum EFN ad quadratum AF, [c] vt transuersum latus ad rectum, sed quadratum AF æquatur rectangulo EFD, ergo rectangulum EFN ad rectangulum EFD, siue linea FN ad FD, erit vt transuersum latus ad rectum, hoc est vt quadratum BS ad quadratum HT (nam secunda diameter HT media proportionalis est inter transuersum BS, & latus rectum) sed quadratum BS maius est quadrato HT, cum sit BS axis maior, ergo & linea NF maior erit ipsa FD. Perpendicularis ergo AD secat priùs maiorem axem, quàm minorem. c 37. primi conic.

Dico insuper in vtraque figura interceptam DA minorem esse intercepto axis segmento DB.

Ducta enim ex B recta BG ordinatim ductæ FA æquidistante, ipsa quidem sectionem [d] continget, & alteri contingenti AE [e] occurret, vt in G. Iungatur GD: cumque anguli GAD, GBD sint recti, erunt duo quadrata DA, AG quadrato DG itemque duo quadrata DB, BG eidem quodrato DG æqualia, ergo duo simul DA, AG duobus simul DB, BG æqualia erunt, sed AG quadratum maius est quadrato BG cum ipsa tangens AG, sit [f] maior tangente BG, ergo quadtatum DA minus erit quadrato DB, siue perpendicularis DA minor maioris axis segmento DB. Quod erat primò, &c. d 32. primi conic. e 58. h. f 87. h.

Cum verò in Ellipsi tangens AL occurret minori axi TH, vt in L. Dico interceptam perpendicularem AI maiorem esse axis segmento IH.

Si enim ex H ducatur HM ordinatim applicatæ NB æquidistans hæc Ellipsim [g] continget, & alteri tangenti AL [h] occurret vt in M; iuncta ergo MI, erunt duo triangula rectangula MAI, MHI, quorum anguli ad A, & H recti sunt; quare duo quadrata MA, AI vnico MI, & duo MH, HI eidem MI æqualia erunt, ergo duo simul MA, AI duobus simul MH, HI sunt æqualia, g 32. primi conic. h 58. h.

sed

a 87. h. sed quadratum MA minus[a] est quadrato HM, ergo quadratum AI maius erit quadrato HI, siue perpendicularis intercepta AI, maior intercepto minoris axis segmento IH. Quod tandem demonstrare oportebat.

ALITER absque ope propositionis 87. præmisso tantum sequenti lemmate pro Ellipsi.

LEMMA XIII. PROP. XIC.

Si fuerit, in vtraque figura, rectangulum sub extremis AB, BD æquale quadrato mediæ BC, dico, in prima figura, si à tertia BD dematur aliqua pars BE, rectangulum sub AE, ED, minus esse quadrato mediæ EC.

Cum sit enim, vt totum AB ad totum BC, ita ablatum BC ad ablatũ BD, erit reliquum AC ad reliquum CD, vt totum AB ad totum BC.

Et cum sit CE minor CB, habebit AC ad CE maiorem rationem quàm AC ad CB, & componendo AE ad EC maiorem quàm AB ad BC, vel quàm AC ad CD. Si ergo totum AE ad totum EC maiorẽ habet rationem quàm ablatum AC ad ablatum CD, habebit reliquum CE ad reliquũ ED maiorem rationem, quàm totum AE ad totum EC, vel AE ad EC minorem habebit rationem quàm CE ad ED; ergo rectangulum sub extremis AE, ED minus[b] erit quadrato mediæ EC.

b 16. 7. Pappi.

SI verò, iisdem positis, in secunda figura, tertiæ proportionali BD recta quædam BE adijciatur; dico rectangulum sub AE, ED maius esse quadrato EC; quod licet in 9. prop. huius iam sit ostensum, hic idem aliter nulla facta constructione demonstrabimus.

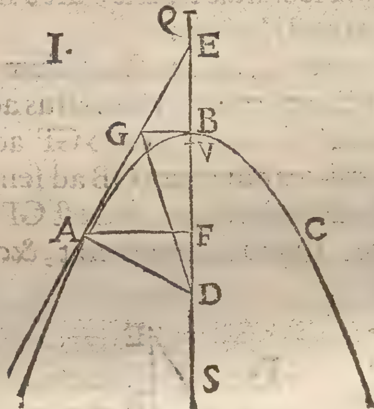
Quoniam enim CE maior est CB, habebit AC ad CE minorem rationem quàm AC ad CB, & componendo, tota AE ad totam EC, minorem quàm ablata AB ad ablatam BC, vel quàm AC ad CD, ergo reliqua CE ad reliquam ED, minorem quoque habebit rationem quàm tota AE ad EC, hoc est AE ad EC maiorem quàm EC ad ED, ergo rectangulum sub AE, ED maius[c] quadrato mediæ EC. Quod, &c.

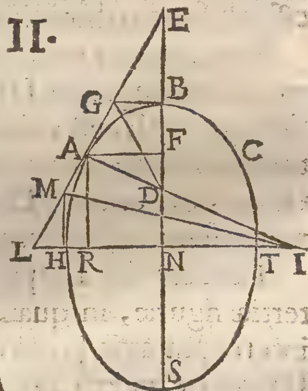
c ibidem.

IAM, vt ad expeditiorem demonstrationem præcedentis propositionis accedamus, super eisdem delineationibus, repetitis ijs omnibus, quæ ibi (vsque ad ea verba exclusiuè *Ducta enim ex B recta BG*; *&c.*) exponuntur, ac demonstrantur, sic vlteriùs prosequemur. Cum enim in singulis figuris triãgula DAE, LAI sint rectangula ad A, ex quo basibus ductæ sunt perpendiculares AF, AR; erit in triangulo DAE rectangulum EDF æquale quadrato DA,

DA, & in triangulo LAI rectangulum LIR æquale quadrato IA. Quod serua.

Iam si sectio primæ figuræ ABC fuerit Parabole, cum AE sit ei contingens erit EB æqualis * BF, ergo rectangulum EDF cum quadrato FB æquabitur quadrato BD; quare solum rectangulũ EDF, siue quadratum DA minus erit quadrato DB, siue linea DA minor DB. * 20. pr. conic.





Si verò eadem figura Hyperbolen representet, reperto eius centro Q, erit rectangulum FQE *a* æquale quadrato QB, ergo FQ ad QB, vt QB ad QE, vel vt *b* FB ad BE, sed FQ maior est QB, ergo FB erit maior BE, siue plusquam dimidium ipsa FE, diuisa ergo FE bifariam in V, erit FV minor FB, eritque rectangulum EDF cum quadrato FV æquale quadrato DV, igitur solum rectangulum EDF, hoc est quadratum DA minus quadrato DV, seu linea DA minor DV, & eò minor ipsa DB. *a* 37. primi conic. *b* Coroll. 12. h.

Amplius in Ellipsi secundæ figuræ, dum perpendicularis AD conuenit cum axe maiori, est rectangulum ENF *c* æquale quadrato NB, & à tertia proportionali NF dempta est pars ND, ergo per Lemma præcedens erit rectangulum EDF, siue quadratum DA minus quadrato DB, hoc est perpendicularis DA maiori axi occurrens, minor eiusdem axis portione DB. *c* 37. primi conic.

Tandem rectangulum LNR æquatur quadrato NH, & tertiæ proportionali NR addita est NI, ergo per idem Lemma erit rectangulum LIR, siue quadratum IA maius quadrato IH, siue perpendicularis AI minori axi occurrens maior eiusdem axis portione HI. Quod fuit, &c.

THEOR. XLIV. PROP. XC.

Si quamcunque coni-sectionem recta linea contingat ad punctum, quod non sit axis vertex, à quo ductæ sint duæ rectæ lineæ, altera contingenti, altera autem axi perpendicularis; erit in Parabola ea axis portio inter perpendiculares intercepta æqualis, in Hyperbola verò maior, sed in Ellipsi minor dimidio recti lateris eius axis, cui perpendiculares occurrunt.

Sit quæcunque coni-sectio ABC, cuius axis BD, vertex B, & aliud in ea punctum sit A, à quo ducta sit *d* contingens AE cum axe *e* conueniens in E, atque ex A erecta sit AD ipsi AE perpendicularis (quæ cum axe conueniet *f* in D) & AF perpendicularis ad axem. Dico primùm in Parabola primæ figuræ, interceptam axis portionem DF dimidio recti lateris æqualem esse. *d* 2. 4. h. *e* 24. 25. pr. conic. *f* 88. h.

 Nam

a Coroll. 1. h. b 35. primi conic.

Nam quadratum AF æquatur *a* rectangulo sub FB, & recto latere, vel sub dupla FB, siue sub *b* EF, & dimidio recti, sed idem quadratum AF æquatur rectangulo sub eadem EF, & sub FD; quare FD erit dimidium recti. Quod primò, &c.

Amplius in Hyperbola secundæ figuræ, dico interceptam portionem FD esse plusquam dimidium recti lateris.

c 37. primi conic.

Nam reperto eius centro G, erit rectangulum GFE ad quadratum AF, vel ad rectangulum DFE, vt *c* transuersum latus ad rectum, sed rectangulum GFE ad DFE, est vt linea GF ad FD, ergo GF ad FD est vt transuersum latus ad rectum, vel vt semi-transuersum GB ad semi-rectum, & permutando GF ad GB, erit vt FD ad semirectum, sed est GF maior GB, ergo FD erit maior semi-recto latere. Quod secundò erat, &c.

Tandem in Ellipsi tertiæ figuræ, in qua intercepta axis portio DF est de maiori axe, vel in quarta figura, in qua prædicta portio DF est de minori axe, dico item ipsam DF minorem esse dimidio recti lateris eius axis, cui ductæ perpendiculares occurrunt.

d ibidem.

Sumpto enim Ellipsis centro G, est rectangulũ EFG ad quadratum AF, vel ad rectangulum EFD, *d* vt transuersum latus ad rectum, sed idem rectangulum EFG ad EFD est vt linea GF ad FD quare GF ad FD est vt transuersum ad rectum, vel vt GB dimidium transuersi ad dimidium recti, & permutando GF ad GB, vt FD ad dimidium recti, sed est GF minor GB, ergo & FD erit minor quàm dimidium recti. Quod vltimò, &c.

COROLL. I.

Hinc patet in Parabola, & Hyperbola contingenti perpendicularem inter contactum, & axem, semper esse plusquam dimidium recti lateris sectionis. Nam in triangulo AFD recta AD recto angulo opposita maior est latere DF, sed DF, vel æqualis est (in Parabola) vel maior (in Hyperbola) prædicto dimidio, quare perpẽdicularis AD erit omninò maior ipso dimidio.

COROLL. II.

PAtet quoque in Parabola, & Hyperbola interceptam axis portionem inter verticem, & contingenti perpendicularem ſemper item eſſe pluſquam dimidium recti lateris propriæ ſectionis. Quoniam cum demonſtratum ſit DB maiorem [a] eſſe DA, & DA in præcedenti Corollario ſit maior dimidio recti lateris, eò magis DB erit maior prædicto dimidio. [a] 88. h.

COROLL. III.

MAnifeſtum eſt etiam in Hyperbola, & Ellipſi ſemper eam axis portionem, quæ eſt inter centrum ſectionis, & ordinatim ductam ex contactu, ad portionem eiuſdem axis inter ipſam ordinatam, & contingenti perpendicularem, eſſe vt ſemi-tranſuerſum ſectionis ad ſemi-rectum, vel vt tranſuerſum ad rectum. Demonſtratum eſt enim in ſecunda, tertia, & quarta figura rectam GF ad FD eſſe vt tranſuerſum latus ad rectum.

THEOR. XLV. PROP. XCI.

Si Ellipſim quædam recta linea contingat inter axium extrema, cui à tactu ducta ſit perpendicularis cum vtroque axe conueniens, ſemper ipſius portio inter contactum, & minorem axim intercepta, eſt maior ſemi-axe maiori; portio verò inter contactum, & maiorem axim, maior eſt ſemi-recto latere maioris axis; & eadem portio eſt minor ſemi-axe minori; ac demum portio inter contactum, & minorem axim minor eſt ſemi-recto latere minoris axis.

SIt Ellipſis ABC, cuius maior axis BC, minor IL, centrum G, & quædam contingens MAE inter axium extrema, quæ ipſis [b] occurret in E, M; & ex A ducta ſit ADH contingenti perpendicularis, quæ vtrique axi occurret, ſed [c] priùs cum maiori in D, cum minori verò in H. [b] 25. primi conic. [c] 88. h.

1 Dico primùm interceptam AH ſemper maiorem eſſe maiori ſemi-axe GB.

Agatur HP æquidiſtans ad GE, & AFO ad NH. Et quoniam eſt HP maior GE, & HO æqualis GF, erit rectangulum PHO, ſiue quadratum HA (in triangulo rectangulo PAH) maius rectangulo EGF, ſiue [d] quadrato GB, hoc eſt linea AH maior ipſa GB. Quod primò, &c. [d] 37. primi conic.

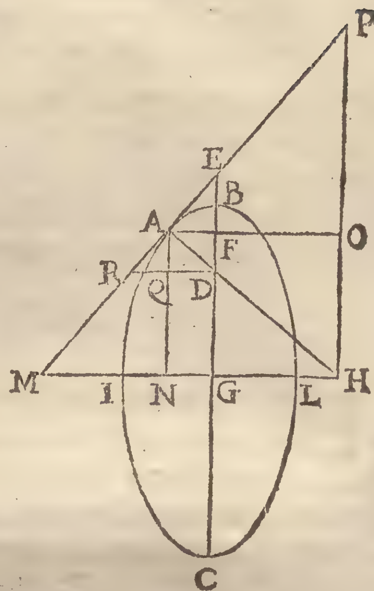
2 Ampliùs, dico AD eſſe pluſquam dimidium recti lateris axis BC.

Quoniam cum ſit GB minor AH, vt modò oſtendimus, habebit GD ad AD minorem rationem quàm AH ad AD, vel quàm FG ad FD, vel quàm eadem [e] GB ſemi-tranſuerſum, ad ſemi-rectum; vnde AD erit maior quam ſemi-rectum latus maioris axis. Quod ſecundò, &c. [e] 3. Coroll. 90. h.

3 Dico præterea eandem portionem AD minorem eſſe quam IG dimidium minoris axis.

Quoniam ducta AQN parallela ad GF, & DQR ad HM; cum sit RD minor MG, & DQ æqualis GN, erit rectangulum RDQ, siue quadratum DA, (in triangulo rectangulo RAD) minus rectangulo MGN [a] siue quadrato GI; hoc est intercepta linea DA minor semi-axe minori GI. Quod tertiò, &c.

a 37. primi conic.



4. Tandem, dico interceptam perpendicularem AH minorẽ esse quàm dimidium recti lateris minoris axis.

Etenim cum sit IG maior AD, vt supra ostendimus; habebit IG ad AH maiorem rationem quàm AD ad AH, vel quàm NG ad NH, vel quàm [b] eadem I G semi-transuersum ad semi-rectum; quare intercepta AH erit minor semi-recto minoris axis IL. Quod vltimò ostendere proponebatur.

b 3. Coroli. 90. h.

COROLL. I.

HInc est, quod semper in Ellipsi intercepta maioris axis portio inter cõtingenti perpendicularem, & verticem, maior est dimidio recti lateris maioris axis. Nam in figura huius, ostensa est AD ad numerum 2. maior semi-recto maioris axis BC, sed est DB [c] maior DA, quare DB eò maior erit prædicto semi-recto.

c 88. h.

COROLL. II.

PAtet etiam in Ellipsi, quod intercepta minoris axis portio inter contingenti perpendicularem, & verticem, est minor dimidio recti lateris eiusdem minoris axis. Quoniam supra ad numerum 4. demonstrauimus AH minorem esse semi-recto minoris axis IL, sed est [d] IH minor AH, quare IH eò minor erit prædicto semi-recto.

d ibidem.



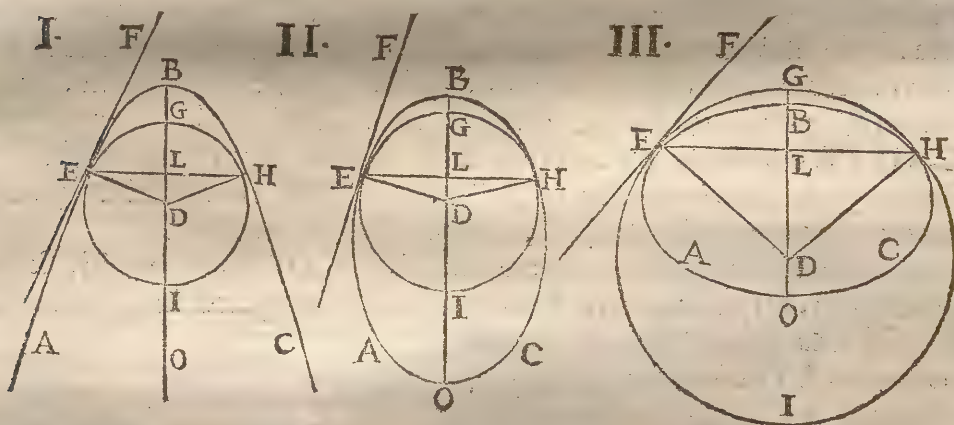
THEO-

THEOR. XLVI. PROP. XCII.

Si Parabolen, vel Hyperbolen, aut Ellipſim circa maiorem axim recta linea, præter ad verticem contingat, cui à tactu ducta ſit perpendicularis axi occurrens; circulus, cuius centrum ſit idem occurſus, radius verò ſit ipſa perpẽdicularis erit ſectioni inſcriptus.

Si autem Ellipſis fuerit circa minorem axim, cui prædicta perpendicularis occurrat, circulus ex ea tanquam radio, at centro facto ipſo occurſu, erit eidem Ellipſi circumſcriptus.

ESto ABC, Parabole, vel Hyperbole, in prima figura, aut Ellipſis in ſecunda, circa maiorem axim BO; vel circa minorẽ, vt in tertia, quarum vertex B, & ad aliud punctum quædam contingens EF, cui ducta ſit perpendicularis ED, quæ axi occurret [a] in D, quo facto centro, & interuallo DE circulus EGHI deſcribatur. Dico primùm hunc, in prima, & ſecunda figura, datæ ſectioni eſſe inſcriptum. [a] 88. h.



Applicata enim EH, ſecante axim in L, & iuncta DH. Cum in triangulis ELD, HLD anguli ad L ſint recti, & latera EL, LD æqualia lateribus HL, LD, erit baſis DE æqualis DH, ex quo circulus ex DE tranſibit omnino per H, ideoque coni-ſectio, & circulus, ſunt binæ ſectiones ſimul adſcriptæ (cum earum diametri, & applicatæ ſimul congruant) quæ in iiſdem extremis communis applicatæ EH ſimul conueniunt, atque ad eorum alterum E, eadem recta EF vtranque ſectionem contingit, nempe ſectionem ABC, ex ſuppoſitione, & circulum EGHI, cum EF ſit ad extremum ſemi-diametri ED perpendicularis, atque vertex circuli G cadit infra B verticem ſectionis, cum ſit DB [b] maior DE, ſiue maior DG, quare circulus ex DE erit [c] ſectioni inſcriptus. Quod primò erat, &c. [b] ibidem. [c] 61. h.

AMpliùs, dico in tertia figura, prædictum circulum EGHI eſſe datæ Ellipſi ABCO circumſcriptum.

Nam facta eadem conſtructione, ac ſupra oſtendetur pariter circulum

transire

transire per H, adscriptum esse Ellipsi ABCO, & Ellipseos contingentem EF circulum quoque contingere, sed huius verticem G, cadere vltra Ellipseos verticem B, cum sit DE, vel DG maior [a] DB, quare circulus ex DE erit Ellipsi ABCO [b] circumscriptus. Quod erat vltimò demonstrandum.

a 88. h.
b 61. h.

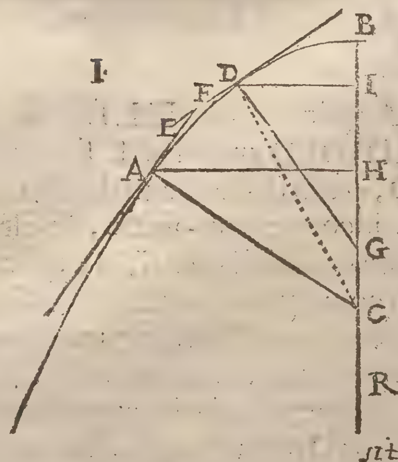
THEOR. XLVIII. PROP. XCIII.

Si Parabolen, vel Hyperbolen, aut Ellipsim circa maiorem axim quotcunque rectæ lineæ ad easdem axis partes, præter verticem contingant, quibus à tactibus ductæ sint perpendiculares axi occurrentes: ipsæ, quò magis contactuum puncta à maioris axis vertice distabunt eò maiores erunt.

E contra: si Ellipsis fuerit circa minorem axim, huiusmodi perpendiculares semper decrescunt, quò magis earum contactus à minoris axis vertice remouentur.

SIt AB Parabole, vt in prima figura, vel Hyperbole, vt in secunda, aut Ellipsis circa maiorem axim BR, vt in tertia, vel circa minorem, vt in quarta, quas sectiones duæ rectæ AE, DF ad easdem axis partes, & in Ellipsi in eodem quadrante BLM ad duo quælibet puncta contingant, præter verticem B, quibus erectæ sint perpendiculares AC, DG axi occurrentes in C, G. Dico primùm in Parabola, & Hyperbola, ac in Ellipsi tertiæ figuræ interceptam perpendicularem AC ex puncto A, remotiori à vertice, maiorem esse perpendiculari DG ex puncto D propinquiori.

1. Nam, in singulis figuris, cum anguli CAE, GDF sint duo recti, & contingentes AE, DF cadant extra sectionem, & si concipiatur iungi recta AD, ipsa cadat tota intra sectionem, anguli, quos eadem AD conficiet cum perpendicularibus AC, DG, minores erunt duobus rectis, quare ipsæ conuenient simul ad partem axis, vel vltra, vel inter contactus, & axim.



2. Iam, ducta DI parallela ad AH, siue axi perpendiculari, cum in Parabola primæ figuræ [c] sit CH æqualis GI, vtraque enim est [d] dimidium recti lateris, & AH maior DI, erunt quadrata simul CH, AH, siue quadratum AC, maius quadratis simul GI, DI, siue quadrato DG, hoc est linea AC maior DG.

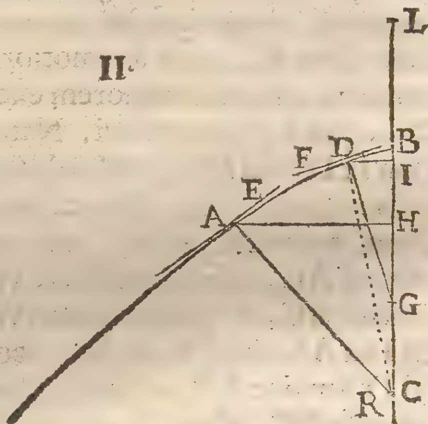
c 35. primi conic.
d 90. h.

3. In Hyperbola verò secundæ figuræ sumpto eius centro L: cum LH ad HC, itemque LI ad IG, [e] vt transuersum latus ad rectum, erit LH ad HC, vt LI ad IG, & permutando LH ad LI, vt HC ad IG, sed est LH maior LI, ergo, & HC, maior IG, estque HA maior ID, quare duo

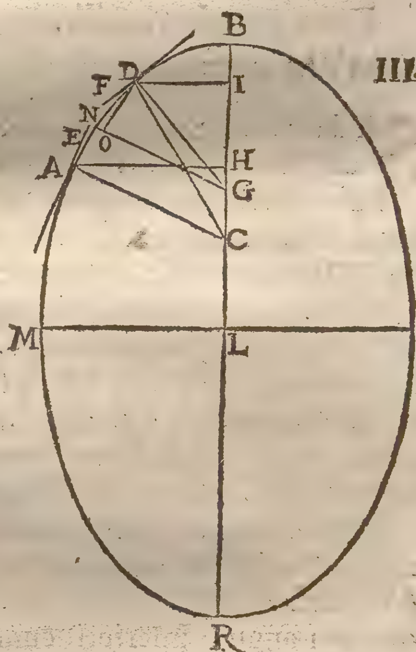
e 3. Coroll. 90. h.

simul

ſimul quadrata C H, H A, ſiue vnicum quadratum A C, maius eſt duobus ſimul quadratis G I, I D, ſiue vnico quadrato D G, hoc eſt linea A C maior D G.



4. At in Ellipſi tertiæ figuræ cum licet A H excedens ſemper D I, non tamen ſit C H, vel æqualis, vel maior G I, ſed omnino minor (eſt enim L H ad H C, itemque L I, ad I G, vt [a] tranſuerſum ad rectum, ideoque L H ad H C, eſt vt L I ad I G, ſed permutando L H maior eſt L I, ergo, & H C maior I G) oportuit hic aliam demonſtrationem inquirere, quæ, tum Hyperbolæ, tum Ellipſi circa maiorem axim ſimul inſeruiet, ſi concipiatur tertia figura vtriuſque ſectionis ſpeciem exhibere. *a 3. Coroll. 90.h.*



Itaque, vel ordinata AH, quæ ex remotiori contactu à vertice B applicatur, occurrit axi in puncto G, vel infra, vel ſupra. Si primum, vel ſecundum, patet punctum C eò magis cadere infra G. Si tertium, hoc idem tamen demonſtrabitur, videlicet punctum C cadere omnino infra G. Cum ſit enim GI maior GH habebit L G ad G I minorem rationem quàm LG ad GH, & componendo L I ad I G minorem item rationem quàm LH ad HG, ſed vt L I ad I G, ita LH ad HC, vt ſuperiùs oſtendimus, quare LH ad HC, minorem habebit rationem quàm eadem LH ad HG, vnde HC maior eſt HG, ſiue punctum C cadit infra G; quapropter intercepta perpendicularis AC, ex A remotiori contactu à vertice B, occurrit axi infra occurſum G interceptæ perpendicularis DG, ex propiori contactu D.

5. Iam AC, & DG conueniunt ſimul ad partem axis BC, vt hic ad numerum 1. oſtenſum fuit, & eſt punctum C infra G, quare ſi ex G ducatur GN, parallela ad C A ipſa ſectionis peripheriam ſecabit inter A, & D, vt in N. Si igitur concipiantur puncta A, N, iungi recta linea, ipſa cadet tota intra ſectionem, & producta, axi occurret extra ad partes B, & fiet triangulum, in quo AC erit maior NG; itaque ſi cum centro G, interuallo GD deſcribatur circulus DO, cum [b] ſit ſectioni ſemper inſcriptus, ipſæ ſecabit rectam GN, vt in O, eritque NG maior GO, ſiue maior GD, quare eò magis AC maior erit DG. Quod erat primò demonſtrandum. *b 92.h.*

6. IN

6. IN quarta autem figura Ellipsis circa minorem axim BR, in qua prædictæ contingentibus perpendiculares ipsi BR occurrunt: dico AC, quæ à remotiori contactu educitur minorem esse DG, quæ à propinquiori. Nam cum sit DO ad DG, vt IL ad IG, vel vt [a] transuersum latus ad rectum, vel vt HL ad HC, vel vt AN ad AC, erit DO ad DG, vt AN ad AC, & permutando, vt DO ad AN, ita DG ad AC, sed est DO maior AN, vt supra ad numerum 5. ostensum est, ergo, & DG maior erit ipsa AC. Quod secundò ostendere propositum fuit.

a 3. Coroll. 90.h.

PROBL. XXXIV. PROP. XCIV.

Dato angulo rectilineo, ad punctum in eius latere datum MAXIMVM circulum inscribere.

SIt datus angulus rectilineus ABC, & punctum in eius latere datum sit A, ad quod oporteat *MAXIMVM* circulum inscribere.

Bifariam secetur angulus à recta BD, & ex A ipsi AB perpendicularis erigatur AE, occurrens BD in E; & centro E, interuallo EA describatur circulus. Dico hunc esse *MAXIMVM* quæsitum.

Nam sumpta BC ipsi BA æquali, iunctisque AC, EC; cum latera AB, BE, æqualia sint lateribus CB, BE, & anguli ad B æquales, erit EA æqualis EC. Insuper sunt BA, AE, ipsis BC, CE æqualia, vtrunque vtrique; & basis BE communis, ergo angulus BAE angulo BCE æqualis, nempe rectus quare circulus ex EA per C transibit, contigetque latera BA, BC, siue erit angulo ABC inscriptus. Dico hunc esse *MAXIMVM* quæsitum.

Nam si centra circulorum ad A pertinentium, fuerint in portione perpendicularis AE, inter A, & E; ipsi, vt satis constat, erũt quidem angulo inscripti, cum circulo quoque inscripti sint; sed minores erunt circulo ADC cum sint minoris radij; illi verò quorum centra sunt in producta AE, vt in F, sunt quidem maiores, sed latus BC omnino secat: quoniam ducta FG parallela ad EC, quæ productæ AC occurrat in G, cum sit AF ad FG, vt AE ad EC, sitque AE ipsi EC æqualis, erit quoque AF æqualis FG: quare circulus ex FA transibit per punctum G, quod est extra angulum; ideoque in se remeans secabit omnino latus BC, quod est infinitæ extensionis. Si verò centrum sumatur extra prædicta perpendicularem

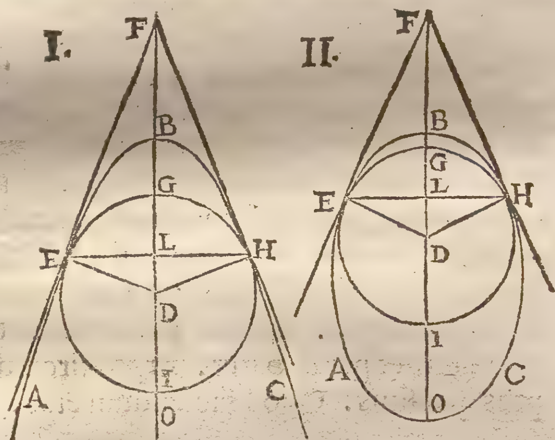
cularem AE, vt in H, patet iunctam HA, cum recta BAI inæquales angulos efficere, ac ideò peripheriam circuli ad partem acuti anguli cadere extra datum angulum, & ad partem obtusi cadere intra, sicque latus dati anguli secare. Quapropter circulus ACD erit *MAXIMVS* inscriptus ad datum punctum A. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXV. PROP. XCV.

Datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ, siue Ellipsi circa maiorem axim, ad datum punctum in eius peripheria, præter axis verticem, MAXIMVM circulum inscribere.

SIt ABC data Parabole, vel Hyperbole, in prima figura, vel Ellipsis circa maiorem axim BO, in secunda, quarum vertex sit B, & punctum in ea sumptum præter B sit E. Oportet ad punctum E *MAXIMVM* datæ sectioni circulum inscribere.

Ducatur ex E sectionem contingens EF, cui erigatur perpendicularis ED axi [a] occurrens in D. Dico si cum centro D, interuallo DE, circulus EGHI describatur ipsum esse quæsitum: nam esse inscriptum patet ex prima parte 92. huius; quod autem sit *MAXIMVS* constabit sic: applicata enim ELH, & producta EF axi occurrens in F, iunctaque FH, hæc pariter sectionem [b] cõtinget, & fiet angulus EFH, & quilibet alius circulus, vel cadet intra AGHI, vel secabit latera anguli EFH, vt in præcedenti ostensum fuit, ac ideò secabit priùs sectionem. Quare circulus EGHI erit *MAXIMVS* sectioni inscriptus ad punctum A E Quod erat faciendum.



a 88. h.

b 59. h.

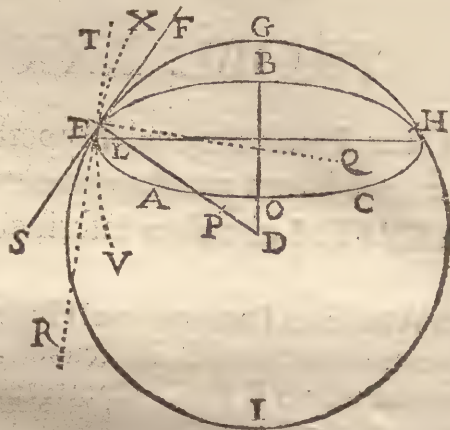
PROBL. XXXVI. PROP. XCVI.

Datæ Ellipsi circa minorem axim, ad datum punctum in eius peripheria, præter axis verticem, MINIMVM circulum circumscribere.

SIt data Ellipsis ABC, circa minorem axim BO, cuius vertex B, & in pepheria datum punctum, præter B, sit E, per quod oporteat *MINIMVM* circulum circumscribere.

Ducatur EF Ellipsim contingens, cui ex E perpendicularis erigatur ED, maiori axi occurrens in L, minori verò in D: quo facto centro, & interuallo DE circulus describatur EGHI. Dico hunc esse quæsitum.

Nam esse circumscriptum, patet ex secunda parte 92. huius. Sed est quoq; *MINIMVS*: quoniam quilibet alius circulus, cuius radius, maior sit ipso DE, est omnino maior circulo EGHI, & cuius radius minor sit DE, est quidem minor, sed vel totus cadit intra Ellipsim, vel eius peripheriam necessariò secat. Nam si centrum fuerit in perpendiculari ED, & radius non maior distantia EL, quæ cadit inter [a] contactum E, & maiorem axim, circulus cadet totus intra, & si radius fuerit maior EL, qualis est EP, tunc eius circulus cadet totus intra circulum EGHI, sed licet ipsius peripheria ad partes G, B, statim ac discedit ab E, cadat inter peripheriam circuli AGH, & peripheriam Ellipsis EBH, cum tamen in se ipsum redeat, necessariò Ellipticam peripheriam EBH secabit, nam spatium EGHB est vndique occlusum.



a 92. h.

Si verò centrum fuerit extra perpendicularem ED, vt in Q: iuncta QE cum contingente SEF inæquales angulos efficiet, quorum alterum, videlicet SEQ obtusus erit, quare si ipsi EQ erigatur perpendicularis ER, hæc omninò secabit [b] Ellipsim: quare si cum centro Q, interuallo QE circulus describatur XEV, ipsæ ad partes secantis ER secabit omnino Ellipsis peripheriam, vt per se patet. Ergo circulus ex DE est *MINIMVS* circumscriptus quæsitus. Quod faciendum erat.

b 32. primi conic.

THEOR. XLVIII. PROP. XCVII.

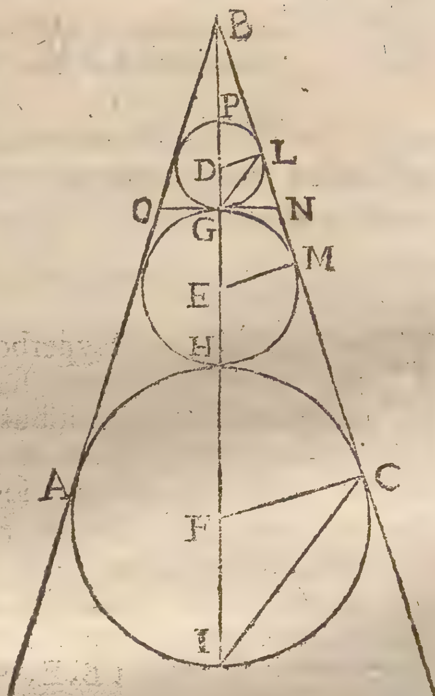
MAXIMI circuli angulo rectilineo inscripti, & successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in continua, eademque ratione geometrica, quæ progreditur iuxta quadrata tangentium, ex vertice dati anguli ductarum.

ESto angulus ABC, cuius axis BDEF, in quo sint centra D, E, F, &c. *MAXIMORVM* circulorum dato angulo inscriptorum, & mutui ipsorum contactus sint G, H, &c. ad latus verò anguli, contactus sint L, M, C, &c. Dico hos circulos inter se esse in continua, eademque ratione geometrica, ipsamque incedere iuxta quadrata contingentium BL, BM, BC, &c.

Iunctis enim DL, EM, FC, & GL, IC. Cum in triangulis BLD, BCF, anguli BLD, BCF sint recti, & angulus ad B communis, erit reliquus BDL,

reliquo

reliquo BFC æqualis, qui sunt anguli ad centra D, F: ergo ipsorum dimidia ad circumferentias, hoc est anguli BGL, BIC æquales erunt, vnde GL æquidistabit IC: quare, vt CB ad BL, ita IB, ad BG, vel sumpta communi altitudine BH, ita rectangulum IBH, siue quadratum BC, ad rectangulum HBG, vel ad quadratum BM: cum ergo sit CB ad BL, vt quadratum CB ad quadratum BM, erunt tres contingentes BC, BM, BL, in eadem ratione geometrica, sed CB ad BM, est vt CF ad ME, & MB ad BL, vt ME ad LD; ergo CF, ME, LD, vti etiam ipsarum quadrata, siue *MAXIMI* circuli ex FC, EM, DL erunt in eadem ratione geometrica, quę procedit iuxta quadrata contingentium BC, BM, BL. Quod ostendere proponebatur.

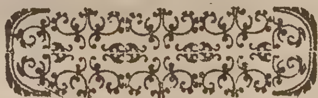


COROLL.

HInc elicitur, quod si datus angulus fuerit angulus trianguli æquilateri, siue duæ tertiæ vnius recti, prædicti *MAXIMI* circuli erunt inter se in continua progressione nonupla. Tunc enim in triangulo ęquilatero BNO, *MAXIMVS* inscriptus circulus ex DG singula latera ad puncta contactuum bifariam secabit, quare BL æquabitur LN, siue NG, siue NM, (cum circulum contingentes, ex eodem puncto sint æquales) hoc est BM erit tripla BL, & quadratum BM nonuplum quadrati BL, vel circulus ex EM nonuplus circuli ex DL, itemque circulus ex FC nonuplus circuli ex EM, cum sint in eadem proportione geometrica, & hoc semper, quotcunq; sint huiusmodi circuli se mutuò, & prædicti anguli latera contingentes.

Hic autem notandum est inter hos *MAXIMOS* circulos non dari *MAXIMVM*, cum infra circulum FC alij infiniti in eadem progressione dato angulo inscribi possint, eò quod ipse ad partes L sit infinitæ extensionis.

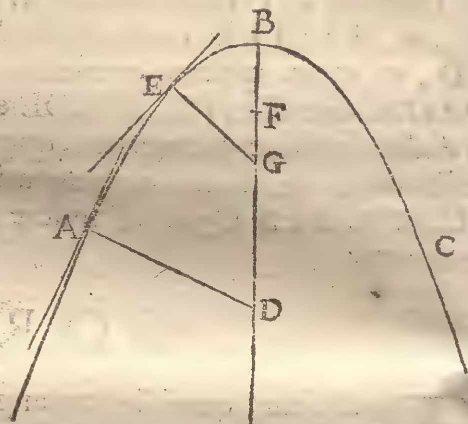
Item inter eosdem *MAXIMOS* circulos non dari *MINIMVM*; quoniam ad partes verticis B, supra circulum DL, residuo trilineo, licet terminato, alij infiniti circuli perpetuò decrescentes inscribi possunt.



THEOR. IL. PROP. IIC.

MAXIMORVM circulorum, ad puncta Parabolicę, aut Hyperbolicæ peripheriæ inſcriptorum, MINIMVS eſt, qui ad axis verticem inſcribitur. Aliorum verò is, cuius contactus magis diſtat à vertice, maior eſt, neque datur MAXIMVS.

ESto Parabole, vel Hyperbole ABC, cuius axis BD, vertex B, & in eius peripheria ſumpta ſint quælibet puncta A, E extra verticem B, à quo agantur contingentibus perpendiculares AD, EG, & ab axe abſciſſa ſit BF, æqualis dimidio recti datæ ſectionis. Patet ſi cum centris F, G, D, inueruallis verò FB, GE, DA circuli deſcribantur, ipſos datæ ſectioni ABC eſſe inſcriptos, atque *MAXIMOS* [a] ad puncta B, E, A inſcriptibilium. Dico iam inter hos *MAXIMOS*, *MINIMVM* eſſe eum, qui ad verticem B inſcribitur. Aliorum autem illum, qui ad punctum E propinquius vertici, minorem eſſe eo, qui ad A vertici remotius, inſcribitur.



a 1. Coroll. 20.h. & 95.h.

Nam quælibet perpendicularis GE, DA, &c. maior [b] eſt dimidio recti, ſiue maior FB: quare circulus ex FB erit *MINIMVS*, &c. ſed GE, quæ à contactu vertici propiori, minor [c] eſt DA, quę à remotiori: quare circulus ex GE, erit minor circulo ex GA, &c. neque inter hos, *MAXIMVS* reperitur, cum ſectio Parabole, aut Hyperbole ad partes vertici oppoſitas ſit infinitæ extenſionis, ac proinde vnquam ei inſcribi nequeat circulus tàm longi interualli, quin infra alij adhuc maioris interualli inſcribi poſſint. Quod tandem erat demonſtrandum.

b 1. Coroll. 90.h.

c 93.h.

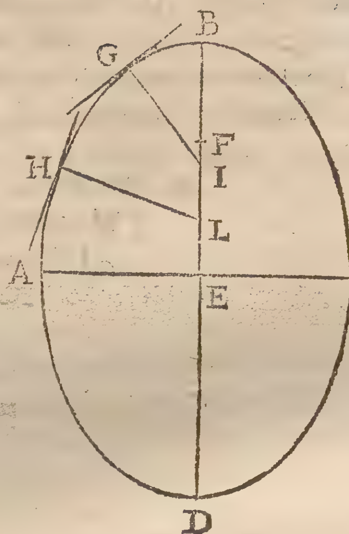
THEOR. L. PROP. IC.

MAXIMORVM circulorum, ad puncta Ellipticæ peripheriæ inſcriptorum, MAXIMVS eſt qui ad verticem minoris axis inſcribitur. MINIMVS verò, qui ad verticem maioris. Aliorum autem is, cuius contactus à vertice maioris axis magis remouetur, maior eſt.

ESto Ellipſis ABCD, cuius axis maior BD, minor AC, centrum E, ſitq; DF æqualis dimidio recti, cuius tranſuerſum latus eſt BD; & ex

punctis

punctis G, H, in Ellipsis peripheria vbicunque inter semi-axes assumptis, sint contingentibus perpēdiculares GI, HL. Constat, si cum centris E, L, I, F, interuallis verò EA, LH, IG, FB, circuli describantur, ipsos Ellipsi ABCD inscriptos esse, ac *MAXIMOS* [a] ad puncta A, H, G, B inscriptibilium. Dico iam inter hos *MAXIMOS*, *MAXIMVM* esse qui ad A, *MINIMVM* verò, qui ad B inscribitur. Aliorum autem inscriptum ad punctum H, quod à vertice B maioris axis magis remouetur, maiorem esse inscripto ad punctum G, quod ipsi vertici propius est.



a 26.92. h. 1. Coroll. 20. h.

Etenim quęlibet perpendicularis LH, IG inter semi-axes, minor est semi-axe maiori EA, sed maior [b] semper semi-recto FB: vnde circulus ex E A erit *MAXIMVS*, & ex FB *MINIMVS* inscriptibilium: sed LH maior [c] est IG: quapropter circulus ex LA, erit maior circulo ex IG. Quod probandum erat.

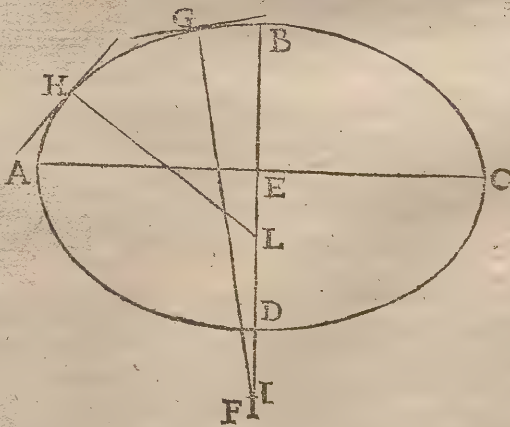
b 91. h.

c 94. h.

THEOR. LI. PROP. C.

MINIMORVM circulorum ad puncta Ellipticæ peripheriæ circumscriptorum, MINIMVS est, qui ad verticem maioris axis circumscribitur. MAXIMVS verò qui ad verticem minoris. Aliorum autem is, cuius contactus à vertice minoris axis magis distat, minor est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior AC, minor BD, centrum E, & sumpta sit BF æqualis dimidio recti, cuius transuersum latus est BD, & ex punctis G, H, vbicunque in Ellipsis peripheria inter semi-axes assumptis, sint contingentibus perpendiculares GI, HL. Constat iam, si ex centris E, L, I, F, cum interuallis EA, LH, IG, FB describantur circuli, ipsos Ellipsi ABCD circumscriptos esse, & *MINIMOS* [d] ad puncta A, H, G, B, circumscriptibilium. Dico tamen inter hos *MINIMOS*, *MINIMVM* esse, qui ad A; *MAXIMVM*, qui ad B



d 26.92. h. 1. Coroll. 20. h.

circum-

circumſcribitur. Aliorum verò, inſcriptum ad H, minorem eſſe inſcripto ad punctum G, quod minoris axis vertici propinquius eſt.

a 91. h. Quæuis enim perpendicularis LH, IG inter ſemi-axes, maior eſt ſemi-axe maiori EA, ſed minor [a] ſemper ſemi-recto FB; vnde circulus ex EA erit *MINIMVS*, & ex FB *MAXIMVS* circumſcriptibilium; ſed eſt

b 94. h. LH [b] minor IG: quare circulus ex LH erit minor circulo ex IG. Quod erat propoſitum.

At rotundus hic Propoſitionum numerus, eſt quæſo

PRIMI LIBRI
FINIS.



ADDENDA LIBI I.

IN huius operis contextu, vel etiam in ipsa perscriptione, quædam sunt, quæ aut mentem nostram, aut Amanuensis, quamuis accuratissimi, oculum effugerant: itaque sub calcem vniuscuiusque libri eadem sic addere liceat.

Pag. 74. ad finem Prim. Coroll.

Quapropter huiusmodi Parabolæ iuxta has interceptas lineas diametro B E parallelas, sunt semper inter se æquidistantes, licet iuxta intercepta applicatarum segmenta AE, ID, LM, & ad easdem partes AI, ED sint semper simul accedentes, nunquam verò coeuntes.

Ad calcem Pag. 78.

COROLL. II.

PAtet denique congruentes Hyperbolas per diuersos vertices simul adscriptas, & ad easdem partes productas, esse inter se, & simul semper magis accedentes, & semper æquidistantes. Nam iuxta intercepta applicatarum segmenta AE, SD, XY, in præcedentibus figuris huiusmodi Hyperbolæ semper fiunt propiores, licet nunquam simul conueniant; iuxta autem rectas BE, MD, ZY, ad easdem partes AS, ED, perpetuam seruant æquidistantiam, cum ipsæ BE, MD, ZY inter se æquales sint ostensæ, &c.

Pag. 87. ad finem Moniti.

atque item congruentes Hyperbolæ, &c. prout in 2. Coroll. prop. quadragesiquartæ monuimus.

Pag. 123. post Prop. 77.

Aliter idem, ac Vniuersaliùs.

MAXIMÆ similes Ellipses, Parabolæ inscriptæ, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt inter se in ratione quadratorum, disparium numerorum ab vnitate incipientium.

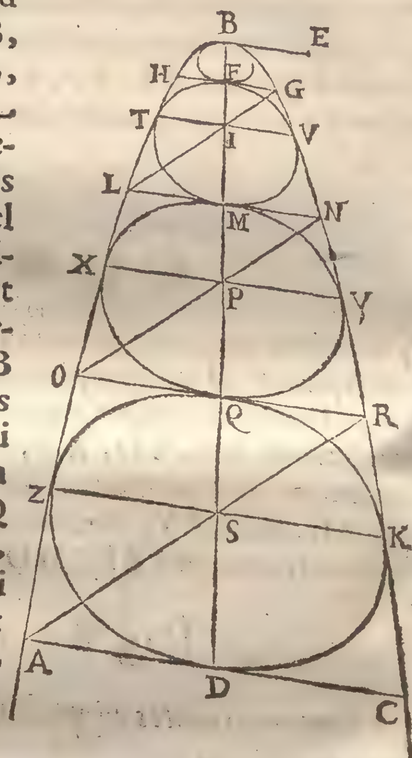
ESto Parabole ABC, cuius diameter BD, latus rectum BE, & circa quodlibet diametri segmentum BF sit ipsi Parabolæ per verticem E inscripta *MAXIMA* Ellipsis BF (quæ erit * illa, cuius rectum latus idem sit, ac rectum BE) & applicata ex F ad diametrum recta HFG, sumptaque FI æquali ipsi FB, ducatur diagonalis GIL, ex L applicetur LMN, *20.h.

atque

atque ex N agatur NPO ipsi GL parallela, ex O verò recta OQR parallela ad LN, & RSA ad NO, atque ADC ipsi OR, & hoc fiat quoties libuerit: patet, si per puncta I, P, S, intersectionum ipsarum diagonalium cum diametro, agantur applicatæ TV, XY, ZK, &c. & circa diametri segmenta FM, MQ, QD, &c. & per extrema prædictarum applicatarum describantur Ellipses TFVM, XMYQ, ZQKD, has omnes esse Parabolæ ABC inscriptas, *a* & similes inter se, ac se mutuò successiuè contingentes. Iam dico easdem Ellipses, primæ BF similes esse, atq; inter se eam rationem habere, ac numeri quadrati disparium numerorum ab vnitate: nimirum esse in progressione numerorum 1. 9. 25. 49. &c.

a ..h.

b 1. Coroll. 13. h.



Quoniam igitur est *b* MB ad BI, vt BI ad BF, erit diuidẽdo MI ad IB, vt IF ad FB, sed est IF æqualis FB, ex constructione, quare MI ipsi IB æqualis erit, ac ideo in Ellipsi TFVM, erit quadratum TI ad rectangulum MIF, hoc est rectum eius *c* latus ad transuersum, vt idem quadratum TI, vel rectangulum *d* sub IB, & recto BE, ad rectãgulum sub eadem IB, & sub IF, hoc est vt linea BE ad IF, (cum sit IB communis rectangulorum altitudo) vel ad ei æqualem BF, nempe vt rectum ad transuersum Ellipsis BF: quapropter Ellipsis BF ipsi TFVM eri similis, sed vnaqueque aliarum inscriptarum Ellipsium circa diametri segmenta MQ, QD, &c. eidem TFVM est similis, vt supra monuimus, quare omnes huiusmodi inscriptæ Ellipses erunt similes inter se. Et cum sit MI equalis IB, & IB dupla FB, erit tota MB quadrupla BF. Si ergo BF concipiatur vt vnum, erit BI vt 2, & MB vt 4, atque MI vt 2, & MF vt 3.

c 21. primi Conic.
d Coroll. 1. huius.

Cumq; in triangulis PMN, IFG sint anguli ad M, F inter se æquales, ob æquidistantes applicatas MN, FG; atque anguli ad P, I item equales, ob parallelas diagonales NP, GI, erunt reliqui ad N, G pariter æquales, siue ipsa triangula inter se similia, vnde latus NM ad MP erit, vt latus GF ad FI, & permutando NM ad GF, vt MP ad FI, vel quadratum NM ad GF, siue *e* recta MB ad BF; hoc est 4. ad 1, vt quadratum MP ad quadratum FI; vnde quadratum MP quadruplum erit quadrati FI, siue linea MP dupla FI, siue dupla ad BF, sed BF ponitur vt vnum, ergo MP erit 2; estque BM 4, ergo BP erit 6, estque BM ad BP, vt est *f* BP ad BQ, quare BQ erit vt 9, sed BM est vt 4, ergo MQ erit 5. Præterea, eadem ratione, ac supra, ostendetur triangulum RQS simile triangulo GFI, & quadratum RQ ad GF esse vt quadratum QS ad FI, sed est *g* quadratum RQ nonuplum quadrati GF, cum sit recta QB nonupla BF, vt modò ostendimus, ergo, & quadratum QS erit nonuplum quadrati FI, siue quadrati BF, hoc est linea QS tripla BF, quare tota BS erit vt 12; estq;

e 20. primi Conic.
f 1. Coroll. 13. h.
g 20. primi Conic.

BQ

BQ ad BS, a vt BS ad BD, quare cum BQ sit 9, & BS 12, erit BD 16, & QD 7, & sic vlteriùs demonstrabuntur diametri huiusmodi similium Ellipsium Parabolæ inscriptarum, &c. à vertice sumptæ, augeri iuxta progressionem disparium numerorum ab vnitate, nempe vt numeri 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Sed Ellipses similes sunt inter se, vt quadrata homologarum diametrorum: quare eædem *MAXIMAE* Ellipses Parabolæ ABC inscriptæ, & à vertice successiuè se mutuò contingentes, sunt in ratione quadratorum disparium numerorum ab vnitate. Quod probandum erat. a 1. Coroll. 13. h.

COROLL.

Hinc iterum apparet veritas Prop. 77. huius. Nam si BD diameter datæ Parabolæ ABC, fuerit axis; & prima Ellipsis circa segmentum BF fuerit circulus, reliquæ Ellipses infra hanc successiuè inscriptæ, erunt pariter Circuli, & demonstratio, ac conclusio omnino erit eadem, ac in superiori.

Pag. 131. post Prop. 84.

In hac, & in proxima præcedenti 82. propositione ex ipsamet constructione, ac demonstratione elicitur, nos vtrobique assumpsisse datam applicatam AC ad diametrum datæ Ellipsis, nunquam per centrum transire: in hoc enim casu vtriusque Problematis solutio facillimè patebit, tunc nimirũ, si hinc inde à centro super diametrum sumatur dimidium dati transuersi lateris, atque circa ipsorum dimidiorum aggregatum, tanquam circa transuersum diametrum, & per extrema ipsius applicatæ describatur Ellipsis, quę vel erit b *MAXIMA* inscripta, vel *MINIMA* datæ Ellipsi circumscripta, cum eadem applicata AC sit tanquam communis secunda diameter, vel prout commune transuersum latus vtriusque Ellipsis, &c. b 2. Coroll. 19. h.

Pag. 144. ad calcem Prop. 93.

Lineæ, quæ ibi in figuris iungentes puncta C, D, manifestò indicant in ipsa transcriptione omissum fuisse sequens

SCHOLIVM.

Ex his aliàs manifestum fiet haud inutiliter animaduertisse in Parabola, vel in Hyperbola, aut in quadrante Ellipsis circa maiorem axim, prædictarum contingentibus perpendicularium ad easdem axis partes ductarũ, quæ à contactu vertici remotiori ducitur occurrere axi infra occursum superioris perpendicularis, ac simul vltra axim conuenire ad partes contactibus oppositas: sed in quadrante Ellipsis circa minorem axim se mutuò secare inter tangentium contactus, & minorem axim in angulo quadrantis, qui deinceps est ei, ad cuius peripheriam ductæ sunt perpendiculares; ac ideo occursum inferioris perpendicularis cum axe minori cadere supra occursum superioris, quæ ducitur ex contactu vertici propiori.

In ſingulis enim figuris iuncta recta CD: erit in tribus primis circa maiorem axim, recta CD maior CA (cum circulus ex CA ſit ſectioni [a] inſcriptus, ac propterea ſecet CD) ſed CA maior eſt GD, vt hìc ad numeros 2, 3, & 5. oſtenſum eſt, ergo CD eò ampliùs maior erit ipſa GD, ſiue quadratum CD maius quadrato GD, vel duo ſimul CI, ID maiora duobus ſimul GI, ID, quare dempto communi DI, erit quadratum CI maius quadrato GI, vnde punctum C cadet infra G: ſed AC, DG ſimul conueniunt ad partes axis BR, vt ad num. 1. oſtendimus, ergo ipſarum occurſus erit vltra axim BR.

a 92. h.

In quarta demum figura, eſt CD minor CA (cum circulus ex CA ſit Ellipſi circumſcriptus [b]) & CA minor GD, prout ad num. 6. huius demonſtrauimus, quare CD erit omnino minor GD, ſiue quadratum CD minus quadrato GD, vel duo ſimul CI, ID minora duobus ſimul GI, ID; quamobrẽ dempto ID, erit CI minus GI, ſiue punctum C occurſus inferioris perpendicularis AC cadet ſupra G occurſum ſuperioris DG; ſed tales perpendiculares AC, DG ſe mutuò ſecant (vt ſuperiùs oſtendimus ad num. 1.) ad partes axis BR, quare ipſarum occurſus erit inter contactus, & minorem axim, ſed reſpectu maiorem axim ML ſe mutuò ſecant vltra ML, vti paulò ante demonſtrauimus. Quare in Ellipſi occurſus huiuſmodi perpendicularium AC, DG cadet in angulo quadrantis MLG, qui deinceps eſt quadranti MLB, ad cuius peripheriam MAB ductæ ſunt perpendiculares AC, DG, &c.

b ibidem.

Pag. 147. ad finem Prop. 97.

quodque de *MAXIMIS* ſimilibus Ellipſibus angulo rectilineo inſcriptis facillimùm eſt demonſtrare.

FINIS.

DE MAXIMIS, ET MINIMIS

GEOMETRICA DIVINATIO

IN QVINTVM CONICORVM APOLLONII PERGÆI

IAMDIV DESIDERATVM.

AD SERENISSIMVM PRINCIPEM LEOPOLDVM AB ETRVRIA.

LIBER SECVNDVS.

AVCTORE

VINCENTIO VIVIANI.



FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioſeph Cocchini, Typis Nouis, ſub Signo STELLÆ.

SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO
PRINCIPI LEOPOLDO
AB ETRVRIA.



ABSVRDVM, aut insolens minimè quidem est SERENISSIME PRINCEPS, non tantùm aliena largiri, verùm etiam muneris nomine animo libenti propria suscipere. Quid enim vnquam Deo Opt. Max. mortales offerre possēt, nisi suis quoque hostijs diuina benignitas oblectaretur? Quid ego Celsitudini tuæ, cuius patrocinio omnia debeo, nisi quę tua sunt tibi reddi magnanimè patereris? Ab impudentiæ nota me liberas, & frontem meam rubori subtrahis SERENISS. LEOPOLDE. Fidentiùs enim mentis meæ tenuissimos partus tibi nunc exhibere audeo, Regia namq; manu obstetrice, è tenebris in quibus delitescebant in lucem eductos, quos nuper vt proprios despiciebam, modò à perspicacissimo iudicio tuo in clientelam, atque, vt ita dicam, in liberorum locum humanissimè susceptos nonnihil æstimare cogor. Quid ergo lucubrationes hasce meas, quæ tuæ iam sunt, tibi ampliùs commendem? Quod te iubente lucem aspicerent, tuæ magnanimitatis beneficium fuit; quod tutæ à malo-

rum

rum inuidia te propugnante per Geometrarum eruditas manus incedant, tui in literas amoris beneficium erit. Hæc me alioquin, & iure, formidolosum bono esse animo efficaciter suadent. Et verè, si mihi Genethliacorum more diuinare liceret, non infelix futurum DIVINATIONIS meę fatum sperarem, quam nascentem fulgidissima lumina, Iuppiter, atque Apollo Etruriæ tam benignè aspexerunt. Hoc si vnquam videre dabitur, tuis auspicijs SERENISSIME PRINCEPS, non modò ingenium ad maiores conatus, sed & diu iacentē fortunam meam aliquando se se erecturam confido. Faxit Deus: qui (vt enixè precor) te, literarum præsidium, & decus seruet incolumem, & Heroicæ virtutis tuæ incœptis faueat.

Florentiæ Tertio Cal. Ian. 1658.

SER.[MÆ] CELS.[NIS] TVÆ



Humillimus, Obsequentiss. Obstrictiss. Seruus

Vincentius Viuiani.

VINCENTII VIVIANI
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
Geometrica diuinatio in V. conic. Apoll. Pergæi.

LIBER SECVNDVS.

LEMMA I. PROP. I.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quadratum totius æquabitur quadrato vnius partis, vnà cum rectangulo sub tota, & dicta parte, tanquam ab vna linea, & sub altera parte contento.

ESTO data recta AB vtcunque secta in C. Dico quadratum AB æquale esse quadrato alterius partis, nempe AC, vna cum rectangulo sub BA cum AC, tanquam vna linea, & sub reliqua parte BC comprehenso. Nam producta BA sumatur AD æqualis ipsi BC. Quoniam igitur DC est bifariam secta in A, ipsique adiecta CB, erit quadratum AB æquale rectangulo sub DB, BC, vnà cum quadrato CA; sed DB linea conficitur ex DA cum AB, vel ex AC cum AB; ergo quadratum totius AB æquatur quadrato partis CA, vna cum rectangulo sub BA cum AC, tanquam vna linea, & sub reliqua parte BC comprehenso. Quod erat, &c.

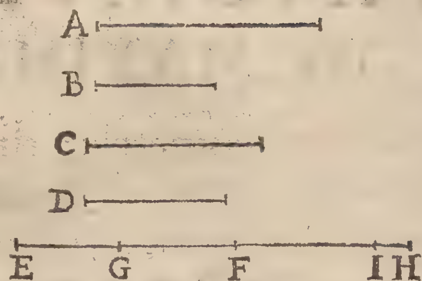


LEMMA II. PROP. II.

Si quatuor quantitatum eiusdem generis, prima superet secundam maiori excessu, quo tertia superat quartam, aggregatum extremarum maius erit aggregato mediarum.

SInt quatuor quantitates eiusdem generis A, B, C, D, & prima A superet secundam B, maiori excessu, quo tertia C superat quartam D. Dico aggregatum extremarum A, D maius esse aggregato mediarum B, C,

Nam intelligatur magnitudo E F æqualis primæ A, FG verò æqualis secundę B; atque ipsis in directum magnitudo FH æqualis tertiæ C, & F I quartæ D. Erit excessus magnitudinis E F supra F G, hoc est E G, maior excessu quantitatis H F supra F I, siue maior ipso H I, ex suppositione, quibus addita communi quantitate G I, proueniet E I maior G H, siue aggregatum ex EF, & F I, nempe extremarum A, & D, maius aggregato ex G F, & F H, vel ex medijs B, & C. Quod erat, &c.



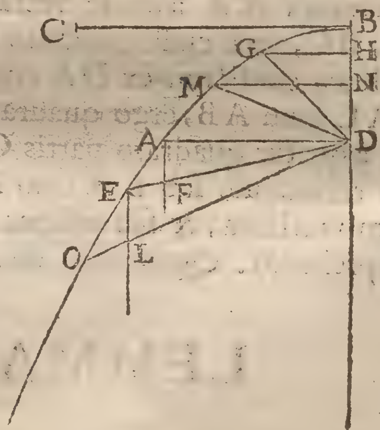
THEOR. I. PROP. III.

MINIMA linearum in Parabola ducibilium ad eius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est ipsum axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum verò ea, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum, minor est.

Esto Parabole AB, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BC datæ Parabolæ. Dico D B esse *MINIMAM* ducibilium ex eodem puncto D ad Parabolæ peripheriam A B, &c.

Applicetur axi ex D, recta D A. Erit quadratum A D [a] æquale rectangulo sub D B, & recto B C; sed rectangulum D B C maius est quadrato D B (cum latus rectum B C positum sit, vel duplum, vel magis quàm duplum ipsius B D) igitur quadratum A D maius erit quadrato D B, siue linea D A maior D B.

[a] Coroll. primę primi huius.



Rursus ducatur infra D A ex D quęcunque alia D E ad peripheriam, & ex A recta A F parallela ad B D, quæ tota ad partes F [b] cadet intra Parabolen; nec ei ad aliud punctum occurret quàm ad A; ideoque secabit eductam D E, vt in F, eritque E D maior D F, sed est D F maior D A (cum in triangulo D A F angulus ad A sit rectus, siue maior acuto ad F;) & D A maior ipsa D B, vt supra ostendimus, quare D E multò maior erit ipsa D B.

[b] 26. primi conic.

Amplius sit quæcunque D G ducta ex D supra D A, & ex G applicetur G H. Cumque latus rectum B C sit maius aggregato B D cum D H (positum enim fuit B C non maius quàm duplum segmenti BD, estque

B D maior D H) erit rectangulum sub recto C B in segmentum B H siue [a] quadratum G H, maius rectangulo sub aggregato B D cum D H, in idem segmentum B H, quibus addito communi quadrato D H, erit quadratum G H cum H D quadrato, siue vnicum quadratum G D, maius rectangulo sub aggregato B D cum D H in B H, vna cum quadrato D H, siue [b] maius vnico quadrato B D, hoc est linea D G maior erit D B. Est ergo D B *MINIMA* ducibilium ad Parabolæ peripheriam ex axis puncto D, quod abest à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris B C. Quod primò demonstrandum erat.

[a] Coroll. primę primi huius.
[b] 1. h.

Præterea sit quæpiam alia D M maiorem efficiens angulum cum *MINIMA* D B, quàm D G, & ex M applicetur M N. Iam quadratum M N superat quadratum G H eo excessu, quo rectangulum C B N superat rectangulum C B H; (ob [c] æqualitatem) hoc est rectangulo sub recto C B in H N, sed quadratum D H [d] superat quadratum D N rectangulo sub eadem H N, & sub aggregato H D cum D N, quod aggregatum, ex hypotesi, minus est ipso recto B C, ergo excessus quadrati M N supra quadratum G H, maior est excessu quadrati H D supra D N, vnde aggregatum extremorum quadratorum M N, N D, siue vnicum quadratum M D, maius erit [e] aggregato quadratorum mediorum G H, H D, siue vnico quadrato G D, hoc est linea D M maior D G.

[c] Coroll. primę primi huius.
[d] 1. h.
[e] 2. h.

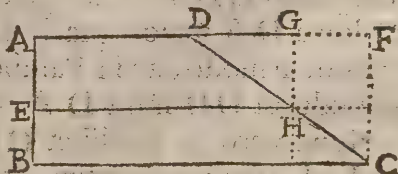
Vlteriùs, quadratum A D superat quadratum M N rectangulo sub D N, & recto B C, & quadratum D M, superat idem quadratum M N quadrato D N, quod est minus prædicto rectangulo sub D N, & recto C B, quare excessus quadrati A D supra M N, maior est excessu quadrati D M, supra idem quadratum M N; quapropter A D quadratum maius est quadrato D M, siue linea A D maior ipsa D M.

Tandem ducta quacunque D O infra D E, agatur ex E recta E L ęquidistans ad B D. Cum angulus B D E sit obtusus, erit quoque parallelarum alternus D E L obtusus, ideoque in triangulo D E L angulus D L E acutus, siue minor angulo D E L: quare latus D E minus latere D L, & eò minus educta D O. Vnde quæ minorem cum *MINIMA* constituit angulum minor est, &c. Quod omnino ostendere propositum fuit.

LEMMA III. PROP. IV.

Si inter latera parallela AD, BC, mensalis ABCD rectangulę ad B, ducta fuerit quædam linea EH ipsis lateribus æquidistans, sitq; AD minor BC. Dico rectangulum ABC, superare rectangulum AEH maiori excessu, quàm sit rectangulum EBC.

Completis enim rectãgulis EG, BF, EC; patet rectangulum ABC superare rectangulum AEH gnomone ECG, sed gnomon ECG maior est rectangulo EBC, vnde rectangulum ABC, superat rectangulum AEH maiori quantitate quàm sit rectãgulum EBC. Quod erat, &c.

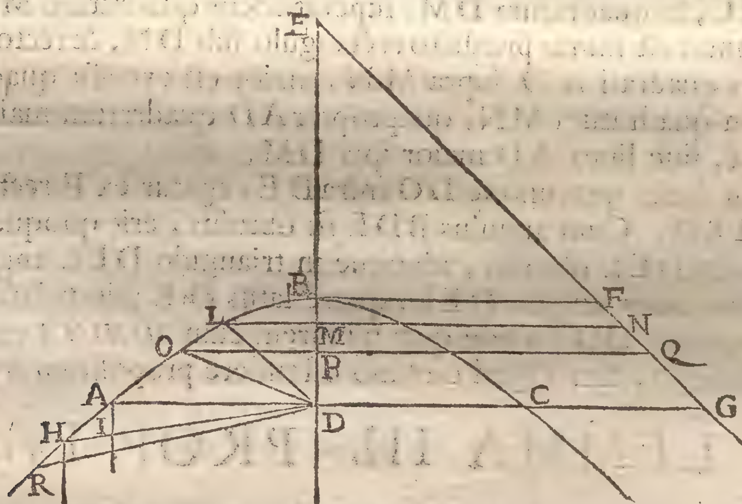


THEOR. II. PROP. V.

MINIMA linearum in Hyperbola ducibilium ad ipsius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum, non maius quàm dimidium recti lateris, est idem axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum autem, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum minor est.

Esto Hyperbole ABC, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BF (quod axi ordinatim applicetur, &c.) Dico DB esse *MINIMAM* ducibilium ex ipso puncto D ad Hyperbolæ peripheriam ABC, &c.

Sumatur in directum axi, transuersum latus BE, iungaturque regula EF, & producatur; appliceturque per D ordinata ADC, regulæ occurrens in G.



Iam, cum in triangulo EDG, sit DG maior BF, & BF maior segmento BD (ex hypotesi) erit DG eò maior ipso segmento DB, quare rectangulum GDB, [a] siue quadratum AD, maius erit quadrato DB; hoc est linea DA maior ipsa DB.

[a] Coroll. primę primi huius.

Eodem modò, ac in Parabola, ostendetur DA minorem esse quacunque educta DH infra DA, & DH adhuc minor DR, &c.

Nunc verò sit quælibet DL ducta ex D supra DA, & per L applicetur LM, quę producatur, donec regulæ EF occurrat in N. Erit in triangulo EDG, recta MN maior BF, sed BF maior est aggregato BD cum

DM

DM (cum latus rectum BF, vel duplum sit, vel plus quàm duplum ad BD) ergo MN ipso aggregato BD cum DM adhuc maior erit, vnde rectangulum sub NM in MB, a siue quadratum LM, maius erit rectangulo sub aggregato BD cum DM, in eadem MB, quibus communi addito quadrato MD, erit quadratum LM cum MD, siue vnicum quadratum DL, maius rectangulo sub BD cum DM in MB, vna cum quadrato DM, siue maius vnico quadrato DB, quod prædicto b rectãgulo æquale est, siue linea DL maior DB. Quare segmentum axis DB, non excedens dimidium recti lateris BF, est *MINIMA* linearum ducibilium ex D ad Hyperbolæ peripheriam. Quod primò ostendere oportebat.

a Coroll. primæ primi huius.

b 1. huius.

Præterea, quadratum AD superat quadratum LM, eo excessu quo rectangulum BDG superat rectangulum BMN, (sunt c enim singula singulis æqualia) sed excessus rectanguli BDG supra rectangulum BMN maius est d rectangulo MDG, ergo quadratum AD superat quadratum LM maiori rectangulo quàm MDG; sed quadratum DL superat idem quadratum LM quadrato DM, quod minus est rectangulo MDG (nam est DG maior DM, cum superiùs demonstrata sit maior ipsa DB) ergo quadratum DA maius est quadrato DL, siue linea DA maior quacunque DL, intercepta inter applicatam DA, & axem DB.

c Coroll. primæ primi huius.

d 4. huius.

Ampliùs, ducatur alia quæpiam DO supra DA, sed remotior à segmento DB quàm DL, applicataque OP, producatur donec regulatrici EF occurrat in Q. Erit excessus quadrati OP supra quadratum LM, idem ac excessus rectanguli BPQ supra BMN (nam e sunt rectangula quadratis æqualia, vtrumque vtrique) sed excessus rectanguli BPQ supra BMN maior f est rectangulo MPQ, ergo excessus quadrati OP, supra quadratum LM, maior est rectangulo sub MP, & PQ; at excessus quadrati MD supra quadratum DP, minor est prædicto rectangulo (nam quadratum MD g superat quadratum DP, rectangulo sub MD cum DP in MP, quod est minus rectangulo sub QP in eadem MP, quoniam MD cum DP minor est recto latere BF, & eò minor ipsa QP, quę maior est BF) quare excessus quadrati OP supra LM, maius est excessu quadrati MD supra DP: duo igitur extrema simul quadrata OP, PD, siue vnicum quadratum DO, maius est duobus simul quadratis medijs LM, MD, hoc est vnico quadrato DL, siue linea DO maior est linea DL. Vnde quæ minorem efficit angulum cum *MINIMA* DB, minor est, &c. Quod fuit vltimò demonstrandum.

e Coroll. primæ primi huius.

f 4. huius.

g 1. huius.

*. 2. h.

* * *
* *
*

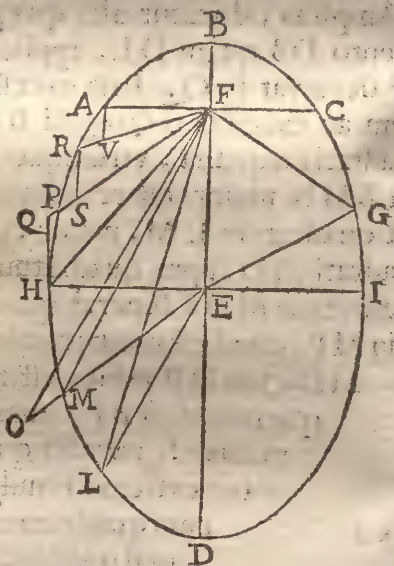
THEO-

THEOR. III. PROP. VI.

MAXIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod non sit centrum, ea est, in qua centrum. Et eductarum ad peripheriam maioris Ellipticæ portionis, cuius basis, sit recta ad axim ordinatim ducta, ex prędicto puncto; quę cum MAXIMA minorem constituit angulum, maior est. MINIMA verò in eadem portione, est ipsa semi-applicata.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD, minor HI, centrum E, & quodlibet aliud punctum in maiori axe sit F. Dico *MAXIMAM* ducibilium ab F ad vniuersam Ellipsis peripheriam esse FD, in qua centrum.

Nam, quod DF sit maior reliqua FB patet, cum FD, maior sit axis dimidio, FB verò minor.



Iam, ad quodcunque Ellipticæ peripheriæ punctum G, sit quædam educta FG, & iungatur EG. Itaque cum semi-axis maior ED, sit [a] *MAXIMA* semi-diametrorum, ipsa maior erit EG, quibus communi addita EF, erit tota DF maior duobus GE, EF, & eò maior vnica FG. Quare FD est ad vniuersam peripheriam ducibilium *MAXIMA*.

a 86. primi huius.

Insuper applicetur ex F axi ordinata AFC, & ad peripheriam eiusdem quadrantis HDE, ductæ sint ex F duę quęlibet FL, FM, & FL minorem, FM verò maiorem angulum efficiat cum *MAXIMA* FD. Dico FL maiorem esse FM. Iunctis enim EL, EM; erit [b] EL maior EM, quæ producatur, & fiat EO æqualis EL, & iungatur FO: erunt igitur duo latera FE, EL, duobus FE, EO æqualia, alterum alteri, sed angulus FEL maior est angulo FEO, ergo basis FL, maior est FO, sed FO maior est FM, (cùm in triangulo FMO angulus ad M obtusus sit, eò quod sit maior obtuso FEM) quare FL eò maior erit ipsa FM, quę cum *MAXIMA* maiorem efficit angulum: simili modo ostendetur FM maiorem esse educta FH.

b ibidem.

De eductis verò ad portionem peripheriæ HA, ita ratiocinabimur. Sit enim quælibet FP, & per H sit Ellipsim contingens HQ, quæ cum æquidistet axi BFD, secabit omnino productam FP extra Ellipsim in Q; eritque in triangulo FQH, latus FH maius latere FQ (cum angulus

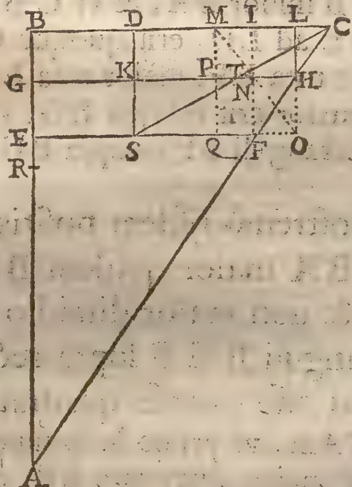
FQH

FQH sit obtusus, eò quod alterno QFB obtuso sit æqualis) sed est FQ maius FP, quare educta FH eò maior erit educta FP. Ampliùs ducta qualibet alia FR, adhuc maiorem angulum faciens cum *MAXIMA* FD, agatur per R recta RS axi FE parallela, quæ cadet intra Ellipsim, (cum sit ad minorem axim HI ordinatim ducta) secabitque FP in S, ac in triangulo FRS obtusiangulo ad R, erit latus FS maius latere FR, & educta FP eò maior educta FR; eademque ratione ostendetur quamlibet eductarum ad peripheriam HA, vtputa FR, maiorem esse semi-applicata FA, si ex A ducatur AV parallela ad EF, &c. quare eadem semi-applicata FA omnium eductarum in portione maiori ADC erit *MINIMA*. Aliarum autem, quæ cum *MAXIMA* FD maiorem angulum constituit, maior est. Quod omnino ostendere opus fuerat.

LEMMA IV. PROP. VII.

Si in triangulo ABC, cuius rectus angulus sit ad B, fuerit latus AB maius altero BC, sitque de maiori BA abscissa pars BE, quæ non excedat dimidium ipsius BC, & ex quolibet eius puncto G ducta sit GH parallela ad BC. Dico primùm ipsam GH semper maiorem esse aggregato BE cum EG. 1.

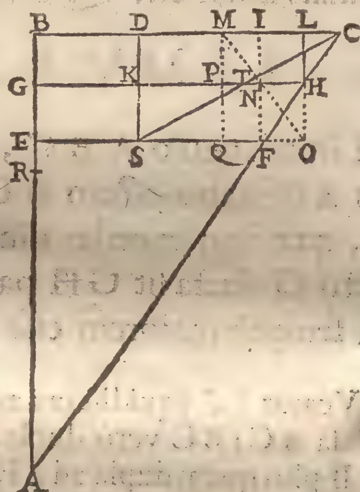
DVcatur EF equidistans ad BC. Et quoniam AB ponitur maior ipsa BC; BC verò dupla, vel plus quàm dupla ad BE, erit omnino AB plus quàm dupla ad BE, siue AE plus quàm dimidium ipsius AB, quod memento: sed, vt AE ad AB, ita EF ad BC; quare EF est maior dimidio ipsius BC, hoc est maior ipsa BE. Secta igitur ES æquali ipsi BE, ducatur SKD parallela ad BE, eritque BS parallelogrammum æquilaterum (cum EB, ES sint æquales) iungatur denique CS rectam GH secans in T.



Itaque cum EB, siue BD posita sit æqualis, vel minor dimidio ipsius BC, erit CD æqualis, vel maior ipsa DB, vel DS. Cumque sit, vt CD ad DS, ita TK ad KS, erit quoque TK equalis, vel maior ipsa KS, siue GE, quibus TK, & GE additis equalibus KG, EB, prouenient tota TG æqualis, vel maior aggregato GE cum EB, sed est HG maior ipsa TG: quare HG erit omnino maior aggregato BE cum EG. Quod, &c.

2. Præterea, ijsdem positis in eadem figura. Dico rectangulum BEF superare rectangulum BGH maiori excessu quàm sit quadratum GE.

COmpletis enim rectangulis BEFI, BGHL, productisque EF, LH vsque ad occursum in O; cum sit AE plusquàm dimidium ipsius AB, vt supra ostendimus, erit AE maior EB; cumque sit BA ad AE, ita BC ad EF, vel ad BI, erit diuidendo BE ad EA, vt CI ad IB, sed est BE minor ipsa EA, ergo, & CI minor erit ipsa IB, quare sumpta LM æquali ipsi CI punctum M non pertinget ad B.



Iam cum ML, IC sint equales, erit ML ad NH, vt IC ad NH, vel vt IF ad FN, vel vt LO ad OH, quare puncta M, N, O erunt in vna, eademque recta MNO. Postremò ducatur recta MPQ parallela ad BE. Erunt in rectangulo QL supplementa QN, LN inter se æqualia, quibus addito communi rectangulo BN, fiet gnomon GIQ æqualis rectangulo BH, sed excessus rectanguli BF supra gnomonem GIQ, est rectangulum GQ, quare excessus quoque rectanguli BF, supra BH, erit idem rectangulum GQ. Cumque sit CB minor BA, & vt CB ad BA, ita CL ad LH, erit quoque CL, vel MI, vel QF minor LH, vel BG; estque tota EF, maior tota EB, vt superiùs ostendimus, ergo reliqua QE maior erit reliqua EG, vnde rectangulum GEQ, quod est excessus rectanguli BEF supra BGH maius erit quadrato GE, Quod, &c.

3. Postremò ijsdem positis, & constructis, concipiatur quoque alia BR maior quidem BE, sed minor adhuc dimidio ipsius BA, & non maior dimidio ipsius BC. Dico tandem excessum rectanguli BEF supra rectangulum BGH, quod est GEQ, maius esse excessu quadrati GR supra RE.

NAm, vt primo loco superiùs demonstrauimus, erit tota linea EF maior aggregato BR, cum RE, sed pars QF minor est parte BG prædicti aggregati (nam est QF æqualis MI, siue LC, & BG æqualis est LH, estque CL minor LH, cum sit data CB minor quoque BA) ergo reliqua EQ maior erit reliquo eiusdem aggregati, quod est GR cum RE; vnde rectangulum sub QE, & EG, quod est excessus rectanguli BEF supra BGH, maius erit rectangulo sub GE cum RE, in eadem GE; sed rectangulum sub GR cum RE, in GE, [a] est excessus quadrati GR supra RE, ideoque rectangulum BEF superat rectangulum BGH maiori excessu, quo quadratum GR superat quadratum RE. Quod tandem, &c.

[a] 1. huius.

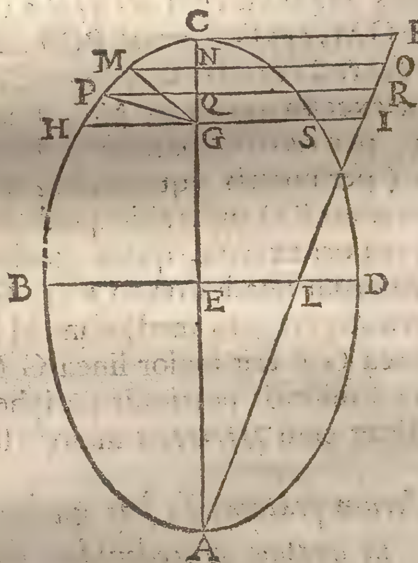
THEO-

THEOR. IV. PROP. VIII.

MINIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est idem axis segmentum, inter datum punctum, & verticem interceptum.

Aliarum autem eductarum in minori portione Ellipsis, cuius basis, sit applicata per datum punctum; quæ cum MINIMA minorem angulum constituit, minor est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior AC, minor BD, centrum E, & latus rectum maioris axis CA sit CF, & regula AF: segmentum verò CG, sit non maior dimidio CF. Dico primùm GC esse *MINIMAM* ducibilium ex G ad vniuersam Ellipsis peripheriam ABCD.



Quod enim GC, licet ponatur æqualis dimidio recti CE, sit minor reliquo axis segmento GA, patet: quoniam CA ad BD, est vt BD ad CF, & sumptis subduplis, CE ad EB, vt EB ad CG, estque CE maior EB, quare EB quoque maior est CG, & eò magis AE, immò AG maior GC.

Iam applicetur per G recta HGS, regulæ occurrens in I. Erit AE ad ad AC, vt EL ad CF, sed est AE dimidia AC, quare EL recti CF dimidia erit; estque GI maior EL, ergo GI maior est dimidio recti CF, & posita est GC non maior dimidio recti; ergo GC erit omnino minor GI, siue quadratum GC minus rectangulo CGI, siue [a] quadrato GH, hoc est linea GC minor ipsa GH, sed GH est [b] *MINIMA* ducibilium ex G ad peripheriam HAS, ergo GC eò ampliùs *MINIMA* erit ad eandem maioris portionis peripheriam HAS.

a Coroll. primę primi huius.
b 6. h.

Ampliùs, ad peripheriam minoris portionis HCS ducatur quęcunque GM, & per M applicetur MNO. Cum in triangulo rectangulo ACF ostensa sit CG minor quàm dimidium CA, sed posita sit non maior dimidio CF, & ex puncto N in CG sumpto, ducta sit NO parallela ad CF, erit NO maior aggregato CG cum GN, per primam partem 7. huius; ergo sumpta communi altitudine NC, erit rectangulum ONC, siue quadratum [c] MN maius rectangulo sub CG cum GN in NC: addito communi quadrato GN, erit quadratum MN cum quadrato NG, siue vnicum quadratum GM, maius rectangulo sub CG cum GN in NC, vnà

c Coroll. primę primi huius.

quadrato GN sed rectangulum C G cum G N, in N C, vnà cum quadrato GN, [a] conficit quadratum vnicæ CG, ergo quadratum GM maius est quadrato GC, siue linea GM maior GC: ex quò GC erit etiam *MINIMA* ductarum ex G ad peripheriam minoris portionis HCS. Vnde ipsa GC erit *MINIMA* ad totam peripheriam ABCD.

a 1. h.

Insuper rectangulum CGI superat rectangulum CNO spatio minori, quàm sit quadratum N G, per secundam partem 7. huius; quare (alijs sumptis [b] æqualibus) quadratum GH superabit quadratum MN maiori excessu quadrati GN; sed quadratum GM superat idem quadratum MN quadrato tantùm GN, ergo excessus quadrati G H supra N M, maior est excessu quadrati G M supra idem quadratum MN, quare quadratum GH maius est quadrato GM, siue linea GH maior GM.

b Coroll. primę primi huius.

Tandem ducatur GP minorem cõstituens angulum cum *MINIMA* GC quàm GM, appliceturque PQR. Erit excessus rectanguli CQR supra CNO maior excessu quadrati N G supra GQ, per tertiam partem 7. huius, ergo (permutatis æqualibus, [c] &c.) quadratum PQ superabit quadratum MN maiori excessu, quàm quadrati NG supra GQ: vnde aggregatum extremorum quadratorum PQ, GQ, siue vnicum quadratum GP, maius erit [d] aggregato mediorum MN, NG, siue vnico quadrato GM; hoc est linea G P erit maior linea G M. Quapropter linearum ex G ducibilium ad minoris portionis peripheriam H C S, quæ minorem angulum constituit cum *MINIMA* minor est. Quod erat vltimò demonstrandum.

c ibidem.

d 2. h.

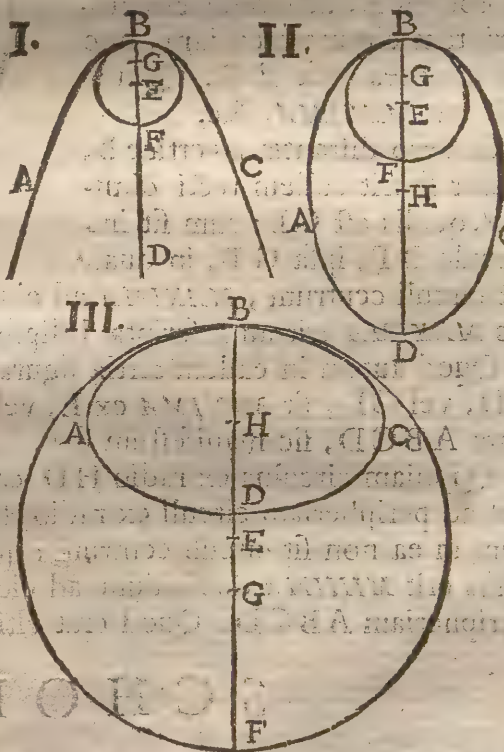
Verùm prætermissa hac methodo mihi, vt fateor, molestiori, quod in quatuor præcedentibus theorematibus, quò ad MAXIMAS tantùm, & MINIMAS attinet, hic simul, & aliquid vltra, aliter, & expeditiùs demonstrabitur.

THEOR. V. PROP. IX.

MINIMA linearum, ad peripheriam cuiulibet coni-ſectionis ducibilium à puncto axis (quod in Ellipſi ſit axis maior) diſtante à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, eſt idem axis ſegmentum inter aſſignatum punctum, & verticem interceptum. At in Ellipſi tantùm, MAXIMA eſt reliquum maioris axis ſegmentum, in quo centrum reperitur.

In Ellipſi verò circa minorem axim; MAXIMA ducibilium à puncto eiuſdem axis, quod diſtet à vertice per interuallum non minus dimidio recti, eſt ipſum axis ſegmentum, inter aſſumptum punctum, & verticem interceptum. MINIMA verò eſt reliquum minoris axis ſegmentum, in quo centrum non reperitur.

1. ESto ABC quæcunque coni-ſectio, vel Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipſis, vt in ſecunda, circa maiorem axim BD, in quo ſumptum ſit punctum E, quod primò diſtet à vertice B per interuallum æquale dimidio recti lateris axis BD, quodq; in Ellipſi omnino minus erit ſemi-axe BH (eſt enim ſemi-axis maior ad ſemi-axim minorem, vt ſemi-axis minor ad ſemi-rectum.) Dico ſegmentum axis EB eſſe *MINIMAM* linearum ex E ducibilium ad ſectionis peripheriam ABC, & reliquam BD, in qua eſt centrum, eſſe *MAXIMAM*.



Deſcripto enim cum centro E, interuallo EB circulo BF, ipſe cadet totus [a] intra ſectionē ABC: quare, quę ex centro E ad ſectionis peripheriam ducētur, præter ad B, omnino maiores erunt, quàm ductæ ex eodem centro ad circuli peripheriam, quibus æqualis eſt EB. Ergo ipſa EB erit *MINIMA*.

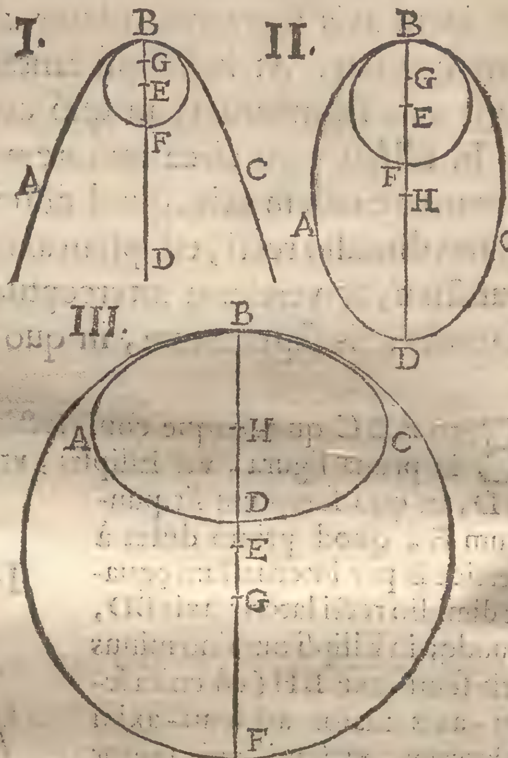
a 1. Coroll. 20. 1. huius.

Si verò, diſtantia à vertice B fuerit minor eodem recti dimidio, qualis eſt GB: cum ad peripheriam circuli BF ipſa GB ſit *MINIMA*, eò magis *MINIMA* erit ad Ellipſis circumſcriptam peripheriam ABCD.

2\. At in secunda tantùm figura, quod reliquum maioris axis segmentum E D, vel G D sit *MAXIMA* ex E, vel G ducibililium, patet: quoniam circulus ex radio H D cadit totus [a] extra Ellipsim A B C D, sed in circulo, cuius radius H D, ipsa E D, vel G D est *MAXIMA*, cum in ea sit circuli centrum: quapropter E D, vel G D eò magis erit *MAXIMA* ad inscriptam Ellipsim A B C D. Quod erat primò, &c.

[a] 26. primi huius.

3\. Iam in tertia figura sit A B C D Ellipsis circa minorem axim B D, in quo infra verticem B sumptum sit punctum E, quod à vertice distet per interuallum, quod primò sit æquale dimidio recti lateris axis B D. Dico E B esse *MAXIMAM* ex E ducibiliũ ad Ellipsis peripheriam A B C D.



Si enim facto centro E, cum radio E B circulus describatur B F, ipse cadet totus [b] extra Ellipsim; vnde, quæ ex E ad Ellipsis peripheriam ducetur, præter ad B, minores erunt, quàm quę ex eodem E, ad circuli circumscriptam circumferentiam, hoc est minores ipsa E B. Quare E B erit *MAXIMA*, &c.

[b] 1. Coroll. 20. 1. huius.

Si verò distantia à vertice B, maior fuerit eodem recti dimidio, qualis est G B: cum sit in circulo B F, ipsa G B, in qua est circuli centrum, *MAXIMA* ad eius peripheriam ducibilium, eò magis *MAXIMA* erit ad inscriptæ Ellipsis peripheriam A B C D.

4\. Quod autem in eadem tertia figura reliquum minoris axis segmentum E D, vel G D, sit *MINIMA* ex E, vel G ducibilium ad Ellipsis peripheriam A B C D, sic manifestum fiet.

Quoniam circulus ex radio H D cadit totus [c] intra Ellipsim A B C D, sed ad peripheriam circuli ex radio H D ipsa E D, vel G D est *MINIMA*, cum in ea non sit circuli centrum: quare eadem E D, vel G D eò ampliùs erit *MINIMA* ducibilium ad eidem circulo circumscriptam Ellipsis peripheriam A B C D. Quod erat vltimò demonstrandum.

[c] 26. primi huius.

SCHOLIVM.

HOC loco animaduertendum est, semper in Ellipsi circa minorem axim, tertiæ figuræ, interuallum B E semi-rectis lateris, omnino excedere minorem semi-axim B H, (cum integrum rectum latus excedat integrum minorem axim; vt in primo Coroll. 20. primi huius monitum fuit) ac idem punctum E cadere posse in quocunq; puncto infra H, ha-

bita

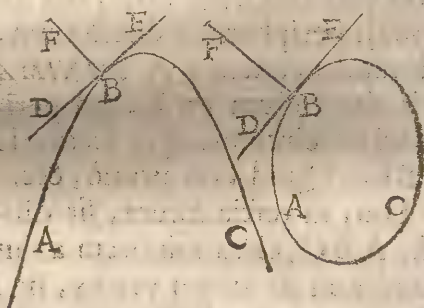
bita tamen ratione proportionis inter minorem axim, & maiorem, quæ proportio, quò minor fuerit, eò magis E, terminus semi-recti lateris, remouebitur à centro H, vt vel modicè introspicienti satis constat.

THEOR. VI. PROP. X.

Si quamcunque coni-sectionem recta linea contingat, cui à tactu extra sectionem perpendicularis erigatur, in qua sumptum sit quodlibet punctum. Linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum, erit MINIMA ducibilium ab eodem puncto, ad conuexam coni-sectionis peripheriam.

ESto coni-sectio A B C, quam contingat recta D E in B, à quo ipsi erecta sit perpendicularis B F ad partes conuexæ peripheriæ ABC, sitque in ea assumptum quodlibet punctum F. Dico rectam F B esse *MINIMAM* rectarum ducibilium ab F ad conuexam peripheriam A B C.

Hoc enim per se satis patet: nam cum F B sit perpendicularis rectæ D E, erit quoque *MINIMA* [a] ducibilium ad ipsam D E, quare F B eò magis erit *MINIMA* ducibilium ad conuexam A B C, quę cadit infra D E. Quod erat, &c. [a] ex elementis.



Quod autem de coni-sectione hoc loco ostenditur, de quacunque etiam curua linea verificari ex ipsa figura satis patet, dummodo curua A B C sit tota ad alteram partem contingentis D E, perpendicularis verò B F ad aliam.

THEOR. VII. PROP. XI.

Si quamcunq; coni-sectionem recta linea, pręter ad axis verticem contingat; cui à tactu intra sectionem erigatur perpendicularis; in qua sumptum sit punctum quodlibet; non tamen, quò ad Ellipsim, vltra maiorem axim; linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum erit MINIMA ducibilium ex eodem puncto, ad coni-sectionis peripheriam.

Si verò in Ellipsi assumptum punctum in perpendiculari fuerit, vel in ipso minori axe, vel vltra: linea inter punctum, & contactum intercepta erit MAXIMA ducibilium ex ipsomet puncto ad Ellipsis peripheriam.

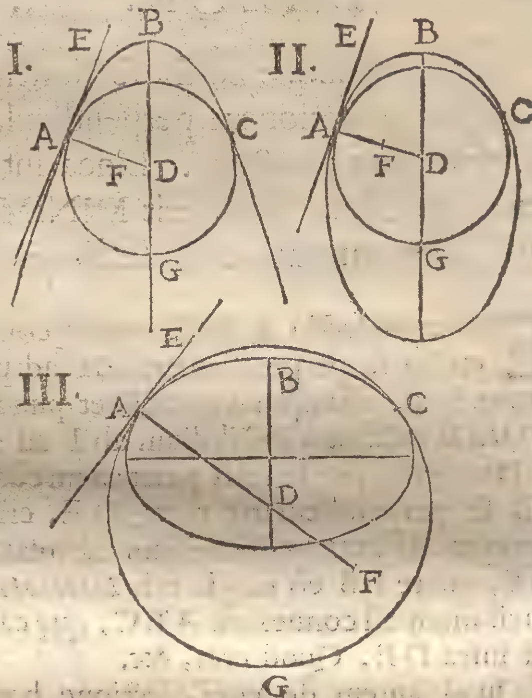
1. ESto A B C Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipsis, vt in secunda, circa maiorem axim B D, quas in puncto A extra axium

axium vertices contingat recta AE, cui intra sectionem ducta sit perpendicularis AD, quæ priùs maiori axi occurret, *a* vt in D. Dico rectam DA, & quamlibet ipsa minorem FA, esse *MINIMAM* ducibilium ad sectionis peripheriam ABC, ex punctis D, vel F.

a 88. primi h.

Nam facto centro D, interuallo DA, ac circulo descripto ACG, ipse cadet totus *b* intra sectionem ABC, in duobus tantùm punctis A, C, eam contingens: quare quę ducentur ex D ad sectionis peripheriam, pręter ad puncta A, C, interuallo DA maiores erunt: exquo ipsa DA, vel DC erit *MINIMA*, &c. Si verò interuallum FA minus sit ipso DA. Cum in circulo ACG ipsum FA diametri segmentum, in quo centrum non reperitur, sit rectarum *MINIMA* ad circuli peripheriam ducibilium, eò magis eadem FA *MINIMA* erit ducibilium ex F, ad peripheriam circumscriptę sectionis ABC. Quod erat primò, &c.

b 92. primi h.



2. Iam, in tertia figura, sit Ellipsis ABC, circa minorem axim BD, & contingens linea ad punctum A, quod non sit axium vertex, sit AE, cui ex contactu A, ducta sit intra sectionem recta AD, quę post occursum cum maiori axe, occurret quoque *c* minori, vt in D. Dico rectam DA, & quamlibet aliam FA ipsa DA maiorem, *MAXIMAM* esse ducibilium ex D, vel F, ad Ellipsis peripheriam ABC.

c 88. primi huius.

Descripto enim circulo ACG ex radio DA, ipse cadet totus *d* extra Ellipsim ABC hanc tantùm contingens in duobus punctis A, C; quapropter, quæ ducentur ex D ad Ellipsis peripheriam, præter ad puncta A, C, distantia DA minores erunt: vnde DA, vel DC erit *MAXIMA*, &c. Si autem interuallum FA maius fuerit ipso DA. Cum in circulo ACG in diametri segmento FA sit circuli centrum, ipsam FA, erit *MAXIMA* ad circuli peripheriam ACG ducibilium; & eò magis eadem FA *MAXIMA* ducibilium ex F, ad peripheriam inscriptæ Ellipsis ABC. Quod erat vltimò demonstrandum.

d 92. primi huius.

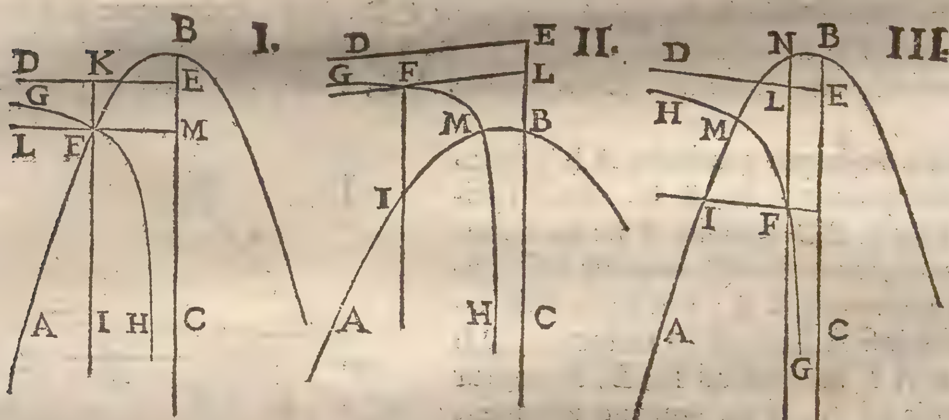
THEO-

THEOR. VIII. PROP. XII.

Si per punctum quodlibet sumptum in angulo à rectis lineis comprehenso, quarum altera sit datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ diameter, aut ipsi æquidistans, altera verò sit quælibet sectioni ordinatim ducta, vel huic parallela, descripta sit sectio Hyperbole, cuius asymptoti sint prædicti anguli latera; huiusmodi Hyperbole datam sectionem in vno tantùm puncto necessariò secabit.

Esto Parabole, vel Hyperbole A B, cuius diameter, vel diametro æquidistans sit B C, quàm ad quemcunque angulum D E C secet D E, quæ vel sit vna applicatarum in sectione, vel ipsis æquidistans, & in angulo D E C, per datum in eo punctum F, describatur [a] Hyperbole G F H, cuius asymptoti sint D E, E C. Dico hanc vltrò, citroque productam, in vno tantùm puncto sectionem secare.

[a] 4. sec. conic.



Ductis enim, in prima figura, per punctum F, quod est in sectione A B, rectis L F M, I F K asymptotis D E, E C æquidistantibus, eisque occurrentibus in M, K. Patet rectam M F L etiam si in infinitum productam ad partes L, in ipso tantùm puncto F sectioni A B occurrere, cum sit vna applicatarum in data sectione; & rectam I F K in eodem tantùm puncto F cum sectione A B conuenire [b] cum ipsa rectæ B C, vel diametro datæ sectionis æquidistet: sed Hyperbole G F H à puncto F ad partes G, tota incedit in angulo K F L, & inter æquidistantes F L, K D; & à puncto F ad partes H, tota incedit in angulo M F I, ac inter parallelas F I, M C: quare ipsa Hyperbole G F H in nullo alio puncto quàm F sectioni A B occurret.

[b] 26. primi conic.

In secunda verò, ac tertia figura, ductis ex dato puncto F (quod ibi extra cadit, hic verò intra sectionem) rectis F L, F I alteri asymptoto

& ſectioni occurrentibus in L, I. Conſtat Hyperbolen ex F ad partes H omnino incedere intra angulum L F I, & cum ipſa in infinitum extendi poſſit, cumque in ſecunda figura ſpatium F I B ſit occluſum ad I, & ad rectam L B nunquam poſſit prouenire, eò quod ipſa L B ponatur Hyperbole G F H aſymptotos: in tertia verò cum ſpatium F I N ſit vndique occluſum, neceſſariò, in vtraque figura, deſcripta Hyperbole G F H in aliquo puncto datam ſectionem ſecabit. Sit ergo harum mutua interſectio punctum M, per quod ductis, vt factum fuit in prima figura, rectis lineis quæ aſymptotis E D, E C æquidiſtent, iiſdem penitus argumentis, ac in primo caſu, demonſtrabitur ipſam Hyperbolen in nullo alio puncto quàm M cum data ſectione A B conuenire. Quare ſi per punctum in angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

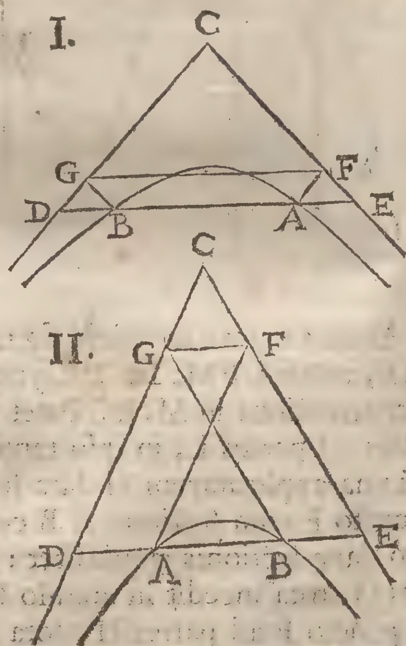
THEOR. IX. PROP. XIII.

Si in Hyperbola, ſumpta fuerint duo quælibet puncta, à quibus ductæ ſint aſymptotis æquidiſtantes, eiſque occurrentes: recta linea iungens occurſus; lineæ, data puncta iungenti, æquidiſtabit.

ESto Hyperbole A B, cuius aſymptoti C D, C E, ſumptaque ſint in ſectione duo quælibet puncta A, B, à quibus ductæ ſint A F, B G, aſymptotis æquidiſtantes. Dico iunctas A B, F G, eſſe inter ſe parallelas.

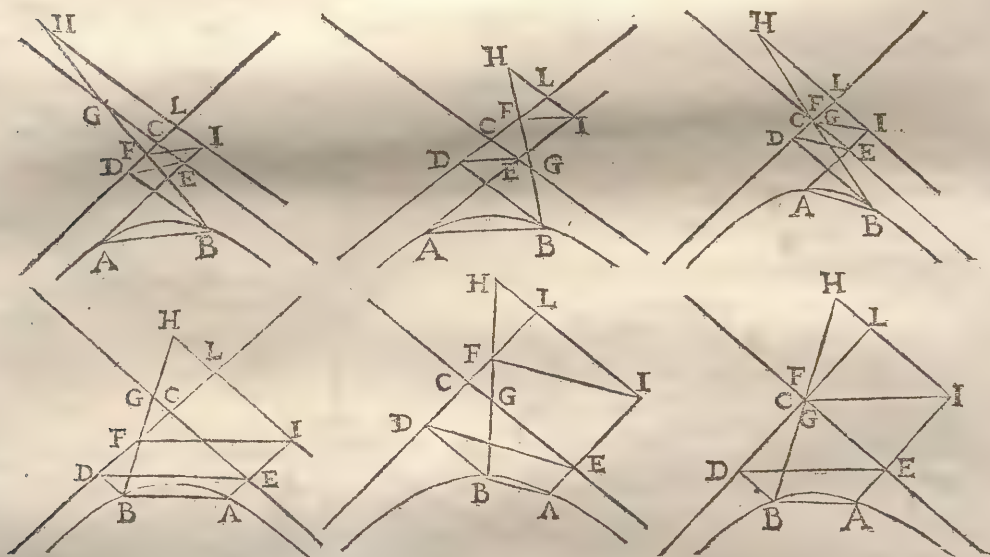
Nam vtrinque producta A B vſque ad aſymptotos in D, & E. [a] Erit in prima figura, B D æqualis A E: in ſecunda verò, cum ſit A D æqualis B E, addita communi A B, erit item D B æqualis ipſi A E. Sed in triangulis D B G, E A F, anguli ad D, B, æquantur angulis ad A, & E, vterque vtrique, ob paralellas D G, A F, & B G, E F; quare triangula D B G, A E F ſunt ſimilia inter ſe, ac propterea vt D B ad B G, ita A E ad E F, ſed antecedentes D B, A E ſunt çquales, vt modò oſtendimus, ergo, & conſequentes B G, E F, æquales erunt, at ſunt quoque inter ſe parallelæ, quare, & F G ipſi A B çquidiſtabit. Quod, &c.

[a] 8. ſec. conic.



THEOR. X. PROP. XIV.

Si in Hyperbola ſumpta fuerint duo quælibet puncta, è quorum vno ducta ſit recta linea, alteri aſymptoto æquidiſtans, aliamque ſecans; ex reliquo verò alia vtranque aſymptoton diuidens in angulo, qui aſymptotali deinceps eſt, à qua, producta in angulo ad verticem aſymptotalis, ſumatur ęqualis ei, quę ex ipſa inter prædictum punctum, & alteram aſymptoton intercipitur, atque ex ſumptæ termino ducta ſit parallela ei aſymptoto, cui prima eductarum occurrit, hanc ipſam ſecans: recta linea huiuſmodi interſectionem iungens cum puncto, in quo ſecunda eductarum eam aſymptoton ſecat, cui prima æquidiſtat, rectæ data puncta iungenti æquidiſtabit.

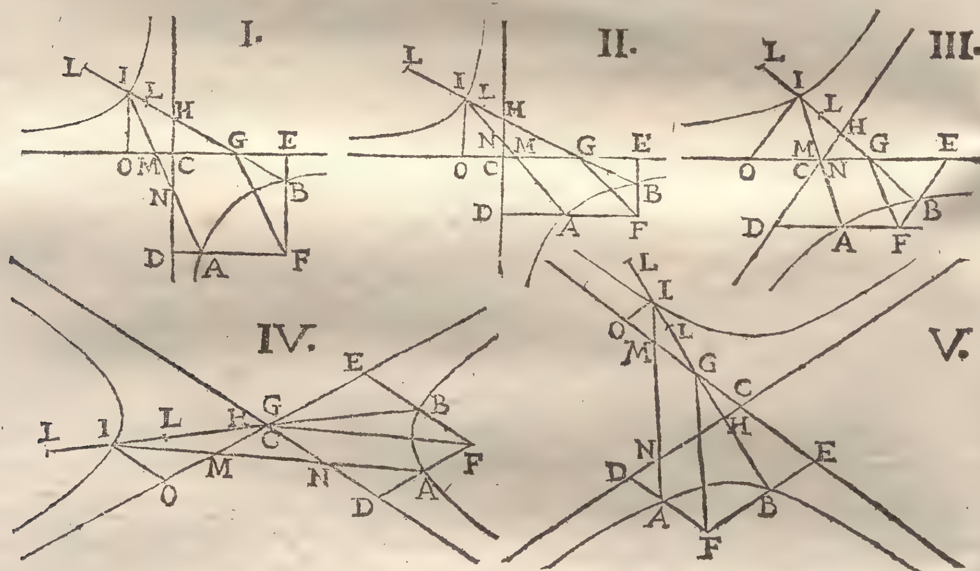


Sint in Hyperbola A B, cuius aſymptoti C D, C E, ſumpta duo quæcunque puncta A, B, è quorum altero A ducta ſit A E I alteri aſymptoto C D æquidiſtans, ex B verò quælibet B G F vtranque ſecans in G, & F; ſectaque G H in directum, & æquali ipſi B F, ducatur ex H recta H I parallela ad C E occurrens cum productis D C, A E in L, & I. Dico iunctas A B, F I eſſe inter ſe parallelas.

Ducta enim B D parallela ad C E, iunctaque D E, cum ſit B F æqualis G H, erit quoque D F æqualis C L, ob parallelas D B, G E, H I, ſed eſt C L æqualis ipſi E I, quare D F, & E I æquales erunt, ſuntque etiam parallelæ, ergo F I æquidiſtat ipſi D E, ſed eſt A B [a] æquidiſtans eidem D E, quare F I, & A B ſunt quoque inter ſe parallelæ. Quod, &c. a 13. h.

THEOR. XI. PROP. XV.

Si à puncto, quod eſt intra Hyperbolen, ductæ ſint duæ rectæ lineæ aſymptotis æquidiſtantes, & Hyperbolæ in duobus punctis occurrentes, è quorum altero ducta ſit recta linea vtranque aſymptoton ſecans, à qua, producta in angulo, qui aſymptotalis eſt ad verticem, à puncto alteram aſymptoton ſecante dematur æqualis ei, quę inter eductæ occurſum cum alia aſymptoto intercipitur: recta linea [illegible]eiuſdem occurſum iungens cum dato puncto, æquidiſtabit rectæ, ſumptæ terminum iungenti, & ſectionis punctum, in quo conuenit recta alteri aſymptoto ęquidiſtanter ducta.



ESto intra Hyperbolen A B, cuius centrum C, & aſymptoti C D, C E vltra centrum productæ, ſumptum quodcunque punctum F, à quo ductæ ſint F A D, F B E aſymptotis æquidiſtantes, quæ Hyperbolen ſecent in punctis A, B, è quorum altero, vt ex B, ducta ſit quæcunque B I aſymptoton C E ſecans in G, & C D in H, ſumptaque H I æquali, & in directum ipſi B G, iungantur rectæ I A, G F. Dico has inter ſe eſſe parallelas.

Nam cum recta G H ſecet vtranque linearum C G, C H continentium angulum H C G, qui deinceps eſt angulo D C E Hyperbolen A B continenti, ſitque ea (per conſtructionem) hinc inde æqualiter producta in B, I, & punctum B ſit ad Hyperbolen A B, erit etiam punctum I ad ei oppoſitam ſectionem. Si enim oppoſita ſectio in alio puncto, pręter I, ſecaret

caret rectam GI, vt in L; tunc GL *a* æquaretur ipsi HB, ideoque GI, GL inter se æquales essent, totum, & pars, quod est absurdum. *a* 16. sec. conic.

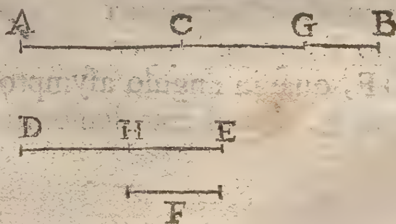
Cum ergo puncta I, A cadant in oppositas sectiones, iunctaque sit IA secans rectas CO, CD continentes angulum OCD, qui deinceps est angulo DCE sectionem AB continenti *b* erunt ex ipsa abscissæ lineæ MI, NA inter asymptotos, & sectiones interiectæ inter se æquales. Producantur FA, FB vsque ad asymptotos in D, E; agaturque ex I recta IO æquidistans ad CD. Cumque triangulorum IOM, NDA, bases IM, NA sint in directum constitutæ, sintque latera IO, ND; MO, AD inter se parallela, singula singulis, erunt quoque anguli ad I, & N; vti etiam ad M, & A inter se æquales; sed & bases IM, NA inter se sunt æquales, vt superiùs demonstratum fuit, quare, & reliqua latera MO, AD æqualia erunt. *b* ibidem.

Præterea cum sit linea BG æqualis HI, erunt quoque EG, CO inter se æquales (ob æquidistantiam linearum IO, HC, BE,) quibus addita communi GC in prima, secunda, & tertia figura, vel dempta in quinta, proueniet EC, æqualis ipsi GO, sed FD, EC sunt æquales (nam sunt latera opposita in parallelogrammo CF,) quare FD ipsi GO æqualis erit; si ergo ex his demantur æquales MO, AD; reliquæ GM, FA æquales erunt, at sunt quoque parallelæ, vnde GF, IA inter se æquidistabunt. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA V. PROP. XVI.

Sint duæ rationes, AB nempe ad BC, & DE ad F maioris inæqualitatis, & sit ratio AB ad BC, minor ratione DE ad F. Oportet BC, ita secare in G, ita vt AG ad GC sit vt DE ad F.

Fiat EH æqualis F, & vt DH ad HE, ita AC ad CG, & punctum G erit quæsitum. Quoniam cum AC ad CG sit vt DH ad HE, erit componendo AG ad GC, vt DE ad EH, vel ad F. Quod faciendum erat.



Quod autem punctum G cadat infra B, patet. Nam ex hypotesi, AB ad BC habet minorem rationem quàm DE ad F, vel ad EH, quare diuidendo AC ad CB habebit minorem rationem, quàm DH ad HE, vel quàm eadem AC ad CG; ergo CB est maior CG; siue punctum G cadit infra B. Quod demonstrandum erat.

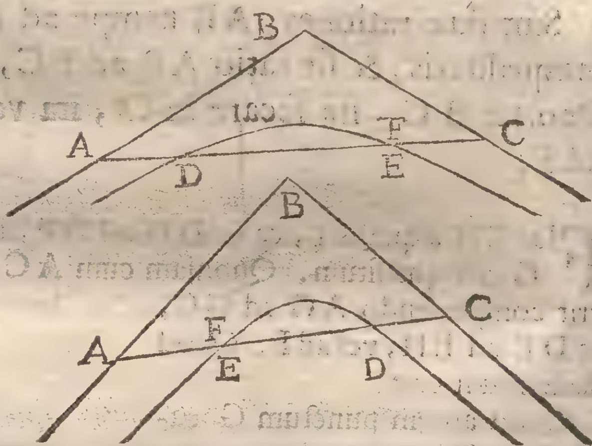
COROLL.

HInc, data ratione maioris inæqualitatis, hoc eſt D E, ad E H, & differentia A C inter duos terminos ignotos A G, G C, qui debeant eſſe in data ratione, eruitur quomodo reperiantur ipſi termini A G, G C. Facta enim fuit vt D H differentia primorum, ad H E minorem terminum, ita data differentia A C, ad aliam C G, & reperti ſunt quæſiti termini A G, G C. Nam ſtatim oſtenſum fuit eſſe A G ad G C, vt D E ad E H.

THEOR. XII. PROP. XVII.

Si fuerit in angulo rectilineo quælibet applicata, à qua hinc inde ab eius termino æqualia ſegmenta ſint abſciſſa, & per vnum diuiſionis punctum deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint latera dati anguli, ipſa per alterum punctum neceſſariò tranſibit.

SIt in angulo A B C applicata quæcunque A C, quæ inæqualiter ſecetur in D, & ſumatur C E æqualis A D. Dico ſi per punctum D deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint B A, B C, ipſam omnino tranſire per E.



Quod huiuſmodi Hyperbole tranſiens per D, alibi ſecet applicatam A C, patet. Nam ſi eam contingeret in D, eſſet A C æqualiter [a] ſecta in D: quod eſt contra hypoteſim. Secet ergo in F; & erit F C [b] ęqualis A D, ſed eſt quoque E C eidem A D ęqualis, quare F C, E C ęquales erunt; hoc eſt punctum F congruet cum ipſo E; quare Hyperbole D F, quæ in angulo aſymptotali A B C deſcribitur per D, omnino tranſit per E. Quod erat demonſtrandum.

a 3. ſecundi conic.

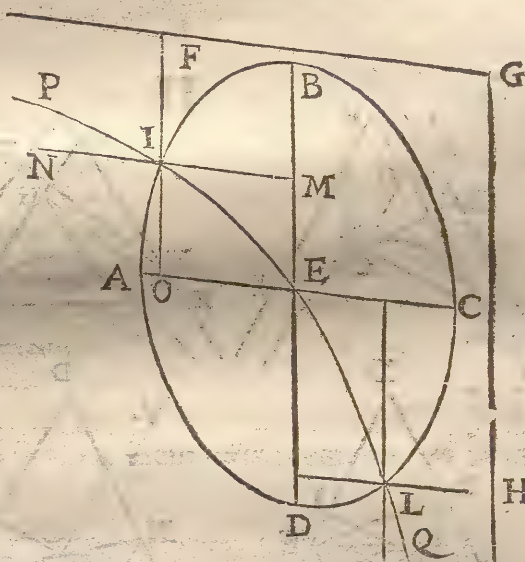
b 8. ibid.

THEO-

THEOR. XIII. PROP. XVIII.

Si per centrum Ellipsis describatur Hyperbole, cuius asymptoti coniugatis diametris æquidistent; ipsa in duobus tantùm punctis Ellipsis peripheriam secabit.

ESto Ellipsis A B C D; cuius centrum E, & diametri coniugatæ sint A C, B D quibus ductæ sint F G, H G ipsis diametris altera alteri æquidistantes, & simul occurrentes in G; & cum asymptotis G F, G H, per centrum E, descripta sit Hyperbole I E L. Dico hanc, Ellipsis peripheriam in duobus tantùm punctis secare.

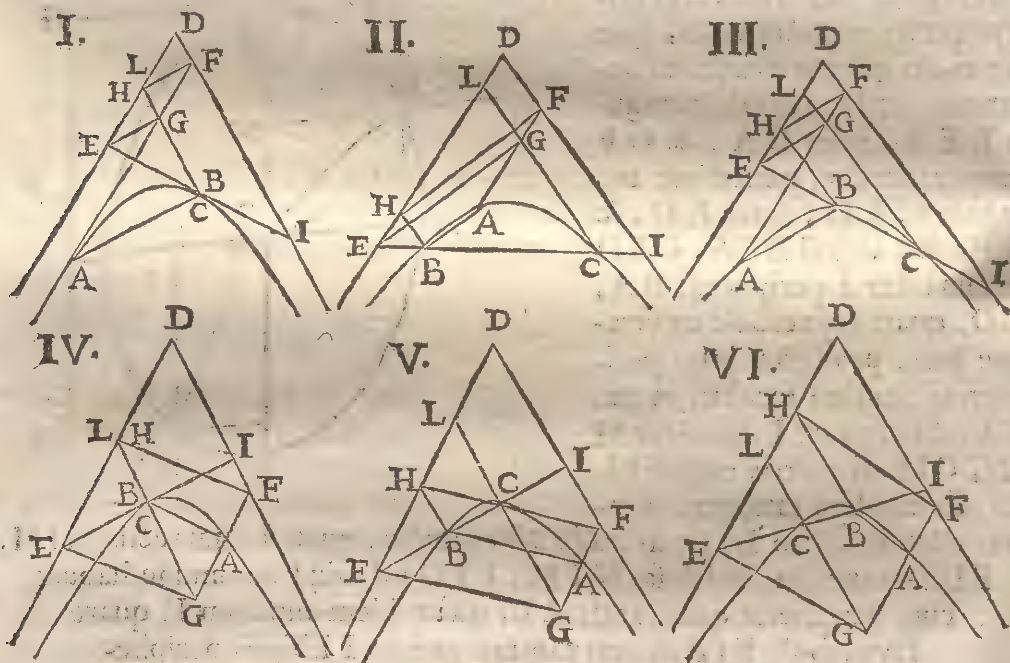


Nam cum in Hyperbola I E L sumptum sit punctum E, per quod ductæ sunt A E C, D E B asymptotis æquidistantes, ipsæ in puncto tantùm E sectioni occurrent, & Hyperbole in angulo B E A, inter E A, & G F semper incedet, pariterque in angulo C E D, inter E D, & G H; sed anguli B E A, C E D terminantur à peripherijs B A, C D, quare Hyperbole ex vtraque parte producta ipsas peripherias omninò secabit, vt in I, L. Si ergo ex I ducantur M I N, O I F diametris æquidistãtes, ob eandem rationem superiùs allatam sectio E I P, in nullo alio puncto, quàm I cum rectis N I M, F I O conueniet, sed ipsæ N I M, F I O nil aliud commune habent cum peripheria quadrantis A B, quàm idem punctum I, quare Hyperbole E I P in vno tantùm puncto I Ellipsis peripheriam secabit in quadrante A B. Cõsimili constructione, & argumento, ostendetur sectionem E L Q in alio puncto quàm L peripheriam D C non secare: quare huiusmodi Hyperbole in duobus tantùm punctis secat Ellipsis peripheriam. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOR. XIV. PROP. XIX.

Si à puncto, quod est in angulo asymptotali, ductæ sint rectæ lineæ asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes, atque ex vnius eductarum occursu agatur recta, quæ sectionem, vel in ipso tangens puncto, vel alibi secans, producta secet quoque eam asymptoton, cui altera eductarum æquidistat; recta linea iungens hoc idem punctum cum puncto contactus, vel intersectionis nouiter ductæ lineæ cum Hyperbola, æquidistabit rectæ, quę ab occursu eiusdem lineæ cum prædicta asymptoto ad datum punctum educitur.



Sit Hyperbole ABC, in cuius angulo asymptotali EDF sumptum sit quodlibet punctum G, vel extra Hyperbolen, vt in prima, secunda, & tertia; vel intra, vt in quarta, quinta, & sexta figura, à quo ductæ sint asymptotis æquidistantes GA, GC, sectioni occurrentes in A, C; & ex altero occursuum C ducta sit quæcunque alia CBE, quæ, vel sectionem contingat in C, vt in prima, & quarta figura, vel alibi secet in B, vt in reliquis, & producta conueniat cum asymptoto DE, quæ rectæ GA ęquidistat. Dico, si iungantur AB, EG ipsas inter se æquidistare.

Nam ducta BH parallela ad FD, productisque AG, CG vsque ad asymptotos in F, L; & EBC ad aliam asymptoton DF in I. Erit iuncta AB iunctæ HF [a] parallela, est autem EB æqualis CI; quare, ob parallelas BH, CL, ID, erit quoque EH æqualis ipsi LD, siue ęqualis GF; sed

[a] 13. h.

ſed EH, GF ſunt etiam parallelæ, ergo, & EG æquidiſtat HF, ſed AB quoque ipſi HF æquidiſtat, vt modò oſtendimus: quare AB, & EG ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat, &c.

PROBL. I. PROP. XX.

A dato puncto, ad datæ Parabolę peripheriam, MINIMAM rectam lineam ducere.

SIt data Parabole ABC, cuius axis BD, vertex B, rectum latus BE, & datum vbicunque punctum ſit F. Oportet ex F ad peripheriam ABC, *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Eſto primùm datum punctum F extra Parabolen in axe producto, vt in prima figura. Dico ipſam FB eſſe *MINIMAM*.

Nam cum BD ſit axis Parabolæ, ſi ex B ducatur BG ordinatis æquidiſtans, ipſa cum FD rectos angulos efficiet, ac Parabolen [a] continget. Cum ergo BF perpendicularis ſit contingenti BG, erit FB *MINIMA* [b] omnium, quæ ex F ad peripheriam ABC educi poſſunt. Quod erat, &c.

a 32. primi conic.

b 10. h.

Si verò datum punctum F, in ſecunda figura, fuerit in ipſo axe BD intra Parabolen ABC, quod diſtet à vertice B, per interuallum non maius dimidio recti BE, idem axis ſegmentum FB erit *MINIMA* [c] recta quæſita.

c 9. huius ad nu. h.

Si autem datum punctum F in eadem figura ſit in axe BD, ſed interuallum FB maius ſit dimidio recti BE. Secetur FG æqualis eidem dimidio, & applicetur GA peripheriæ occurrens in A. Dico iunctam FA eſſe *MINIMAM* quæſitam.

Ducta enim ex A [d] contingente AH, ipſa cum axe producta [e] conueniet in H; eritque HB ęqualis [f] BG, ſiue HG dupla GB, eſtque EB dupla GF, ex conſtructione, ergo HG ad GB eſt vt EB ad GF; ex quo rectangulum HGF æquabitur rectangulo EBG, ſiue [g] quadrato GA; quare angulus FAH rectus [h] erit. Cumque AF ſit ex contactu A contingenti AH perpendicularis, & punctum F ſit in axe, erit FA *MINIMA* [i] ducibilium ad Parabolæ peripheriam ABC. Quod, &c.

d 2. pr. h.
e 24. primi conic.
f 35. ibid.

g Coroll. pr. 1. h.
h 203. Sept. Pappi.
i 11. h. ad num. 1.

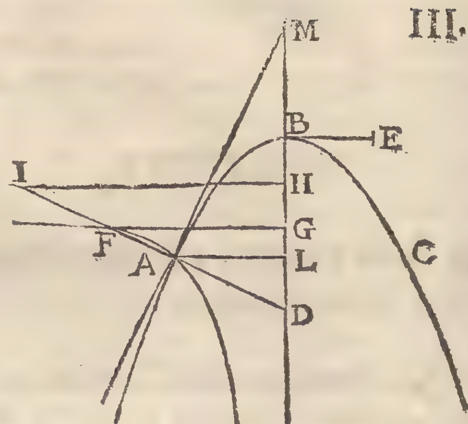
Si denique datum punctum F ſit extra Parabolen ABC, vt in tertia figura, vel extra, vt in quarta, inter axem BD, & peripheriam BA; Applicetur ex recta FFG axi occurrens in G, dematurque de axe ſupra

FG re-

FG recta GH æqualis dimidio recti BE, & ex H agatur HI parallela ad GF, & in angulo IHD per punctum F describatur [a] Hyperbole FA, quæ Parabolæ peripheriam in vno tantùm puncto A secabit, [b] & iungatur FA. Dico hãc esse *MINIMAM* quæsitam.

[a] 4. sec. conic.

[b] 12. h.



Applicetur AL, & ex A ducatur contingens AM, axi occurrens in M, producaturque FA ad vtranque partem, quæ cum asymptotis [c] conueniet in I, D, eruntq; in vtraque figura, interceptę AI, FD inter se ęquales, ac ideo HL, GD ęquales erunt, ob ęquidistantes lineas IH, AL, FG, in triangulo IHD; si ergo, in tertia figura, dematur communis LG, & in quarta, addatur, fient HG, LD inter se æquales; sed est GH dimidia BE, quare, & LD ipsius BE dimidia erit. Et quoniam quadratum AL æquatur rectangulo [d] LBE, & rectangulum LBE, æquale est rectangulo sub dupla LB, siue sub [e] ML, & sub dimidia BE, hoc est sub LD, ergo quadratum AL æquale erit rectangulo MLD, ac ideo angulus MAD rectus [f] erit, siue FA erit ex contactu A contingenti AM perpendicularis; quare FA, in vtraque figura, erit [g] *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat.

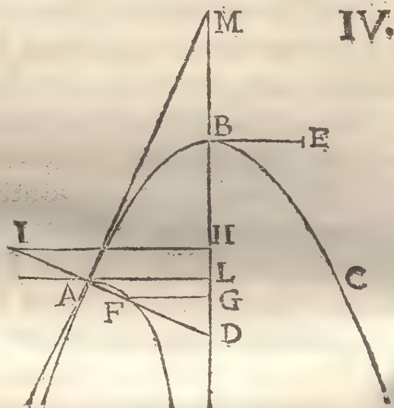
[c] 8. secũdi conic.

[d] Coroll. primæ 1. huius.

[e] 35. primi conic.

[f] 203. Sept. Pappi.

[g] 10. h. & 11. h. ad num. 1.



MONITVM.



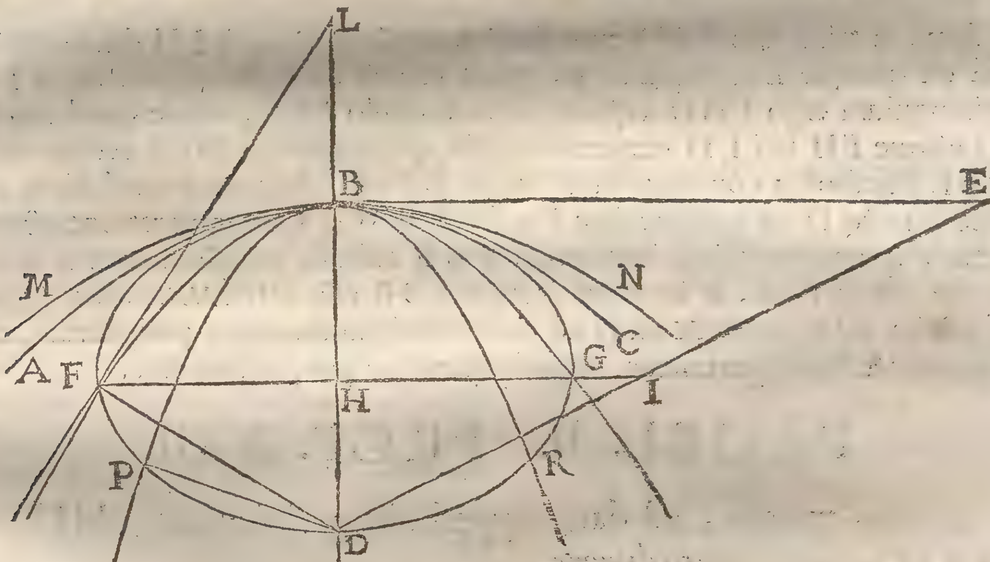
On te pigeat hoc loco, Lector humanissime, à suscepta MAXIMARVM, MINIMARVMQVE linearum inuestigatione circa reliquas coni-sectiones, aliquantisper recedere, dum elegantissimam quandam, ac vere admirabilem affectionem exhibere tibi decernimus, circa MINIMAS lineas, ad peripherias infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adscriptarum, ex eodem communis axis puncto ducibiles, quarum vestigia, dum hæc ipsam propositio prælo subijcitur, nescio qua parùm morata cura insequi voluimus. Huius itaque itineris delineatio, est quæ consequitur.

THEO-

THEOR. XV. PROP. XXI.

Semita MINIMARVM linearum, ducibilium à puncto communis axis infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adſcriptarum, ad earundem ſectionum peripherias, eſt circumferentia Ellipſis, cuius tranſuerſum latus ſit ipſum axis ſegmentum, inter aſſumptum punctum, & vertieem interceptum: rectum verò eiuſdem tranſuerſi ſit duplum.

ESto Parabole ABC, cuius axis BD, in quo ſumptum ſit punctum D à vertice B diſtans per interuallum æquale dimidio ſui recti BE: patet ipſam DB eſſe [a] *MINIMAM* ad peripheriam ABC; & ſi aliæ Parabolæ concipiantur per B adſcriptæ, quarum recta latera excedant BE, conſtat ipſas cadere [b] extra, qualis eſt MBN, & eandem DB (quæ omnino erit minor dimidio ipſius recti lateris) ad eius peripheriam eſſe [c] *MINIMAM*. At ſi Parabolæ fuerint ipſi ABC per B verticem inſcriptæ, — [a] 9. huius ad nu. 1. [b] 2. Coroll. 19. pr. huius. [c] 9. huius ad nu. 1.



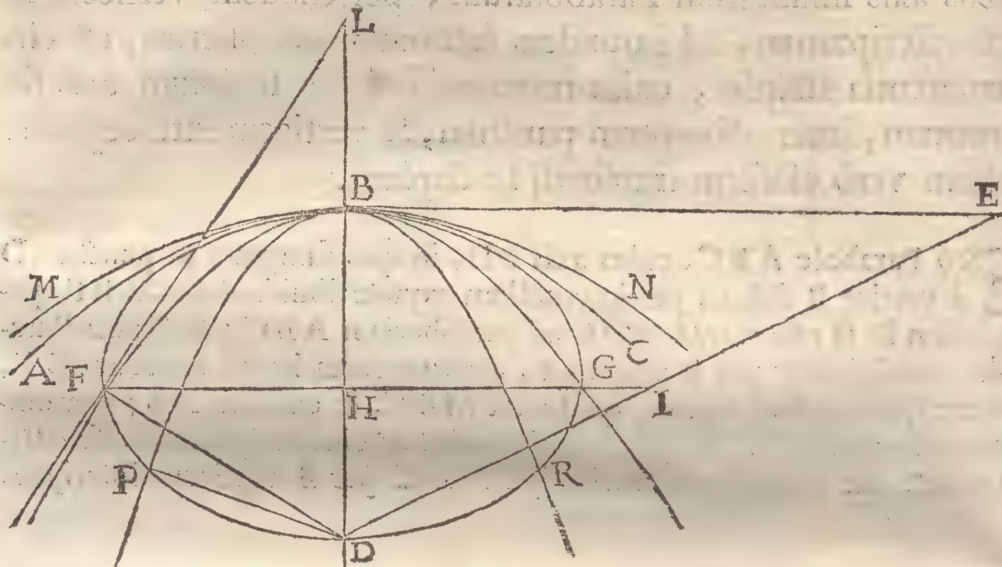
patet etiam ipſarum latera minora [d] eſſe recto BE, ac ideo DB quorunlibet ipſorum laterum dimidium excedere, & *MINIMAS* ducibiles ex D, ad harum Parabolarum peripherias pertingere, præter ad verticem B. Si ergo quæratur, quàm delineent ſemitam harum *MINIMARVM* extrema puncta. Deſcribatur circa ſegmentum axis BD, tanquam circa tranſuerſum latus, Ellipſis BFDG, cuius rectum ſit ipſum BE. Conſtat hanc eſſe *MAXIMAM* Parabolæ ABC per B verticem [e] inſcriptibilem. Dico huius peripheriam BFDG prædictarum *MINIMARVM* eſſe tramitem. — [d] ex 2. Coroll. 19. pr. huius. [e] ex 20. pr. huius.

Iungatur Ellipſis regula DE: & Parabolę ABC inſcribatur quælibet alia FBG, quæ Ellipſis peripheriam ad vtranq; partem omnino ſecabit, vt

a ibidem. in F, G (nam Parabole A B C est a *MINIMA* Ellipsi F B G circumscriptibilium) è quorum altero F ducta sit ordinata F H I communem axem

b 2. primi huius. in H, regulam verò secans in I; sitque F L Parabolen b contingens ad F,

c 24. primi conic. axemque secans c in L.



Iam, in triangulo E B D cum sit E B dupla B D, erit I H dupla H D, sed est quoque L H dupla H B, quare vt L H ad H B, ita I H ad H D:

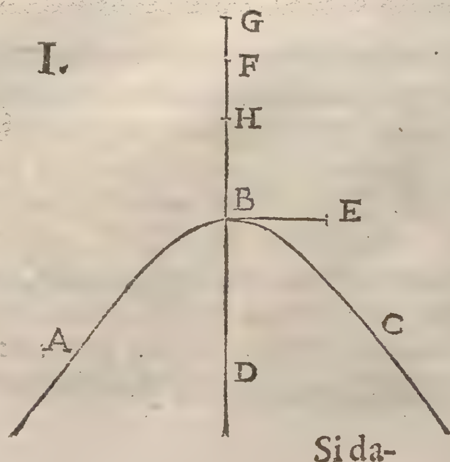
d Coroll. primæ 1. huius. rectangulum ergo L H D æquale est rectangulo B H I, d siue quadrato F H, estque F H ipsi L D perpendicularis, quare angulus D F L rectus e est,

e 203. Sept. Pappi. & F L Parabolen contingit in F: vnde D F est f *MINIMA* ducibilium ex

f 11. huius ad nu. 1. dato puncto D ad peripheriam Parabolæ F B G. Consimili ratione ostendetur, quamlibet aliam inscriptam P B R Ellipsis peripheriam B F G D secare, vt in P, R, & iunctam D P, vel D R esse *MINIMAM*, &c. Quare semita *MINIMARVM* ex D ad huiusmodi Parabolarum peripherias, est prædictæ Ellipsis perimeter. Quod ostendere propositum fuit.

PROBL. II. PROP. XXII.

A dato puncto, ad datę Hyperbolæ peripheriam, MINIMAM rectam lineam ducere.



SIt data Hyperbole A B C, cuius axis B D, rectum B E transuersum verò B G, centrum H, & datum vbicunque sit punctum F. Oportet ex F ad Hyperbolæ peripheriam A B C *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Si primò datum punctum F, in prima figura fuerit in axe producto, extra Hyperbolen, ipsa

g 10. h. F B erit g *MINIMA*.

Si da-

Si datum punctum F sit in axe intra sectionem, vt in secunda figura, quod tamen distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti BE: item FB erit [a] *MINIMA*. a 9. huius ad nu. 1.

Cum verò, in eadem figura, segmentũ F B excedet prædictum recti dimidium: dematur BI æqualis semi-recto B E, & tunc habebit HB ad BI maiorem rationem quàm ad BF: si ergo HF secetur in L, ita vt HL ad LF, sit vt HB ad BI, punctum L omnino cadet inter B & F; itaque ducta ALC ordinatim axi applicata, iunctaq; FA. Dico ipsam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

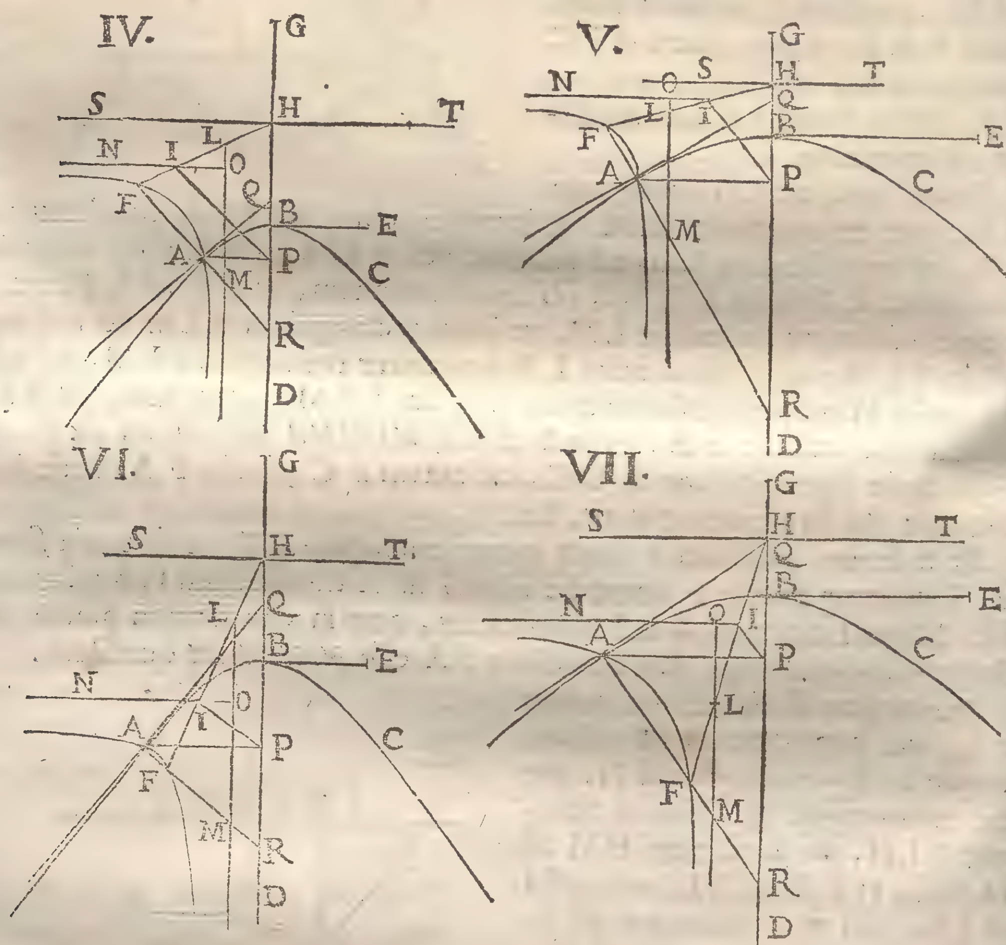
Ducta enim ex A [b] contingente AM, quæ axi occurret [c] in M. Erit rectangulum HLM ad quadratum LA, vt [d] transuersum latus ad rectum, vel vt GB ad BE; vel sumptis subduplis, vt HB ad BI; vel, ob constructionem, vt HL ad LF; vel, sumpta communi altitudine LM, vt idem rectangulum HLM ad rectangulum FLM: ergo quadratum LA æquabitur rectangulo FLM, sed est AL ipsi FM perpendicularis: quare angulus FAM [e] rectus erit, sed AM sectionem contingit in A: ergo FA est *MINIMA* ducibilium ex F ad Hyperbolæ [f] peripheriam ABC, est autem FC æqualis FA: vnde in hoc casu duæ erunt *MINIMAE*, &c. b 2. pr. h. c 24. primi conic. d 37. ibid. e 203. Sept. Pappi. f 11. h. ad num. 1.

At si datum punctum F fuerit in axe coniugato HF, vt in tertia figura. Diuidatur FH in I, ita vt FI ad IH sit vt transuersum GB ad rectũ BE, & per I agatur IA axi æquidistans, quæ in vno tantùm puncto A Hyperbolæ [g] occurret. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam. g 26. primi conic.

Producatur F A axi occurrens in L, cui applicetur AM, ducaturque ex A [h] contingens AN, quæ axi occurret [i] in Q. Erit in triangulo FLH, ob parallelas, HM ad ML, vt FA ad AL, vel vt FI ad IH; vel vt transuersum ad rectum per constructionem; vel vt rectangulum HMN [l] ad quadratum MA, sed eadem HM ad ML, (sumpta communi altitudine MN) est vt idem rectangulum HMN ad rectangulum LMN; vnde quadratum MA, æquabitur rectangulo NML, & est AM ipsi LN perpendicularis: quare angulus LAN, & qui ei deinceps est FAN rectus [m] erit, sed AN sectionem contingit, ergo FA [n] est *MINIMA* quæsita. h 2. pr. h. i 24. primi conic. l 37. ibid. m 203. Sept. Pappi. n 10. h.

Si autem datum punctum F sit extra Hyperbolen inter axem coniugatum SHT, & sectionis peripheriam, vt in quarta, & quinta figura, vel

intra Hyperbolen, inter axem, & peripheriam, vt in sexta, & septima, (nam si esset in ipsa peripheria, vt in A, tunc *MINIMA* abiret in punctum.) Iungatur H, centrum Hyperbolæ, cum dato puncto F recta linea HF, quæ ita secetur in I, vt H I ad I F sit vt transuersum latus G B ad rectum B E, sumaturque H L æqualis F I, & per L agatur L M axi B D æquidistans, ac per I axi ordinata N I O, & in angulo N O M per datum
a 4. secundi conic. in eo punctum A describatur [a] Hyperbole F A, quæ in vno tantùm pun-
b 12. h. ctum A cum sectione A B C [b] conueniet. Dico iunctam F A esse *MINIMAM* quæsitam.



c 2. pr. h. Ducatur A P axi ordinata, & A Q Hyperbolen contingens [c] in A, quę
d 24. primi conic. secabit [d] axim in Q. Et quoniam in Hyperbola A F sumpta sunt duo puncta A, F, è quorum altero A ducta est A P alteri asymptoto N O æquidistans, ex altero verò F, recta F I L H vtranque asymptoton secans in I, L; estque L H in directum, & æqualis posita ipsi I F, & ex H recta H B P alteri asymptoto O M æquidistans, cum alia A P conueniens in P,
e 14. h. erit iuncta I P [e] parallela ad F A; sed H P secat I P alteram parallelarum, quare producta secabit quoque reliquam H F: secet igitur in R. Erit ergo in triangulo H F R (ob parallelas) H P ad P R, vt H I ad I F, vel vt

trans-

transuersum latus ad rectum, per constructionem, [a] vel vt rectangulum HPQ ad quadratum PA; sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ, quare quadratum PA æquabitur rectangulo RPQ, estque AP ipsi RQ perpendicularis, vnde angulus RAQ, & in quarta, & quinta figura, qui ei deinceps QAF [b] rectus erit, sed AQ sectionem contingit, quare perpendicularis FA [c] erit *MINIMA* quæsita.

a 37. primi conic.

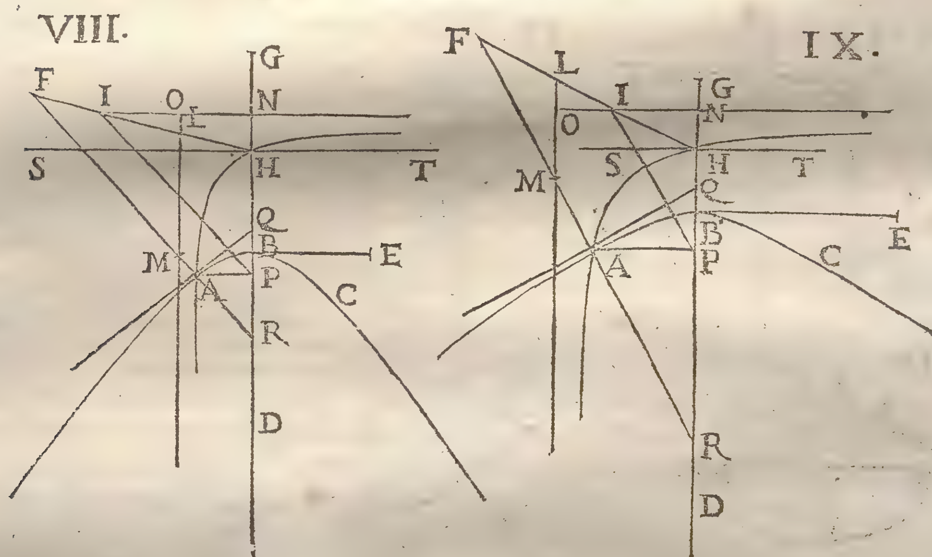
b 203. Sept. Pappi.

c 10. et 11. huius ad num. 1.

Si denique datum punctum F sit extra Hyperbolen, sed supra axem coniugatum HS, vt in octaua, & nona figura. A centro H datę Hyperbolæ ad datum punctum F ducatur HF, quæ ita secetur in I, ita vt HI ad IF, sit vt transuersum latus GB ad rectum BE, sumptaque HL ęquali ipsi IF, per I agatur ION ordinatim ductis æquidistans, & per L recta LOM axi HBD parallela, & in angulo NOM per datum punctum H (quod est centrum Hyperbolæ) describatur [d] alia Hyperbole HA, quæ alteram ABC in vno tantùm [e] puncto A secabit. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

d 4. secundi conic.

e 12. h.



Sit AP axi ordinatim applicata, & AQ ex A sectionem [f] contingens, axemque secans [g] in Q, iungaturque IP. Iam in Hyperbola AH, cuius asymptoti ON, OM, sumptum est punctum P, à quo ductæ sunt PA, PH asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes in A, H, & ab eorum altero H ducta est HLI vtranque asymptoton secans in I, L, estque IF in directum, & æqualis posita ipsi HL, rectaque FA coniungit extremum F cum altero datorum A; ipsa FA [h] æquidistabit iungenti IP; sed HP secat IP quare producta secabit quoque alteram parallelarum FA, si hæc vltra FA producatur. Sit ergo harum occursus R. Erit in triangulo FHR recta HP ad PR, vt HI ad IF, vel vt latus transuersum ad rectum, ex constructione, vel [i] vt rectangulum HPQ ad quadratum PA, sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ: quare quadratum

f 2. pr. h.

g 24. primi conic.

h 15. h.

i 37. primi conic.

PA,

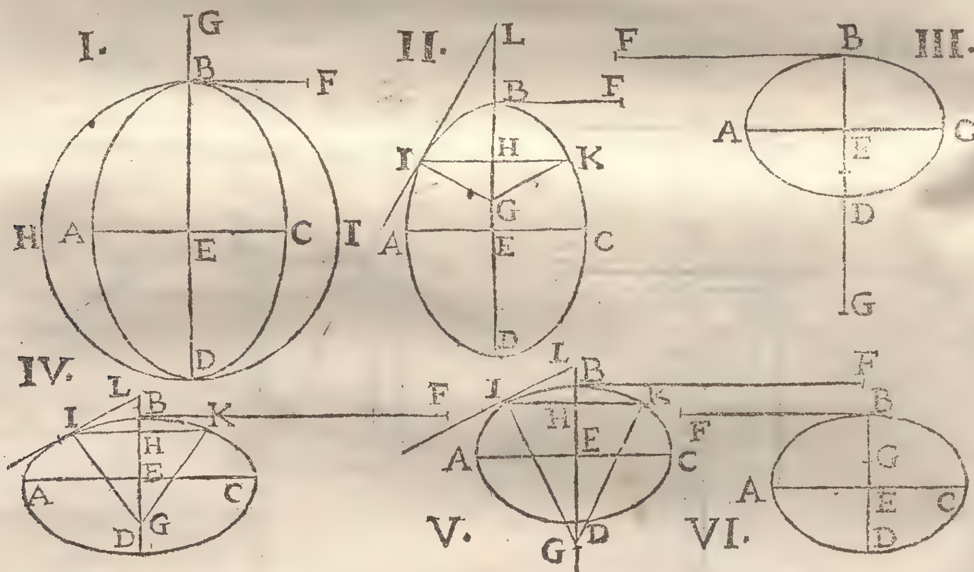
P A, & rectangulum R P Q inter se sunt æqualia, sed est A P ipsi Q R
a 203. Sept. Pappi. perpendicularis, ergo angulus Q A R rectus[a] erit, pariterque is qui ei de-
b 10. h. inceps Q A F. Quare perpendicularis F A[b] erit *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat.

PROBL. III. PROP. XXIII.

A dato puncto, ad datæ Ellipsis peripheriam, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, maior B D, rectum latus B F, & datum punctum sit G. Oportet ex G, ad peripheriam A B C, *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

1. Si primò datum punctum congruit cum centro E: duo maiores semi-axes E B, E D, erunt *MAXIMAE*, duo verò semi-axes minores E A,
c 86. primi huius. E C[c] erunt *MINIMAE*.



2. Si datum punctum fuerit in vertice B maioris axis; ipsæ maior axis B D erit *MAXIMA* ducibilium ex B, &c. Nam si concipiatur descriptus circulus B H D I ex radio E B, hoc est circa diametrum B D, eius peri-
d ex 26. pr. huius. pheria cadet tota extra[d] peripheriam Ellipsis A B C D; & cum B D sit *MAXIMA* ad peripheriam circuli, eò ampliùs erit *MAXIMA* ad inscriptam Ellipsis peripheriam. Verùm non dabitur *MINIMA* ex B, cum ipsa in punctum abeat.

3. Si autem datum punctum G in eadem prima figura fuerit in axe maiori, extra tamen Ellipsim: tota G D erit *MAXIMA*: est enim *MAXIMA* ad peripheriam circuli B H D I, cum in ea sit centrum, ergo ad periphe-
e 10. h. riam inscriptæ Ellipsis omnino *MAXIMA* erit. G B verò erit[e] *MINIMA*, cum ipsa G B sit extra Ellipsim perpendicularis ad rectum B F, quod ad B contingit Ellipsim.

Si verò,

4. Si verò, in secunda figura, datum punctum G fuerit in maiori semi-axe, at distet à vertice B per interuallum G B non maius dimidio recti B F, ipsa GD, in qua centrum, erit *MAXIMA*, [a] & reliqua GB *MINIMA*. *a* 9. huius ad nu. 1. 2.

5. At si in eadem figura datum punctum G item fuerit, in maiori semi-axe E B, sed distet à vertice B per interuallum maius dimidio recti B F (nam semi-axis maior EB, est semper maior semi-recto B F, cum totus axis BD sit maior toto recto BF) *MAXIMA* erit [b] GD, in qua centrum: *MINIMA* verò venabitur sic. *b* 6. huius.

Cum sit BG maior semi-recto BF, habebit E B ad B G minorem rationem, quàm EB ad semi-rectum BF, vel sumptis duplis, quàm transuersum D B ad rectum B F, suntque hæ rationes maioris inæqualitatis: Itaque diuidatur [c] BG in H, ita vt EH ad HG sit vt DB ad BF, & per H applicetur IHK, & iungantur GI, GK: nam ipsæ, quæ sunt æquales, erunt *MINIMAE*. *c* 16. h.

Quoniam ducta I L contingente, hæc axi occurret [d] in L: & cum sit EH ad HG, vt transuersum DB ad rectum BF, sumpta communi altitudine HL, erit rectangulum EHL ad GHL, vt transuersum ad rectum, sed est quoque rectangulum EHL ad quadratum HI, [e] vt transuersum ad rectum, ergo rectangulum EHL ad GHL, est vt idem EHL ad quadratum HI, quare rectangulum GHL æquale est quadrato HI: estque HI ipsi GL perpendicularis, ergo angulus GIL rectus erit, & IL sectionem contingit in I, à quo ducta est I G perpendicularis, & maiori axi occurrens, quapropter GI erit [f] *MINIMA*, estque GK æqualis GI. Vnde in hoc casu duæ erunt *MINIMAE*, & vna tantùm *MAXIMA*. *d* 25. primi conic. *e* 37. ibid. *f* 11. h.

6. Si verò datum punctum G fuerit in axe minori, vt in tertia figura, & distantia GB sit non minor dimidio recti lateris BF: (quæ GB omnino maior erit semi-axe BE, vt ad finem 9. huius monuimus) tunc ipsa GB erit *MAXIMA*, [g] & GD *MINIMA*, vel punctum G cadat infra D; vel supra inter D, & E. Nam si caderet in ipso puncto D (dummodo DB sit vt ponitur, nempe non minor dimidio recti) ipsa D B esset *MAXIMA*, nec daretur *MINIMA*, cum hæc in punctum euanescat. *g* 9. huius ad num. 3.

7. Verùm, si datum punctum G sit in axe minori, sed distet à vertice B per interuallum minus dimidio recti B F, & cadat infra centrum E, vel inter E, & D; vt in quarta figura, aut infra D, vt in quinta. Cum sit GB minor semi-recto, & EB æqualis semi-transuerso B D, habebit GB ad BE minorem rationem, quàm semi-rectum ad semi-transuersum, vel quàm rectum F B ad transuersum B D. Diuidatur ergo BE in H, ita vt GH ad HE, [h] sit vt rectum FB ad BD transuersum, & per H agatur ordinata H I, & I L sectionem contingens, & axi occurrens in L, iungaturque GI. Dico GI esse *MAXIMAM*. *h* 16. h.

Cum sit enim GH ad HE, vt FB ad B D, sumpta communi altitudine H L erit rectangulum GHL ad EHL, vt F B ad B D, vel vt [i] quadratum GH ad idem rectangulum EHL, quare rectangulum G H L æquale est quadrato GH, estque HI perpendicularis ad GL; ergo angulus GIL rectus erit, estque IL sectionem contingens in L, à quo ducta est I G perpendicularis, & minori axi in G, occurrens, quare ipsa GI [l] erit *MAXIMA*, & est GK æqualis GI: ergo ex G duæ erunt *MAXIMAE*. *MINIMA* *i* 37. primi conic. *l* 11. h.

a 9. huius ad num.4. *NIMA* verò in hoc casu, tum in quarta, tum in quinta figura est *a* ipsa GD; nisi punctum G cadat in ipso D; tunc enim *MINIMA* abit in punctum.

8. At, si, vt in sexta figura, quando interuallum G B minus est dimidio BE, punctum G cadat inter B, & E, tunc si concipiatur D esse Ellipsis verticem, reliquum interuallum DG, vel erit non minus, vel minus dimidio BF, quo in casu duæ *MAXIMAE* reperientur ad partem peripheriæ ADC: eadem constructione, & demonstratione, ac ad num.6. & 7. huius, & reliqua GB erit *MINIMA*, &c.

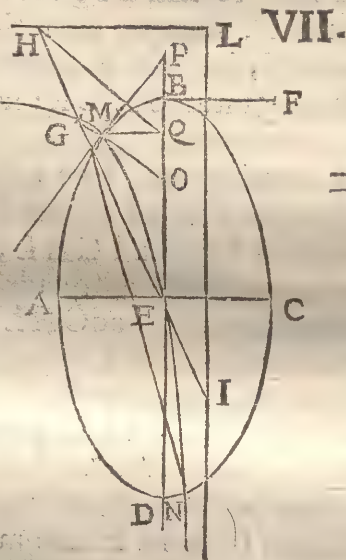
9. Si denique datum punctum G fuerit inter semiaxes, aut extra sectionē, vt in septima figura; vel intra, vt in octaua; vel in ipsa sectione, vt in nona. Iungatur EG, quæ hinc inde producatur, & fiat, vt transuersum DB ad rectum BF, *b* ita EH ad HG, ac ita GI ad IE, & ex H, I, ducantur HL, minori axi AC, & IL maiori DB parallelę, quę simul occurrent in L, & in angulo HLI per punctum E (quod est centrum Ellipsis) describatur *c* Hyperbole MGEN, quæ necessariò *d* transibit per G (cum segmenta GH, EI rectæ HI applicatæ in angulo asymptotali HLI, sint ęqualia,) & in duobus tantùm punctis M, N, Ellipsis peripheriam *e* secabit. Dico has intersectiones dare puncta quæsita: hoc est iunctam GN in septima, octaua, & nona figura esse *MAXIMAM*, & GM *MINIMAM*, in septima, & octaua figura, tantùm, quoniam in nona ipsa *MINIMA* abit in punctum.

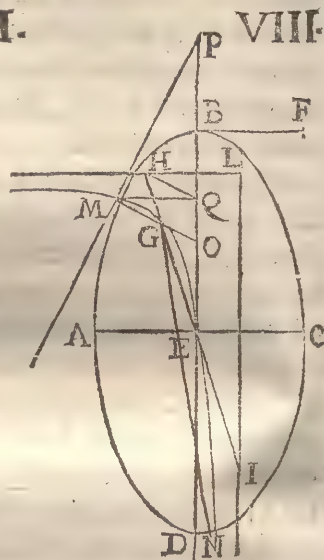
b Coroll. 16. h.

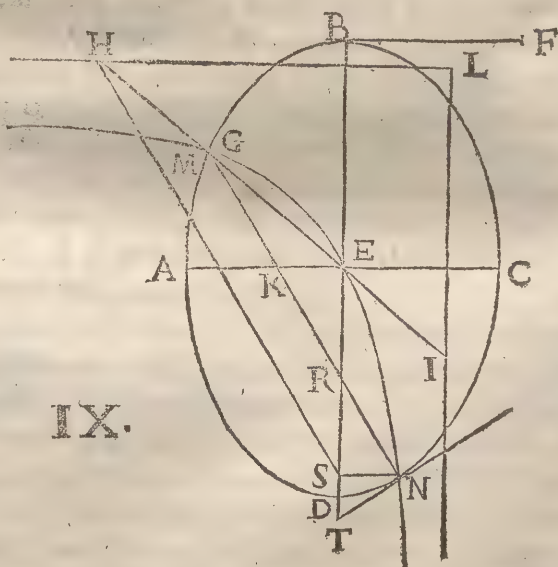
c 4. secundi conic.

d 17. h.

e 18. h.







Quò autem ad *MINIMAM* ostendendam. Ducatur ex M, Ellipsim contingens MP maiori axi occurrens *f* in P; appliceturque MQ.

f 25. primi conic.

Et quoniam in angulo asymptotali HLI sumptum est punctum Q, extra

tra ſectionem, à quo ductæ ſunt QM, QE aſymptotis parallelæ, & Hyperbolæ occurrentes in M, E, & ab altero occurſuum E, ducta eſt EGH, ſecans Hyperbolen in G, & aſymptoton HL in H, erunt iunctæ HQ, MGO [a] inter ſe parallelæ; quare in triangulo QEH, recta GM, quæ baſi HQ æquidiſtat, producta conueniet cum latere EQ, vt in O; eritque EQ ad QO, vt EH ad HG, hoc eſt vt tranſuerſum AB ad rectum BF, ſed EQ ad QO, ſumpta communi altitudine QP, eſt vt rectangulum EQP ad rectangulum OQP, ergo rectangulum EQP ad OQP erit vt tranſuerſum ad rectum, vel vt [b] idem rectangulum EQP ad quadratum QM; vnde rectangulum OQP, æquale eſt quadrato QM, eſtque QM ipſi OP perpendicularis, ergo angulus OMP [c] rectus eſt, & in ſeptima figura, qui ei deinceps eſt GMP rectus erit, ſed eſt GM extra ſectionem, contingenti MP perpendicularis: quare GM erit [d] *MINIMA*. At, in octaua figura, MP Ellipſim contingit, & ei perpendicularis MG eſt intra Ellipſim, ſed non excedit interceptam MO inter contactum, & maiorem axim, quare GM erit [e] *MINIMA*.

a 19. h.
b 37. primi conic.
c 203. Sept. Pappi.
d 10. h.
e 11. h. ad num. 1.

Quod tandem in quouis prædictorum ſchematum, ducta GN ſit *MAXIMA*, ita oſtendetur, ſed in nona tantùm figura, ne in reliquis noua linearum, & characterum appoſitio confuſionem pariat.

Secet ergo GN ſemi-axim minorem AE in K, & maiorem ED in R, applicetur NS, contingens agatur NT, iungaturque SH.

Et cum à puncto S, & in angulo aſymptotali HLI intra ſectionem ductæ ſint SE, SN aſymptotis parallelæ, Hyperbolæ occurrentes in E, N, & ab altero occurſuum E ducta ſit EGH, Hyperbolen ſecans in G, & aſymptoton in H, erunt iunctæ SH, NRG [f] inter ſe parallelæ; quare in triangulo HES, erit ES ad SR, vt EH ad HG, vel vt tranſuerſum DB [g] ad rectum BF, vel vt rectangulum EST ad quadratum SN, ſed ES ad SR, eſt vt idem rectangulum EST ad rectangulum RST, ergo quadratum SN æquale eſt rectangulo RST, ex quo angulus RNT rectus erit, ſed TN Ellipſim contingit in N, eſtque NG maior intercepta NK inter contactum, & minorem axim, quare GN omnino erit [h] *MAXIMA* quæſita. Quod erat faciendum.

f 19. h.
g 37. primi conic.
h 11. h. ad num. 2.

MONITVM.



E inuentione MAXIMARVM à puncto dato ad vniuerſam Parabolæ, vel Hyperbolæ peripheriam hactenus nihil egimus, cum manifeſtè pateat ad eas educi minimè poſſe lineas tantæ longitudinis, quin ipſis maiores, & maiores adhuc in infinitum reperiantur; eò quod ſectiones ipſæ ſint infinitæ extenſionis: itaque conſultò de hac re demonſtrationem omiſimus, cum hæc in promptu ſatis ſit. Verùm ſi quærantur MAXIMAE, ducibiles à puncto extra ſectionem dato, ad conuexas tantùm quarumlibet coni-ſectionum peripherias: ſi punctum fuerit in axe producto, ex eo ductæ lineæ contingentes æquales erunt, & MAXIMAE ad ipſius ſectionis conuexam peripheriam. Si autem punctum fuerit extra axim Parabolæ, vel Hyperbolæ, ſed intra angulum ab aſymptotis

 factum,

factum, tunc ex dictis binis contingentibus, quæ ad partem axis ducitur semper altera contingente ad oppositam axis partem minor erit, atq; hæc erit MAXIMA. Si verò punctum fuerit extra Ellipsim inter axes, tunc contingens ad partem maioris axis ducta, minor erit altera contingente ad partem minoris, pariterque hæc erit MAXIMA ad conuexam Ellipsis peripheriã. Quæ omnia facili negotio demonstrabuntur si animaduertatur, ~~quod~~ in quocunque triangulo, cuius vnum latus altero sit maius, hoc ipsum esse MAXIMAM linearum omnium à vertice anguli ab ipsis lateribus comprehensi, ad puncta basis prædicti trianguli ducibilium, (tale enim triangulum est, quod à prædictis contingentibus tanquam lateribus, & à recta puncta contactuum iungente, tanquam basi efficitur, in quo idem maius latus, siue contingentium maior eò magis erit MAXIMA ad inclusam sectionis peripheriam.) Si tandem punctum fuerit in angulo ad verticem asymptotalis, aut in asymptotis eum comprehendentibus, tunc vllam contingentium ducere impossibile est, & ducibiles lineæ ad conuexam Hyperbolæ peripheriam semper augentur, ideoque non datur MAXIMA; & cum est in altero angulorum, qui deinceps sunt asymptotali, vel in ipsis asymptotis Hyperbolen continentibus, tunc vnica tantum contingens linea ab eo duci potest, & hæc ad partem axis, quæ erit MAXIMA ad eandem partem ducibilium; sed ad oppositam, ipsæ ducibiles ad Hyperbolæ conuexam peripheriam perpetuò pariter augentur. Sed in re haud difficilis inuestigationis ne amplius quæso immoremur.

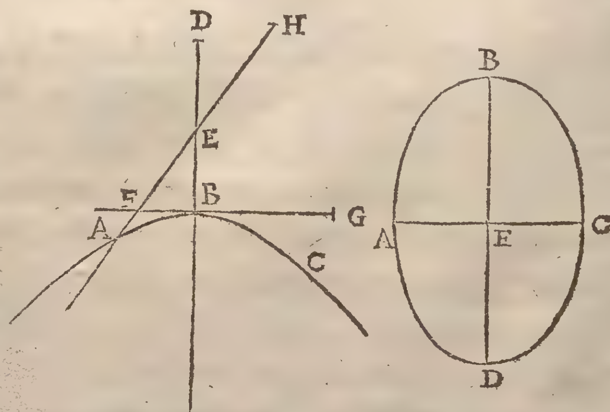
THEOR. XVI. PROP. XXIV.

Transuersorũ laterũ in Hyperbola, MINIMVM est axis; in Ellipsi autẽ, MAXIMVM est axis maior, MINIMVM verò axis minor.

Sit Hyperbole ABC, cuius axis transuersus DB, centrum E. Dico DB omnium transuersorum esse *MINIMVM*.

Sit quodcunque aliud HEA, & per B axi applicetur GBF, quę axi perpendicularis erit, ac sectionem continget in B. Erit ergo perpendicularis EB *MINIMA* ad [a] peripheriam ABC: quare EB minor erit EA, & duplum DB maius duplo HA: ex quo DB erit transuersorum *MINIMVM*.

[a] 10. h.



In Ellipsi verò ABC, cuius centrum E, & BD sit axis maior, & AC minor: patet BD esse transuersorum *MAXIMVM*, & AC *MINIMVM*, ex primo Coroll. 86. primi huius. Quod erat, &c.

THEO-

THEOR. XVII. PROP. XXV.

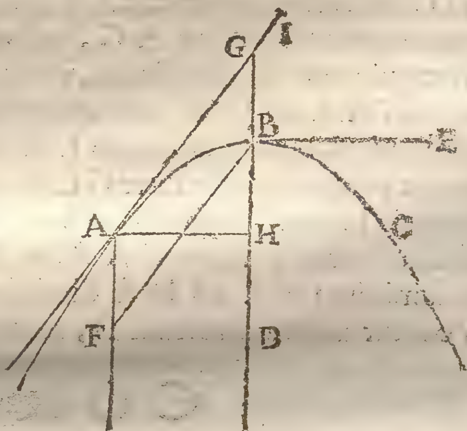
Rectorum laterum in Parabola, MINIMVM est rectum axis.

ESto Parabole A B C, cuius axis B D, rectum B E. Dico ipsum B E reliquorum rectorum esse *MINIMVM*. Sit quælibet alia diameter A F, quæ axi B D [a] æquidistabit, sitque ad A contingens A G, & B F ipsi A G æquidistans, quæ diametro A F erit ordinatim applicata; tandem axi applicetur A H, sumaturque A I æqualis recto diametri A F.

[a] ex 46. pr. conic.

Iam, ob contingentem A G, cum sit H B æqualis B G, & F A eidem B G æqualis, erit H B equalis F A: rectangulum ergo H B E ad F A I, vel quadratum [b] H A, ad quadratum B F, vel ad quadratum G A, erit vt B E ad A I, sed est quadratum A H minus quadrato A G, siue recta A H minor recta A G, cum acutus angulus A G B minor sit recto A H G, quare B E rectum, minus erit recto A I: eademque ratione demonstrabitur B E quocunque alio recto minus esse: quare B E rectum axis, est *MINIMVM*. Quod erat ostendendum.

[b] Coroll. primæ 1. huius.



COROLL.

HInc patet, data quacunque Parabolæ diametro, si quæratur ratio inter eius rectum, rectumque axis, hanc ipsam reperiri inter quadratum contingentis interceptæ, à vertice datæ diametri vsque ad axim, & quadratum axi semi-applicatæ ab eodem vertice.

Verum si omnium rectorum continuam proportionem, in lineis, & veluti ipsorum quandam propagationem ante oculos ponere expetemus, id à proximo Theoremate addiscere liceat.

THEOR. XIIX. PROP. XXVI.

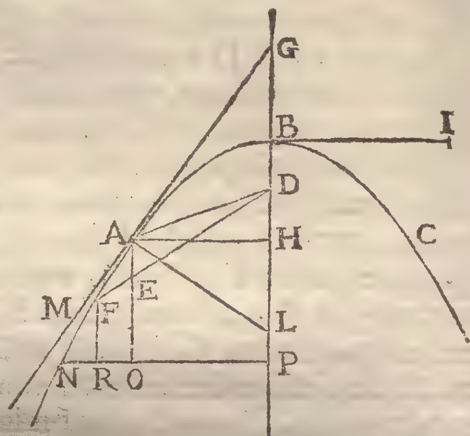
Recta latera diametrorum in Parabola, sunt inter se in ratione linearum ex puncto axis remoto à vertice per quadrantem sui recti, ad ipsarum diametrorum vertices eductarum.

ESto Parabole A B C, cuius axis B D rectum B I, ac eius quarta pars sit B D, & quælibet aliæ diametri sint A E, F G, &c. quarum vertices iungantur rectis D B, D A, D F, &c. Dico, tùm axis, tùm prædictorum diametrorum latera esse inter se, vt sunt ipsæ eductæ D B, D A, D F, &c.

 Eri-

Erigatur ex A contingenti A G perpendicularis A L, quæ axi [a] occurret in L, cui applicata A H, erit intercepta L H [b] æqualis dimidio recti B I, hoc est dupla interuallo D B, (cum punctum D distet à vertice B per quartam recti lateris partem ex hypotesi) & H G dupla [c] est quoq; G B, quare, & tota L G dupla est tota G D, siue L D æqualis D G, estque angulus L A G rectus, quare si cum centro D, interuallo G, vel L circulus describatur, ipse omnino transibit per A; vnde D A item æqualis erit ipsis D G, D L, siue L G erit dupla D A. Et cum rectum axis B D, ad rectum diametri A E, sit vt quadratum [d] A H ad A G, vel ob triangulorum similitudinem, vt quadratum A L ad L G, vel vt recta H L ad rectam L G (cum L A sit media proportionalis inter G L, L H) sumptis harum subduplis, erit rectũ axis ad rectum diametri A E, vt D B dimidium H L ad D A dimidium L G. Quod erat demonstrandum. Vocatur autem punctum D, focus Parabolæ.

[a] 88. primi huius.
[b] 90. primi huius.
[c] 35. primi conic.
[d] Coroll. 24. huius.



COROLL. I.

HInc cõstat, omnes eductas à foco ad Parabolę peripheriam, ęquari quartæ parti rectorum, earum diametrorum, quarum vertices sint termini, quibus ipsæ eductæ sectioni occurrunt: rectum enim axis B D ad rectum diametri A E, est vt D B ad D A, estque D B quarta pars recti B I, quare, & D A erit quarta pars recti lateris diametri A E, & D F quadrans recti, diametri F R. Vnde quò diametri ab axe remotiores fuerint, eò ipsarum recta maiora erunt: nam est D F maior D A, &c.

COROLL. II.

PAtet etiam, quamlibet eductam ex foco, ęquari aggregato ex interuallo foci ab axis vertice, & segmento axis inter verticem, & applicatam ex occursu eductæ cum sectione. Ostensa est enim D A æqualis D G, quæ æqualis est aggregato G B, cum B D, vel H B cum B D.

SCHOLIVM.

CVm demonstratum sit D G æqualem esse D A, erit angulus D G A, vel parallelarum externus E A M, æqualis angulo D A G, sed M A G Parabolen contingit in A, quare ex Opticæ legibus, si E A fuerit radius [e] incidens ad concauam peripheriam A B C, ipse A D erit reflexus; atque omnes radij axi Parabolę æquidistantes in punctum D coibunt; vnde si ipsi fuerint sonori, aut lucidi, simulque calidi, ibi sonus,

[e] Breuiùs, & clariùs quàm à Vitellione in 41. 9.

aut lux,

aut lux, & calor, augebitur: & si à Solis corpore directè emanantes, ibi fiet incensio, à qua punctum D foci nomen ademptum fuit.

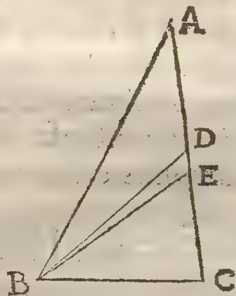
Si autem incidentes radij axi paralleli RF, OA à quadam recta NP axi ordinatim ducta secentur, erunt aggregata incidentium cum earum reflexis, simul æqualia.

Nam cum AD, ex præcedenti Coroll. 2. sit æqualis aggregato HB, cum BD, additis hinc inde æqualibus AO, HP, proueniet aggregatum OA, AD, æquale aggregato PB cum BD, itemque aggregatum RF, cum FD ostendetur æquale eidem aggregato PB cum BD; quare aggregata OAD, RFD æqualia erunt: quod acutissimè quidem à perspicacissimo Caualerio, in eius Speculo Vstorio animaduersum fuit.

LEMMA VI. PROP. XXVII.

Si in triangulo ABC, latus AC, ita sectum fuerit in D, vt rectangulum ACD æquale sit quadrato basis BC. Dico, iuncta BD, angulum ABC æqualem esse angulo BDC: si verò ACD rectangulum maius fuerit prædicto quadrato, & angulus angulo maior erit: & è contra.

NAm cum fuerit rectangulum ACD æquale quadrato CB, erit AC ad CB, vt BC ad CD, quare triangula ABC, BDC, ad communem angulum A constituta, similia erunt, ob idque angulus ABC æqualis angulo BDC.



At cum rectangulum ACD maius fuerit quadrato CB, facto rectangulo ACE æquali quadrato CB, erit CE minor CD, ergo iuncta BE, erit angulus ABC, æqualis angulo BEC, sed BEC maior est angulo BDC, quare ABC omninò maior erit angulo BDC.

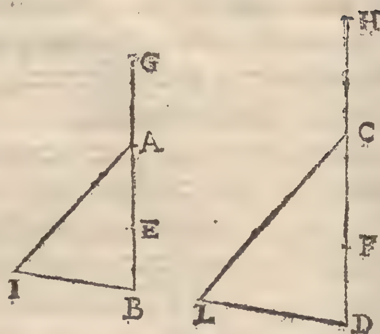
Si tandem rectangulum ACD minus fuerit quadrato CB, non absimili modo ostendetur angulum ABC minorem esse angulo ADC. Quod vltimò erat, &c.

LEMMA VII. PROP. XXVIII.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD proportionaliter sectæ fuerint in E, F, & homologis segmentis AE, CF æqualia sumantur AG, CH, & super AB, CD descripta sint similia triangula IAB, LCD. Dico vt rectangulum GBE, ad quadratum BI, ita esse rectangulum HDF ad quadratum DL.

CVm sit enim AE ad EB, vt CF ad FD, erit conuertendo, & componendo BA ad AE, vt DC ad CF, vel quadratum BA ad AE,

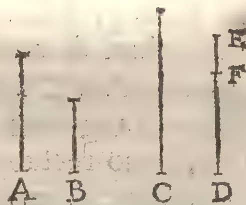
vt quadratum D C ad C F, & per conuersionem rationis, quadratum A B ad rectangulum G B E, vt quadratum C D ad rectangulum H D F, & conuertendo, rectangulum G B E ad quadratum A B, vt rectangulum H D F ad quadratum C D, & quadratum A B ad B I, est vt quadratum C D ad D L, ob triangulorum I A B, L C D similitudinem; quare ex æquo rectangulum G B E ad quadratum B I, erit vt rectangulum H D F ad quadratum D L. Quod erat, &c.



LEMMA VIII. PROP. XXIX.

Si quatuor magnitudinum eiusdem generis, prima A ad secundam B maiorem habuerit rationem, quàm tertia C ad quartam D E, sitque prima minor tertia, erit secunda minor quarta.

Fiat, vt A ad B, ita C ad D F, & cum A ad B habeat maiorem rationem, quàm C ad D E, habebit quoque C ad D F maiorem quàm ad D E, vnde D F erit minor D E, & est A ad B, vt C ad D F, erit permutando A ad C, vt B ad D F, estque A minor C, ergo B erit minor D F, & D F ostensa est minor D E, quare B eò ampliùs erit minor D E. Quod erat, &c.



THEOR. XIX. PROP. XXX.

Rectorum laterum in Hyperbola, cuius axis transuersus non sit minor eius recto latere, MINIMVM est rectum axis.

Esto Hyperbole A B C, cuius centrum D, axis transuersus E B, qui primò sit minor recto B F. Dico rectum B F esse rectorum laterum *MINIMVM*.

Sit quæcunque alia transuersa diameter G D A, in sectione producta ad I, cuius rectum sit A K ex A contingenter applicatum, & axi occurrens in H; & sit B I æquidistans A H, quæ ad diametrum G A I erit ordinatim ducta, atque ex I sit I L ipsi D I perpendicularis, ex A verò A M axi applicata, cui ex vertice B sit parallela, vel contingens B O, secans A H in P, iunganturque A B, O H.

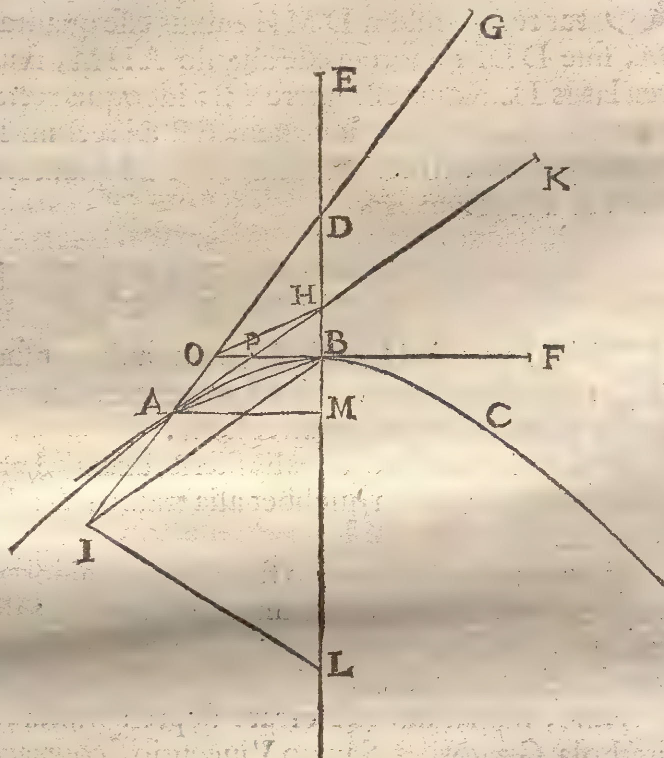
[a] 25. primi conic. Iam cum rectangulum D M H ad quadratum M A, sit[a] vt E B ad B F, sitque E B maior B F, erit rectangulum D M H maius quadrato M A,

quare

quare angulus D A M, siue in simili triangulo D L I, angulus D L I erit maior * angulo A H M, siue angulo parallelarum externo I B L: cum igitur in triangulo I B L sit angulus I B L minor I L B, erit latus I L minus latere I B. *27. h.

Præterea, cum triangula A P O, B P H [a] sint æqualia, addito communi triangulo A P B, erunt triangula A O B, A H B super eadem basi A B inter se æqualia, quare O H æquidistabit A B, ideoque vt D O ad O A, vel D B ad B M, ita D H ad H B, vel D A ad A I. Sunt ergo D M, D I proportionaliter sectæ in B, A, quibus additæ sunt D E, D G, æquales ipsis D B, D A, vtraq; vtrique, suntq; rectangula triãgula D M A, D I L similia inter se, quare rectangulum E M B ad quadratũ M A, [b] siue E B ad B F, est vt [c] rectãgulum G I A ad quadratum I L, cumque sit I L minor I B, erit quadratum I L minus quadrato I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, hoc est transuersum E B ad rectum B F, habebit maiorem rationem, quàm rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm [d] transuersum G A ad rectum A K; ergo prima E B, ad secundam B F, maiorem habet rationem quàm tertia G A ad quartam A K, sed est prima E B minor [e] tertia G A, ergo, & secunda B F erit [f] minor quarta A K; & sic de reliquis diametrorum rectis lateribus: quare B F, rectum axis transuersi, est *MINIMVM*, &c.

a 1. tertij conic.



b 21. primi conic.
c 28. h.
d 21 primi conic.
e 24. h.
f 29. h.

Si autem axis E B æqualis fuerit eius recto B F; cum demonstratum sit rectangulum G I A ad quadratum I L esse vt transuersus axis E B ad rectum B F; patet rectangulum quoque G I A æquari quadrato I L, sed quando E B æquatur B F, rectangulum etiam D M H æquatur [g] quadrato M A, & tunc angulus D A M, ęqualis est [h] angulo A H M, ergo etiam angulus D L I æquabitur angulo I B L, hoc est linea I B æqualis erit I L, sed erat rectangulum G I A æquale quadrato I L, ergo idem rectangulum G I A æquabitur quadrato I B, siue transuersa diameter A G, eius recto A K æqualis erit, & hoc semper, quæcunque sit ducta transuersa diameter præter axim.

g 37. primi conic.
h 27. h.

Cum ergo Hyperbole fuerit rectangula æquilatera, ad aliam quoque diametri applicationem æquilatera erit, sed axis est transuersorum [i] *MINIMVM*: ergo in Hyperbola, cuius axis transuersus eius rectum adæquet, rectum axis aliorum rectorum est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

i 24. h.

SCHO-

SCHOLIVM.

CVm fuerit axis E B minor suo recto B F, ijsdem rationibus ostendetur rectangulum D M H minus esse quadrato M A, & angulum D A M, siue D L I minorem esse angulo A H M, siue angulo I B L, ac propterea latus I L maius esse latere I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, siue transuersum axem E B ad rectum B F, minorem habere rationem, quàm idem rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm transuersa G A ad rectum A K,

COROLL.

EX his patet, in Hyperbola, cuius axis transuersus sit maior recto, maiorem esse rationem axis ad proprium rectum, quàm cuiuslibet aliæ trāsuersæ diametri ad proprium rectum.

Et si axis, suo recto æqualis fuerit, axem ad proprium rectum eandem rationem habere, quàm quęlibet alia transuersa ad proprium rectum, ob ęqualitatem.

Si denique axis suo recto fuerit minor, minorem esse rationem inter axem, ac proprium rectum, quàm inter quamcunque aliam diametrum propriumq; rectum. Sed hæc sunt præter institutum nostrum, & fusim à præclarissimo Mydorgio pertractata.

Hinc, humanum esse errare deprehenditur, cum propositio 70. de Hyperbola Gregorij à Sancto Vincentio, contrarium his falsò concludat ex præcedenti 69. in qua (pace tanti Viri dictum sit) nescio quo fato hallucinatus est.

LEMMA IX. PROP. XXXI.

Si quatuor magnitudinum, prima A ad secundam B minorem habuerit rationem, quàm tertia C D ad quartam E, sitque prima maior secunda, erit tertia maior quarta.



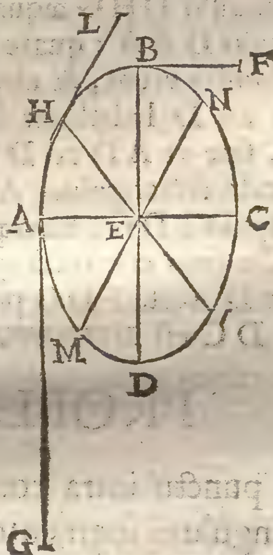
FIat enim vt A ad B, ita C F ad E; cum ergo A ad B minorem habeat rationem quàm C D ad E, habebit quoque C F ad E, minorem quàm C D ad E; quare C F erit minor C D. Et cum sit A ad B vt C F ad E, dataque sit A, maior B, erit C F maior E, & eò magis C D maior eadem E. Quod erat, &c.

THEO-

THEOR. XX. PROP. XXXII.

Rectorum laterum in Ellipsi MAXIMVM est rectum minoris axis, MINIMVM verò rectum maioris.

Esto Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, rectum A G, & axis maior B D, rectum B F. Dico A G rectorum omnium esse *MAXIMVM*; B F verò *MINIMVM*.



Sit enim quælibet alia transuersa diameter H I, cuius rectum H L, sitque diameter M N ipsi H I coniugata, quæ media proportionalis erit inter I H, & H L; vnde quadratum ipsius M N æquabitur rectangulo I H L, vti etiam quadratum A C æquatur rectangulo D B F, & quadratum B D rectangulo C A G; sed est quadratum A C, minus quadrato M N, cum sit transuersa A C minor [a] transuersa M N, ergo rectangulum D B F minus erit rectangulo I H L, quare B D ad H I minorem habebit rationem quàm H L ad B F, estque B D maior [b] H I, ergo & rectum H L erit maior [c] recto B F.

Præterea, cum sit M N minor [d] D B, erit quadratum M N minus quadrato D B, siue rectangulum I H L minus rectangulo C A G, vnde I H ad C A minorem habebit rationem quàm A G ad H L, sed est I H maior [e] C A, ergo rectum A G erit maius recto H L. Cum sit ergo A G maior H L, & H L maior [f] B F erit A G adhuc maior B F. Quare A G rectum minoris axis est *MAXIMVM*, B F verò maioris axis rectum, est *MINIMVM*. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. h.
[b] ibidem.
[c] 31. h.
[d] 24. h.
[e] ibidem.
[f] 31. h.

PROBL. IV. PROP. XXXIII.

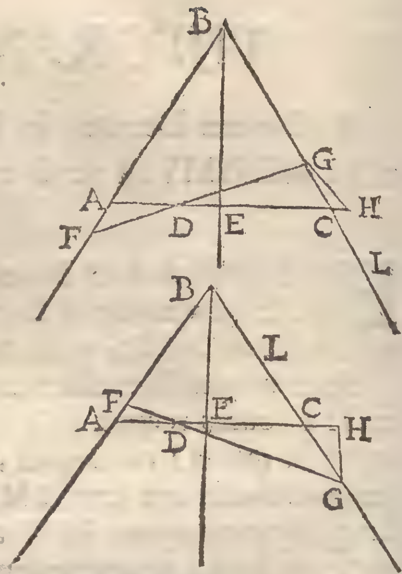
A puncto dato intra angulum rectilineum rectam applicare, cuius rectangulum segmentorum sit MINIMVM.

Esto A B C angulus rectilineus, in quo datum punctum sit D. Oportet ex D rectam in angulo applicare, ita vt rectangulum sub ipsius segmentis sit *MINIMVM*.

Ducatur B E angulum A B C bifariam secans, cui per D recta perpendicularis applicetur A D C. Dico hanc ipsam quæsitum soluere.

Cum enim in triangulis B E A, B E C anguli ad E sint recti, & ad B facti æquales, erunt reliqui anguli B A E, B C E æquales, & qui infra A C, basim trianguli æquicruris A B C, pariter æquales.

Iam ducatur per D quælibet alia F D G. Et cum in triangulo D G C sit externus angulus D C L maior interno D G C, fiat angulus D G H ipsi D C L, siue D A F æqualis, estque angulus G D C æqualis angulo A D F, & duo simul D A F, A D F minores sunt duobus rectis, ergo & duo D G H, G D C erunt duobus rectis minores, siue G H cum D C producta conueniet, vt in H, eritque reliquus angulus H in triangulo D H G æqualis reliquo F in triangulo D F A: quare huiusmodi triangula similia erunt, & circùm æquales angulos ad D habebunt latera proportionalia, siue vt A D ad D F, ita G D ad D H, vnde rectangulum A D H æquale erit rectangulo F D G, ideoque rectangulum A D C minus erit rectangulo F D G, & hoc semper vbicunque applicata sit per D, recta F D G præter A D C. Quare rectangulum sub segmentis A D, D C est *MINIMVM* quæsitum. Quod erat faciendum.



PROBL. V. PROP. XXXIV.

A puncto intra coni-sectionem dato rectam applicare, cuius rectangulum segmentorum sit MINIMVM. In Ellipsi verò, & MAXIMVM rectangulum reperire.

Esto primùm A B C Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, cuius axis B D, & datum intra ipsam punctum sit E. Oportet per E rectam sectioni applicare, ita vt rectangulum sub eius segmentis sit *MINIMVM*.

Applicetur per E recta A E D C axi ordinatim ducta. Dico hanc ipsam quæsitum soluere: siue rectangulum A E C esse *MINIMVM*.

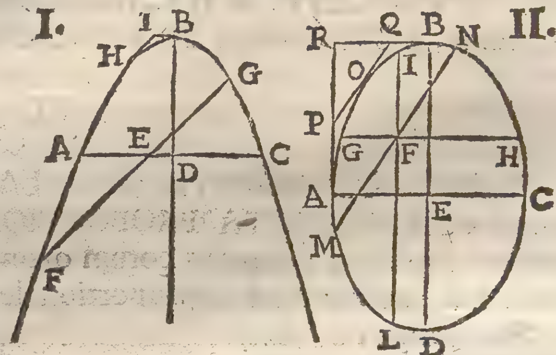
Nam applicata per E qualibet alia inclinata F E G: non absimili modo, ac in 26. secundi conicorum, demonstrabitur applicatas A C, F G intra sectionem se mutuò secantes in E, in ipso E nunquam bifariam simul secari, ex quo ipsarum applicatarum diametri disiunctæ erunt inter se, ideoque B vertex portionis A B C non erit vertex portionis F H G: is ergo sit H; ducaturque ex B sectionem contingens B I, siue applicatę A C æquidistans; itemque ex H recta contingens H I, siue F G parallela, quę contingentes simul conuenient [a] in I. Erit ergo rectangulum A E C, ad rectangulum G E C, [b] vt quadratum B I ad quadratum H I; sed est contingens B I, ad axis verticem, minor [c] contingente H I, ergo & quadratum quadrato minus erit, siue rectangulum A E C minus rectangulo F E G, & hoc semper quæcunque sit quæ per E applicatur diuersa ab applicata A C, ergo rectangulum A E C est *MINIMVM* quæsitum.

a 58. primi h.
b 16. tertij conic.
c 87. primi huius.

Sit

Sit verò ABCD in secunda figura Ellipsis, cuius axis maior BD, minor AC, centrum E, & punctum intra datum sit F. Oportet per F rectas in sectione applicare quales inuenire proposuimus.

Sit per F maiori axi BD ordinatim ducta GFH, minori verò sit IFL. Dico rectangulum GFH esse *MINIMVM*, *MAXIMVM* verò IFL.



Sit quælibet alia per F applicata MFN, & portionis MON sit vertex O, atque ex axium verticibus A, B, vti etiam ex O agantur contingentes AP, BQ, POQ, quæ simul occurrent [a] in R, P, Q. Erit ergo rectangulum GFH ad IFL, [b] vt quadratum BR ad quadratum AR, sed est contingens BR, [c] minor AR, siue quadratum BR minus quadrato AR, ergo, & rectangulum GFH minus erit rectangulo IFL.

a 58. primi h.
b 16. tertij conic.
c 87 primi huius.

Præterea rectangulum GFH ad MFN est vt quadratum BQ ad quadratum OQ, sed est contingens BQ [d] minor contingente OQ, siue quadratum BQ minus quadrato OQ, ergo rectangulum GFH minus est rectangulo MFN, & hoc semper vbicunque cadat applicata MFN: quare rectangulum GFH est *MINIMVM* quæsitum.

d ibidem.

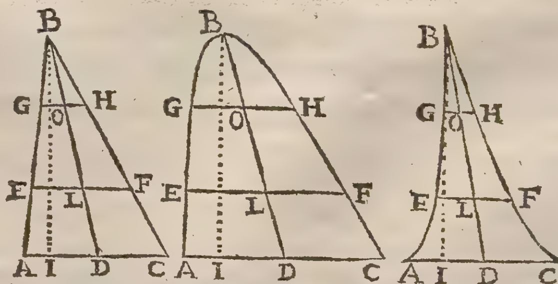
Demùm cum rectangulum IFL ad NFM, sit [e] vt quadratum AP ad quadratum QP, sitque contingens AP [f] maior contingente QP erit quadratum AP maius quadrato QP, ergo rectangulum quoque IFL maius erit rectangulo NFM, & hoc semper vbicunque sit ducta NFM inter applicatas IFL, GFH quare rectangulum IFL est *MAXIMVM* quæsitum. Quod vltimò inuenire propositum fuit.

e 16. tertij huius.
f 87. primi huius.

DEFINITIONES.

I.

PLANVM ACVMINATVM REGVLARE, vel ACVMINATVM tantùm voco omnem figuram planam, circa diametrum, in alteram partem deficientem, & cuius perimeter sit in easdem partes cauus.

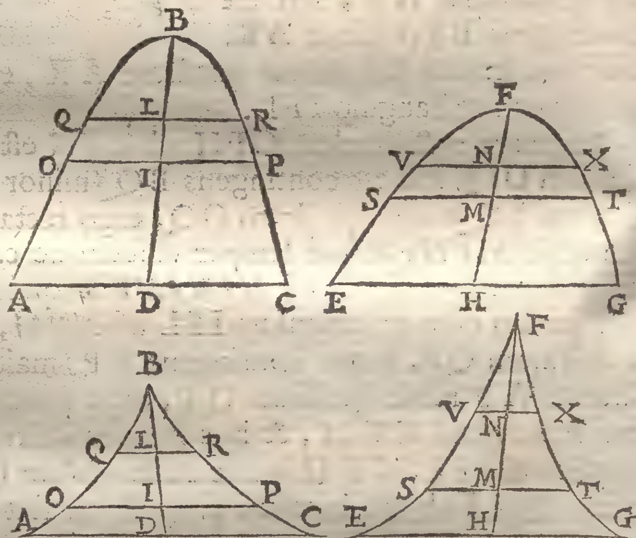


Hoc est figura plana ABC, in qua omnes rectæ lineæ AC, EF, GH, &c. à figurę perimetro terminatæ, ac inter se æquidistantes, à quadam recta BD bifariam secentur, & in alteram partem, vt puta ad B, continuò decrescant, donec abeant in punctum B, sitque earum perimeter AGBHC ad easdem partes cauus vocetur PLA-

NVM ACVMINATVM REGVLARE, vel potius (breuitatis causa) ACVMINATVM, cuius terminus B vocetur VERTEX; & æquidistantes AC, EF, GH, &c. quæ à BD bifariam diuiduntur, dicantur APPLICATÆ ad ipsam BD, quæ vocetur DIAMETER, vel AXIS quando ipsa perpendiculariter secet easdem applicatas. AC verò dicatur BASIS ACVMINATI; & BI, quæ à vertice super basim ducitur perpendicularis, ACVMINATI ALTITVDO nuncupetur.

II.

PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnes applicatæ à punctis eorum diametros proportionaliter diuidentibus, sint quoque inter se proportionales.



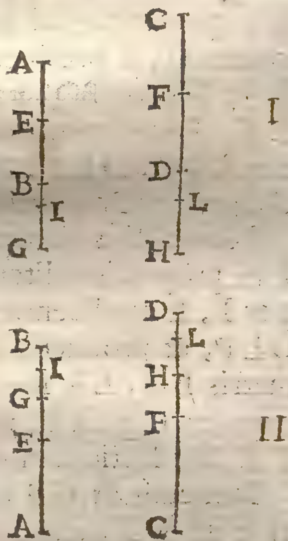
Sint nempe duo Acuminata Regularia ABC, EFG, super bases AC, EG, qualia in præcedenti definitione explicauimus, quorum diametri BD, FH proportionaliter sectæ sint in quotcunque punctis I, M; L, N, &c. siue sit BI ad ID, vt FM ad MH, & BL ad LD, vt FN ad NH, &c. atque in ea punctis inter sectionum applicatæ sint OP, QR; ST, VX, quę ex homologis punctis sint ad inuicem proportionales, hoc est vt AC ad EG, ita OP ad ST, & QR ad VX, &c. huiusmodi figuræ vocentur PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA.

LEM-

LEMMA X. PROP. XXXV.

Si duæ rectæ lineæ terminatæ A B, C D bifariam sectæ fuerint in E, F, & proportionaliter producantur, vt in prima figura; vel diuidantur, vt in secunda, in G, H, ita vt sit A B ad B G, vt C D ad D H, partesq; adiectæ, vel demptæ B G, D H iterum proportionaliter secentur in I, L, ita vt B I ad I G, sit vt D L ad L H. Dico rectangulum A G B ad rectangulum A I B, esse vt rectangulum C H D ad rectangulum C L D.

NAm cum sit A B ad B G, vt C D ad D H, erit in prima figura componendo, in secunda verò diuidendo A G ad G B, vt C H ad H D, & est B G ad G I, vt D H ad H L (cum diuidendo factum sit B I ad I G, vt D L ad L H) ergo ex æquo A G ad G I erit vt C H ad H L, & in prima figura per conuersionem rationis, in secunda verò, componendo, per conuersionem rationis, & conuertendo, erit G A ad A I, vt H C ad C L: & cum superiùs demonstratum sit esse B G ad G I, vt D H ad H L, erit, per conuersionem rationis, G B ad B I, vt H D ad D L. Iam rectangulum A G B ad A I B habet rationem compositam ex ratione G A ad A I, vel ex H C ad C L, & ex ratione G B ad B I, vel ex H D ad D L, sed ex ijsdem rationibus H C ad C D, & H D ad D L componitur ratio rectanguli C H D ad rectangulum C L D, quare vt rectangulum A G B ad A I B, ita rectangulum C H D ad C L D. Quod erat, &c.



THEOR. XXI. PROP. XXXVI.

Quælibet Portiones eiusdem, vel diuersarum Parabolarum sunt Acuminata Proportionalia.

Item, Portiones eiusdem, vel diuersarum Hyperbolarum, Ellipsium, aut Circulorum; quarum tamen segmenta diametrorum in ijsdem portionibus intercepta ad suas semi-diametros eandem homologam habeant rationem, sunt pariter inter se Acuminata proportionalia.

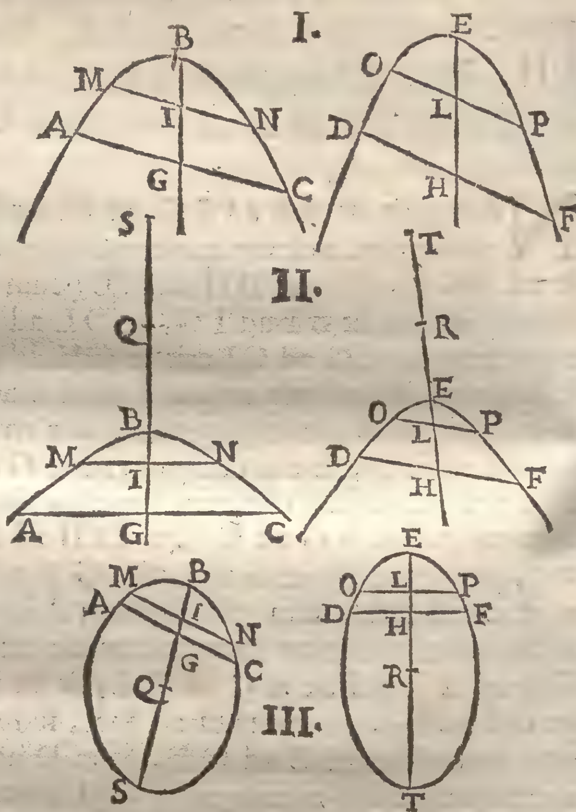
SInt primò duę portiones A B C, D E F eiusdem, vel diuersarum Parabolarum in prima figura, quarum bases sint A C, D F. Dico ipsas por-

ſas portiones eſſe Acuminata Proportionalia.

Repertis enim earum diametris BG, EH, diuidantur ipſæ proportionaliter in I, L, applicenturque MIN, OLP. Cum ſit ergo GI ad IB, vt HL ad LE, erit componendo GB ad BI, hoc eſt quadratum [a] AC ad MN, vt HE ad EL, ſiue vt quadratum DF ad OP, ideoque & applicata AC ad MN, vt applicata DF ad OP. Quare, ex ſecunda præcedentium definitionum, ipſæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata Proportionalia. Quod primò, &c.

[a] 20. primi conic.

Præterea ſint ABC, DEF duæ portiones eiuſdem, vel diuerſarum Hyperbolarum, vt in ſecunda figura, vel Ellipſium, aut circulorum, vt in tertia, quarum baſes AC, DF, & diametrorum ſegmenta in ipſis intercepta ſint BG, EH, quæ vſque ad ſectionum centra Q, R producantur, & ſit vt GB ad BQ, ita HE ad ER. Dico item has portiones ABC, DEF eſſe inter ſe Acuminata Proportionalia.



Nam diuiſis diametris BG, EH proportionaliter in I, L, per I, L applicentur MIN, OLP, & productis ſemi-diametris BQ, ER ſumantur eis æquales QS, RT, ita vt SB, TE ſint ſectionum diametri.

Iam cum ſit GB ad BQ vt HE ad ER, erit conuertendo, & ſumptis antecedentium duplis SB ad BG, vt TE ad EH, ſuntq; SB, TE bifariam ſectæ in Q, R, & partes adiectæ, in ſecunda figura, vel demptæ in tertia BG, EH proportionaliter diuiſæ ſunt in I, L, ergo rectangulum SGB ad SIB, ſiue [b] quadratum AC, ad MN, erit vt [c] rectangulum THE, ad TLE, vel vt [d] quadratum DF ad OP, nempe applicata AC ad MN erit vt applicata DF ad OP, & permutando AC ad DF, vt MN ad OP, & hoc ſemper de quibuslibet applicatis per pnncta diametrorum BG, EH ipſas proportionaliter ſecantia, quare, ex definitione ſecunda, ipſæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonſtrandum erat.

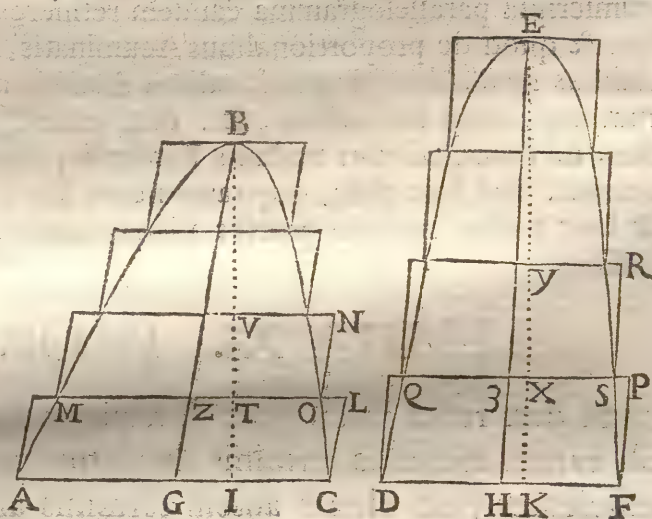
[b] 21. primi conic.
[c] 35. h.
[d] 21. primi conic.

THEO-

THEOR. XXII. PROP. XXXVII.

Proportionalia Acuminata, quorum bases eorum altitudinibus sint reciprocè proportionales, sunt inter se æqualia.

SInt duo proportionalia Acuminata A B C, D E F, quorum diametri sint B G, E H, altitudines verò B I, E L, quæ inter se reciprocam habeant rationem basium A C, D F; siue sit vt A C ad D F, ita E L ad B I. Dico huiusmodi Acuminata inter se æqualia esse.



Si enim possibile est, sit alterum ipsorum, nempe A B C reliquo D E F minus, & per continuam diametri B G bisectionem, iuxta vulgatam methodum, circumscribatur ipsi A B C, figura ex parallelogrammis constans æqualium altitudinum A L, M N, &c. quorum altitudines I T, T V, &c. æquales erunt (cum altitudo B I in tot æquales partes diuidatur ab æquidistantibus parallelogrammorum basibus A C, M O, &c. in quot partes diameter B G secta fuit) huiusmodi autem circumscripta figura ex parallelogrammis, acuminatum A B C superet minori excessu, quò acuminatum D E F ponitur excedere idem acuminatum A B C, adeo vt ipsa circumscripta A B N L C sit adhuc minor acuminato D E F, cui circumscribatur item figura D E R P F ex totidem parallelogrammis D P, Q R &c. æqualium altitudinum K X, X Y, &c.

Iam, cum sit basis A C ad D F, vt altitudo E K ad B I, vel vt submultiplex K X ad æque-submultiplicem I T, erit parallelogrammum A L, æquale parallelogrammo D P. Et cum, ex constructione, sit G B ad B Z, vt H E ad E 3, erit, ex definitione proportionalium acuminatorum, A C ad D F, vt M O ad Q S, sed A C ad D F est vt E K ad B I, ergo, & M O ad Q S erit vt E K ad B I, vel vt submultiplex X Y ad æque-submultiplicem T V: parallelogrammum igitur M N æquatur parallelogrammo Q R; & sic de reliquis, singula singulis: ergo vniuersa figura A B N L C æqualis erit vniuersæ D E R P F, sed figura A B N L C facta est minor acuminato D E F, quare figura D E R P F erit quoque minor eodem sibi inscripto acuminato D E F: totum parte, quod est absurdum. Nullum ergo horum acuminatorum est reliquo minus, quapropter æqualia esse inter se necesse est. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hac facilè elicietur methodus, qua pręcipuas quorumlibet Acuminatorum passiones ostendi possint, nempe: ipsa Acuminata à diametris bifariam secari: & Proportionalia Acuminata ęqualium altitudinum inter se esse vt bases; & (tanquam Corollarium) Acuminata proportionalia æqualium basium esse inter se vt altitudines: item duo quæcunque Acuminata proportionalia habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & ex ratione altitudinum: & ad inscripta triangula, vel circumscripta parallelogramma eandem retinere rationem, aliaque his similia: & quod de proportionalibus Acuminatis, idem penitus euenire de similibus mensalibus proportionalium Acuminatorum, præmissa priùs harum mensalium definitione, &c. quæ omnia ad infinitas figurarum species, ne dum hactenus tractatis Parabolis, Hyperbolis, &c. maximè conducunt. Sed hæc aliàs, quę tamen cum sint haud obscurę indagationis, & huic nostro instituto prorsus aliena, erudito Lectori sic præmonstrasse sufficiat.

LEMMA XI. PROP. XXXVIII.

Si duæ rectæ lineæ inter se æquales fuerint, & parallelæ, & ab earum extremis terminis ducantur lineæ quemlibet angulum efficientes, ab alteris autem terminis aliæ ipsis æquidistantes; hæ quoque angulum inter datas constituent, & recta angulorum vertices coniungens erit vtrique datarum æqualis, & parallela.

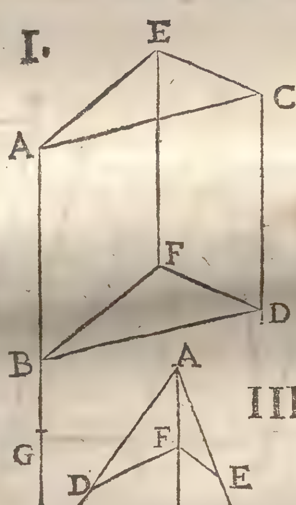
Si verò datæ rectæ lineæ terminatæ ad quemcunque angulum applicatæ fuerint, & vbicunque proportionaliter sectę, aut productæ, atque ab homologis earum punctis; hoc est, vel ab extremis terminis, vel ab inter-sectionum, aut productionum punctis, ductæ fuerint intra datum angulum aliæ rectæ lineæ, quæ item angulum quemlibet constituant, à reliquis verò punctis aliæ ipsis æquidistanter ducantur, hæ pariter tertium angulum efficient intra datum, & horum trium angulorum vertices in vna, eademque recta linea reperientur.

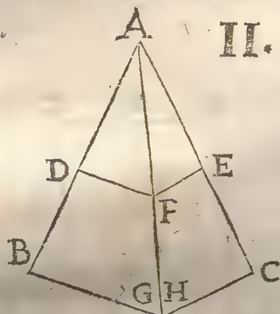
SIt, in prima figura, recta AB æqualis, & parallela ad CD, & ex terminis A, C inter eas constituatur angulus quicunque AEC ductaque BF parallela ad AE, DF verò ad CE. Dico BF, DF inter datas æquidistantes conuenire, & EF iungentem angulorum vertices, alteri AB, vel CD esse æqualem, & parallelam.

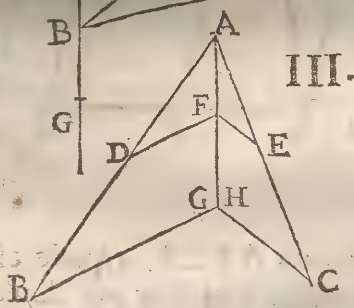
Iungantur AC, BD: & quoniam BF est parallela ad AE, erit angulus GBF æqualis angulo BAE; cumque AB sit æqualis, & parallela ad CB, erunt

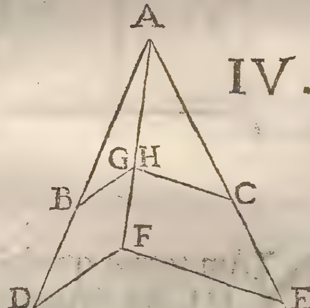
C B, erunt A C, B D æquales, & parallelæ, idcirco angulus G B D æqualis angulo B A C, ergo reliquus angulus D B F, æqualis erit reliquo C A E; eadem ratione oſtendetur angulum B D F æquari angulo A C E, & B D demonſtrata eſt æqualis ipſi A C, ergo in triangulis B F D, A E C, cum æqualia latera B D, A C æqualibus angulis adiaceant, erit tertius angulus B F D, tertio A E C æqualis, & reliqua latera B F, A E, itemque D F, C E, inter ſe æqualia, ſed ſunt quoque parallela, ob hypoteſim, ergo E F angulorum vertices iungens, erit æqualis, & parallela ad A B, vel ad C D; cadetque inter datas A B, C D, cum punctum E, ex quo ducitur ſit inter eas, ſicque angulus B F D cadet intra datas æquidiſtantes A B, C D. Quod primò oſtendere opus erat.

Sint verò, in reliquis tribus figuris, datæ rectæ A B, A C terminatæ angulum B A C conſtituentes, quę proportionaliter ſecentur, vel producantur in D, E; & ex punctis D, E ductæ ſint D F, E F ſibi ipſis occurrentes intra datum angulum in F, ex reliquis verò punctis B C, alię ipſis æquidiſtantes B G, C H. Dico item has intra angulum B A C inter ſe conuenire, vt in G, ac tres angulorum occurſus A, F, G in eadem recta linea reperiri.





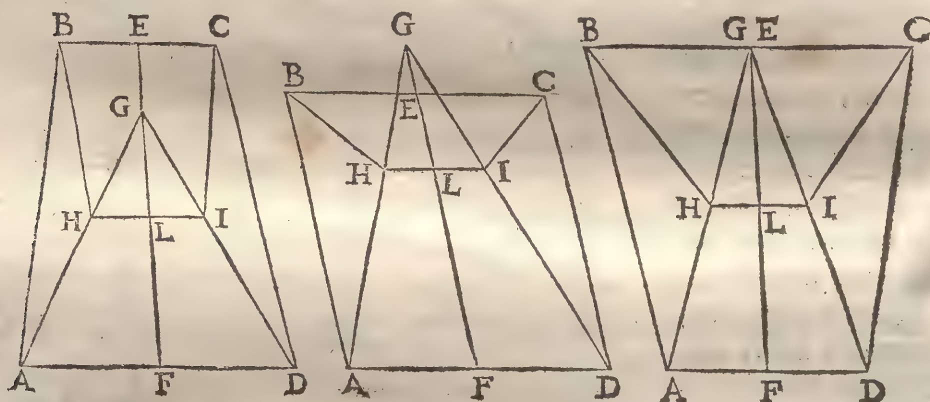




Nam iuncta A F, & producta cum B G ipſi D F ęquidiſtet, & A F cum D F conueniat, conueniet quoque producta cum B G, ſit ergo G punctum occurſus. Item cum C H æquidiſtet ipſi E F, & A F ſecet E F, producta ſecabit quoque C H: ſecet in H. Oſtendam puncta G, H, quæ iam in recta A F reperiri demonſtratum eſt, eſſe vnum idemque punctum rectæ A F: eſt enim in triangulo A G B vt G A ad A F, ita B A ad A D, vel, ob hypoteſim, vt C A ad A E, vel vt H A ad A F, ergo G A, & H A ſunt æquales, hoc ęſt puncta G, & H non ſunt duo, ſed vnum tantùm, & in eadem recta linea in qua ſunt puncta A, F. Ergo B G, C H inter ſe conueniunt intra datum angulum, ac trium angulorum vertices ſunt in directum poſiti. Quod vltimò oſtendere propoſitum fuit.

LEMMA XII. PROP. XXXIX.

Si fuerit quodcunque quadrilaterum rectilineum ABCD, cuius oppoſita latera AD, BC bifariam ſecta ſint in punctis F, E, iunctaque ſit recta FE, in qua ſumptum ſit quodlibet punctum G, vel intra, vel extra quadrilaterum à quo ad terminos alterius ęquidiſtantium veluti ad A, D, ductæ ſint GA, GD, ac in triangulo AGD, ſit quædam HI ipſis AD, BC æquidiſtans, & EF ſecans in L. Dico, ſi iungantur BH, CI, triangula ABH, DCI inter ſe æqualia eſſe.



NAm totum quadrilaterum ABEF, æquale eſt integro quadrilatero DCEF (vtrunque enim diuiditur per diagonales AE, DE, in duo triangula alterum alteri æquale, eò quod ſint ſuper æqualibus baſibus, ac inter eaſdem parallelas) eadem ratione quadrilaterum AHLF æquale eſt quadrilatero DILF, & quadrilaterum BELH æquale quadrilatero CELI, ergo, & reliquum triangulum ABH reliquo triangulo DCI eſt æquale. Quod erat demonſtrandum.

His itaque præoſtenſis, ad inueſtigationem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE portionum per idem datum punctum ex qualibet coni-ſectione abſciſſarum accedamus, præmiſſo tamen, ſuper figuras tertij Schematiſmi, ſequenti Theoremate, vniuerſalem, ſimulque facilem methodum exhibente, qua æquales portiones de eadem coni-ſectione abſcindi poſſunt.

THEO-

THEOR. XXIII. PROP. XXXX.

Si in Parabola, ex binis ipsius diametris duo æqualia segmenta sint abscissa: in Hyperbola verò, Ellipsi, vel circulo duæ semi-diametri proportionaliter intra sectionem sectę fuerint, & ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis diuisionum, in reliquis sectionibus, ordinatim applicentur lineæ ad suas diametros, & producantur, donec ad vtranque partem sectioni occurrant: coni-sectionum portiones; at in Ellipsi, vel circulo, minores portiones ijsdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales erunt. Schematismus 3.

Esto ABC Parabole, in prima, secunda, & tertia figura, vel Hyperbole in quarta, quinta, & sexta, aut Ellipsis in septima, octaua, & nona, aut circulus, in reliquis, quarum sectionum binæ diametri in Parabola sint DB, DE, à quibus dempta sint æqualia segmenta BF, EG, & in reliquis binæ semi-diametri DB, DE (quæ primò in Ellipsi, vel circulo omnino constituant angulum BDE) ita intra sectiones sectæ sint in F, G, vt DB ad BF, sit vt DE ad EG, & per puncta F, G, in singulis figuris sint ad diametros DB, DE ordinatim ductæ AFC, HGI, quæ ad vtranque partem sectioni occurrent [a] in punctis A, C; H, I, & bifariam in F, G secabuntur, cum DB, DG, sint ipsarum diametri. Dico portiones ABC, HEI super ijsdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales esse. a 19. primi conic.

Nam, ductis ex B, E rectis BN, EN sectionem contingentibus in B, E; ipsæ occurrent [b] simul in N inter diametros DB, DE, & applicatis HI, AC æquidistabunt. Iungantur præterea EB, GF. b 58. primi huius.

Iam in Parabolis, cum sint EG, BF inter se æquales, & parallelę, iunctæ quoq; EB, GF inter se æquidistabunt, & cum ex illarum terminis E, B, ductæ sint rectę EN, BN angulum ENB inter eas constituentes, atq; ex reliquis terminis G, F, sint GI, FA, ipsis EN, BN æquidistantes; ipsæ GI, FA inter easdem EG, BF simul conuenient, vt in M, & iuncta NM ijsdem EG, BF æquidistabit, siue erit altera Parabolæ [c] diameter. Cum ergo sit EG parallela ad [d] NM, & EN ad GM, erit EN æqualis GM; eademque ratione BN æqualis FM, quare vt EN ad NB, ita GM ad MF. c 38. h. d 46. primi conic.

In reliquis verò figuris, cum rectæ DB, DE angulum EDB efficientes, proportionaliter sectæ, aut productæ sint in G, F, sintque ex earum homologis terminis E, B ductæ EN, BN angulum inter ipsas constituentes ENB, & ex reliquis diuisionum punctis G, F sint GI, FA ijsdem EN, BN parallelę, hæ intra datum angulum EDB simul conuenient, vt in M; & recta iungens puncta D, M, per occursum M omnino transibit, siue [e] erit alia sectionis diameter. Cumque ob parallelas GM, EN sit GM ad EN, vt MD ad DN, & ob parallelas MF, NB sit MF ad NB, e 38. h. f 47. primi conic.

vt eadem M D ad D N, erit G M ad E N, vt M F ad N B, & permutando G M ad M F, vt E N ad N B.

Cum ergo, in figuris prima, secunda, quarta, quinta, septima, octaua, decima, ac decimaprima sit G M ad M F, vt E N ad N B, erit quoq; quadratum G M ad M F, vt quadratum E N ad N B, vel vt [a] rectangulum H M I ad rectangulum C M A, & permutando quadratum G M ad rectangulum H M I, vt quadratum F M ad rectangulum C M A, & couertendo in prima, quarta, septima, & decima figura (in quibus applicatæ H I, C A secant se mutuò intra sectionem in puncto M) rectangulum H M I ad quadratum G M, vt rectangulum C M A ad quadratum F M, & componendo rectangulum H M I cum quadrato G M, siue vnicum quadratum H G, (nam est A C bifariam secta in G, & non bifariam in M) ad quadratum G M, vt rectangulum C M A cum quadrato F M, siue vt vnicum quadratum C F (cum A C quoque secta sit bifariam in F, & non bifariam in M) ad quadratum F M. In figuris verò secunda, quinta, octaua, & vndecima, in quibus applicatæ H I, C A se mutuò secant extra sectionem in puncto M, cum sit G M quadratum ad rectangulum H M I, vt quadratum F M ad rectangulum C M A, erit per conuersionem rationis quadratum M G ad quadratum G H (est enim rectangulum H M I cum quadrato G H æquale quadrato G M, cum sit H I bifariam secta in G, & ei adiecta sit I M) vt quadratum M F ad quadratum F C, ob eandem rationem, (nam C A quoq; bifariam secta est in C, eiq; addita est in directum A M) & conuertendo quadratum H G ad G M quadratum, erit vt quadratum C F ad F M. Itaq; in singulis prædictis figuris, deptis tertia, sexta, nona, & duodecima, cum demonstratum sit quadratum H G ad G M esse vt quadratum C F ad F M, erit quoque linea H G ad G M, vt linea C F ad F M. In figuris deniq; tertia, sexta, nona, & duodecima, in quibus applicatę H I, C A conueniunt simul cum ipsa sectione in puncto M, patet quoque esse H G ad G M, vt C F ad F M, cum ipsæ H I, C A, vel H M, C M bifariam secentur in G, F ab earum diametris E G, B F. Est igitur in qualibet datarum figurarum huius schematismi, H G ad G M, vt C F ad F M, quare iuncta H C æquidistabit iunctæ G F; sed est I G æqualis H G, & A F æqualis C F, ergo etiam I G ad G M erit vt A F ad F M, ideoque iuncta A I æquidistabit eidem G F, sed E B quoque ipsi G F ęquidistat (vt iam supra ostendimus in Parabolis, & cum in reliquis sectionibus sit D E ad E G, vt D B ad B F ex hypotesi) ergo quatuor iunctæ rectæ lineæ E B, A I, G F, H C sunt inter se parallelæ; sed N M, quàm superiùs ostendimus esse sectionis diametrum, transit per N occursum contingentium E N, B N, ergo recta E B puncta contactuum iungens, ab eadem diametro N M D bifariam secabitur, [b] vt in O, ac ideò omnes aliæ in sectione applicatæ ipsi E B ęquidistantes, nempe A I, G F, H C, ab eadem D N M bifariam secabuntur, vt H C in P.

Denique iungantur rectæ H E, C B, & fiet quadrilaterum H E B C, cuius opposita latera H C, E B sunt parallela, & bifariam secta à recta P O, in qua sumptum est punctum M, & ab ipso ad terminos alterius ęquidistantium nempe ad H, C ductę sunt rectæ M H, M C, ac in triangulo H M C est G F ipsi H C parallela, quare iunctę E G, B F auferent triangula E G H, B F C inter se [c] æqualia; quapropter basis H G ad basim C F erit reciprocè, vt altitudo

[a] 17. tertij conic.

[b] 30. secũdi conic.

[c] 39. h.

titudo trianguli CBF ad altitudinem trianguli HEG, sed horum triangulorum altitudines eædem sunt, ac altitudines portionum ABC, HEI, cum puncta B, E sint earundem portionum vertices; quare vt basis HG ad basim CF, vel sumptis duplis, vt HI basis portionis HEI, ad AC basim portionis ABC, ita reciprocè altitudo portionis ABC ad altitudinem portionis HEI, suntque huiusmodi portiones [a] Acuminata regularia, & proportionalia, & eorum bases altitudinibus reciprocantur, quare ipsa Acuminata, seu portiones HEI, ABC inter se sunt [b] æquales. Quod ostendere propositum fuit, quodque de sola Parabola demonstrauit Geometrarum Princeps in 4. Prop. de Conoid. ac Sphæroid. supposita tamen eiusdem Parabolę quadratura.

a 36. h.

b 37. h.

COROLL. I.

HInc est, quod applicatæ ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis, in reliquis sectionibus, proportionaliter diuidẽtibus semi-diametros ad angulum constitutas, omnino se mutuò secant; & quod rectæ lineę, tùm harum applicatarum puncta media, tùm extrema iungentes, rectæ semi-diametrorum terminos iungenti æquidistant. Demonstratum est enim HI, AC secare se mutuò in M, & iunctas HC, GF, AI ipsi EB esse parallelas.

COROLL. II.

PAtet quoq; in quarta, quinta, septima, & octaua figura, portiones eiusdem Ellipsis, vel circuli, quarum bases transeant per puncta earum semi-diametros proportionaliter secantia, etiam si ipsæ semi-diametri sint in directum positæ, hoc est applicatæ inter se æquidistent, esse quoque inter se æquales. Vtra enim talium portionum æqualis dẽmonstratur, (vt in superiori propositione) ei portioni, cuius basis sit applicata per punctum proportionaliter secans aliam semi-diametrum, quæ cum prædictis angulum constituat.

COROLL. III.

EX ijsdem constat, quod si quotcunque applicatæ in eadem Ellipsi, vel circulo integras diametros proportionaliter secent, abscissæ portiones vicissim æquales erunt, hoc est minor minori, & maior maiori.

Si enim in prædictis figuris sint duæ diametri BREL, ita sectæ in F, G; vt RF ad FB sit vt LG ad GE, erit componendo, & sumptis antecedentium subduplis DB ad BF, vt DE ad EG; applicatis ergo AFC, HGI erunt portiones ABC, HEI inter se æquales, & reliqua portio ARC reliquæ portioni HRI æqualis erit.

PRO-

PROBL. VI. PROP. XXXXI.

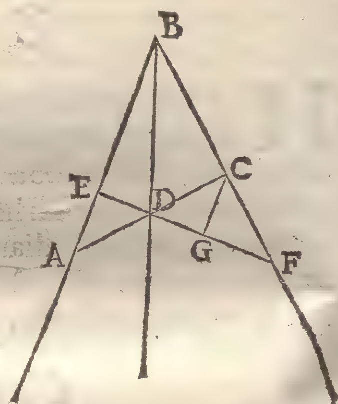
Per datum punctum in angulo rectilineo, rectam applicare, quæ de angulo abscindat triangulum MINIMVM.

ESto angulus rectilineus A B C, in quo datum sit punctum D. Oportet ex D rectam applicare, quæ ab angulo auferat triangulum *MINIMVM*.

Iungatur diameter B D, ad quàm applicetur per D recta A D C, quæ in dato puncto D [a] bifariam secetur. Dico hanc ipsam quæsitum soluere, hoc est triangulum A B C esse *MINIMVM*.

[a] ex 66. 1. huius.

Ducatur quælibet alia E D F, & ab extremo applicatæ A C, quod cadit supra E F, siue ex puncto C agatur C G ipsi E A æquidistans. Et cum sit A D æqualis D C, ob constructionem, erit quoque E D æqualis D G, & angulus A D E equatur angulo C D G, ergo triangulum A D E, triangulo C D G equale erit, ac ideò A D E minus triangulo C D F; si ergo addatur commune trapetium B E D C, erit triangulum A B C minus triangulo E B F, & hoc semper: quare triangulum A B C est *MINIMVM*. Quod reperiendum erat.



PROBL. VII. PROP. XXXXII.

Per datum punctum intra coni-sectionem, vel circulum rectam applicare, quæ de ipsa auferat portionem MINIMAM.

ESto A B C data Parabole, vt in prima figura, vel Hyperbole, vt in secunda, aut Ellipsis, vel circulus, vt in tertia, quarum centrum H, & punctum intra datum sit D. Oportet per D rectam applicare, quæ de sectione abscindat portionem *MINIMAM*.

Ducatur H B D sectionis diameter transiens per datum punctum D, per quod ei ordinatim applicetur recta A D C. Dico portionem A B C esse *MINIMAM* quæsitam.

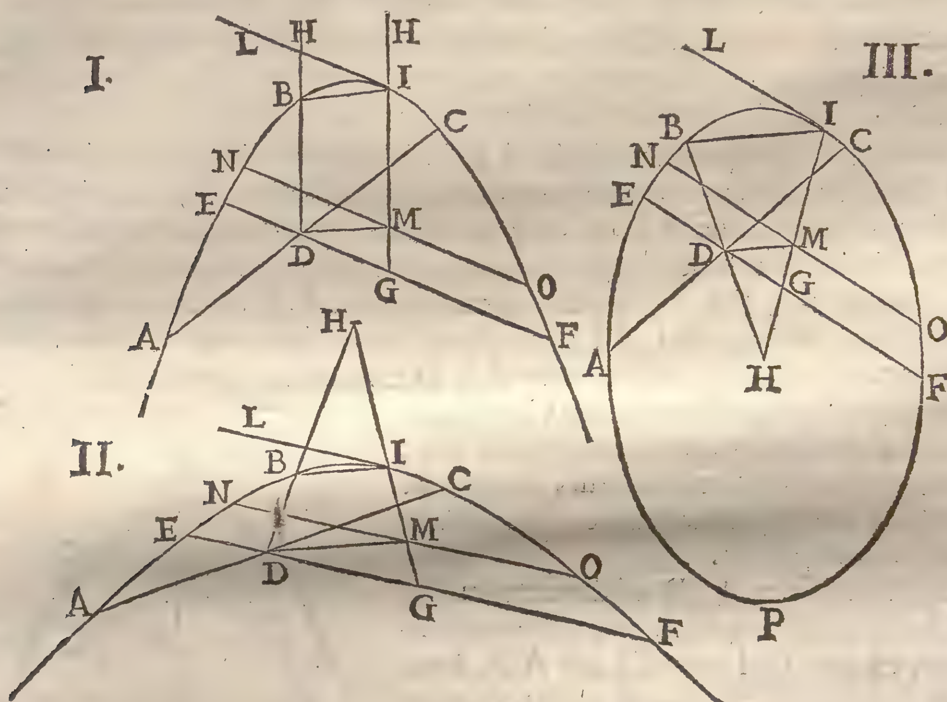
Nam applicata per D in sectione qualibet alia E D F, cum ipsa E F alteram applicatam A C in sectione bifariam secet in D, ipsæ se mutuò bifariam non secabunt, per *6.* secundi conicorum, quæ licet de sola Ellipsi, vel circulo agat, verificatur quoque de quacunque data coni-sectione. Secetur ergo E F bifariam in G, per quod ducatur eius diameter G I H sectioni occurrens in I, per quod agatur sectionem contingens I L, quæ ipsi E G F æquidistabit, [b] quare si iungatur I B, cum ipsa tota cadat [c] intra sectionem, & alteram parallelarum L I secet in I, producta ad partes B, conueniet cum reliqua producta F D E ad partes E, ac ideò D M, quæ ex D ducitur ipsi B I æquidistans cadet supra D F, secabitque diametrum I G, vt in M, cui

[b] 5. secundi conic.
[c] 10. primi conic.

per M

per M applicetur recta NMO, quæ applicatæ EGF æquidiſtabit.

Iam, in prima figura, cum ſit BD parallela ad IM, & BI ad DM, erit diametri ſegmentum BD æquale diametri ſegmento IM; ſuntque ex D, M applicatæ diametris rectæ ADC, NMO, vnde portiones ABC, NIO æquales [a] erunt. *a 40. h.*



In reliquis verò, cum in triangulo DHM ſit BI parallela ad DM, erit HB ad BD, vt HI ad IM, ſuntque ex D, M applicatæ diametris rectæ ADC, NMO, quare portiones ABC, NIO æquales [b] erunt. Cum ergo in ſingulis figuris portio ABC demonſtrata ſit æqualis portioni NIO, & ſit portio NIO minor portione EIF, pars toto, ergo portio ABC erit quoque minor portione EIF, & ſic quacunque alia portione, ab applicata per D abſciſſa, minor demonſtrabitur. Vnde portio ABC eſt *MINIMA* quæſita. Quod faciendum erat. *b ibidem.*

COROLL.

Hinc eſt, quod dum per datum punctum D intra Ellipſim, ducitur applicata ADC *MINIMAM* portionem abſcindes, habetur ſimul *MAXIMA* portio, quæ eſt reliqua APC, vt per ſe ſatis conſtat.

THEO-

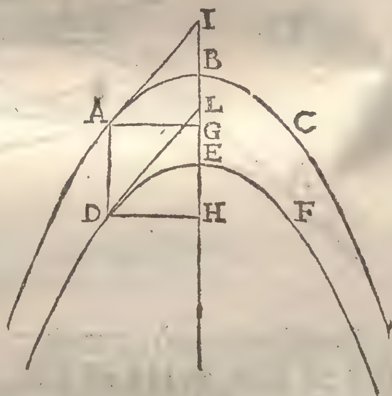
THEOR. XXIV. PROP. XXXXIII.

In congruentibus Parabolis per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta inter se sunt æqualia, & huiusmodi Parabolæ dicantur ęquidistantes. Contingentes verò vtranq; sectionem ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

SInt duæ congruentes Parabolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ circa communem diametrum BEH, & inter ipsas ducta sit quæcunque alia AD ipsi BE parallela, (quæ vtrique Parabolæ conueniet [a] in A, D eritque earum communis [b] diameter) atque ex terminis A, D, agantur AI, DL Parabolas contingentes in A, D, & communi diametro BE occurrentes [c] in I, L. Dico diametrorum intercepta segmenta BE, AD æqualia esse, & contingentes AI, DL inter se æquidistare.

a 26. primi conic.
b 46. ibid.
c 24. ibid.

Nam primum patet ex primo Coroll. 42. primi huius: cumq; omnes interceptæ BE, AD, &c. sint æquales vocentur, huiusmodi Parabolæ inter se ęquidistantes. Secundum verò, ita ostenditur.



Applicentur ex A, D ad diametrum BH rectæ AG, DH; erit AH parallelogrammum, ex quo GH æqualis erit AD, siue ipsi BE, quare dempta, vel addita, vti opus fuerit, communi GE, proueniet BG ęqualis HE, & dupla [d] IG duplæ LH æqualis erit; & est GA æqualis HD, & angulus IGA angulo LHD æqualis, ergo angulus quoque GIA angulo HLD æqualis erit. Quare contingentes AI, DL inter se æquidistant. Quod, &c.

d 35. ibid.

THEOR. XXV. PROP. XXXXIV.

In Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis, per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta ad proprias semi-diametros vnam eandemque habent rationem, & quæ sectiones contingunt ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

SInt duæ Hyperbolæ similes in prima figura, vel duæ similes Ellipses in secunda, quarum commune centrum sit G, & communis semi-diameter GBE, sitque ducta quæcumque alia GAD, (quæ tamen in Ellipsi cadat inter coniugatas semi-diametros GE, GN) eritque GAD, [e] item communis sectionum semi-diameter, ducāturque AL, DM ad terminos A, D sectiones

e 47. ibid.

ctiones contingentes, quæ productæ, communi diametro GBE a occurent in L, M. Dico primùm GA ad AD esse vt GB ad BE, & contingentes AL, DL inter se æquidistare.

a 24. 25. primi conic.

Applicentur ex A, D ad diametrum communem GBM rectę AI, DH. Erit iam in sectione DEF, rectangulum GHM ad quadratum HD, b vt transuersum ad rectum, vel, ob sectionum similitudinem, vt transuersum sectionis ABC ad eius rectum, vel vt rectangulum GIL ad quadratum IA, & quadratum DH ad HG, est vt quadratum AI ad IG, ergo ex æquo rectangulum GHM ad quadratum GH, erit vt rectangulum GIL ad quadratum IG, & conuertendo quadratum GH ad rectangulum GHM, vt quadratum IG ad rectangulum GIL, & per conuersionem rationis in prima figura, & componendo in secunda, quadratum GH ad rectangulum

b 37. ibid.

HGM, vt quadratum IG ad rectangulum IGL, & permutando quadratum HG ad GI, vel quadratum DG ad GA, erit vt rectangulum HGM ad rectangulum IGL, vel permutatis æqualibus, c vt quadratum EG ad quadratum GB, seu linea DG ad GA, vt linea EG ad GB, & diuidendo, & conuertendo GA ad AD, vt GB ad BE. Quod primò erat, &c.

c ibidem.

Præterea, cum superiùs demonstratum sit esse rectangulum GHM ad quadratum HD, vt rectangulum GIL ad quadratum IA, erit permutando rectangulum GHM ad GIL, vt quadratum HD ad IA; sed proportio quadrati HD ad IA componitur ex duabus rationibus HD ad IA, vel ex duabus rationibus HG ad GI, & proportio rectanguli GHM ad GIL componitur ex duabus rationibus, nempe ex GH ad GI, & ex HM ad IL; ergo proportio GH ad GI, hoc est HD ad IA, æqualis est proportioni HM ad IL, & permutando DH ad HM, erit vt AI ad IL, &

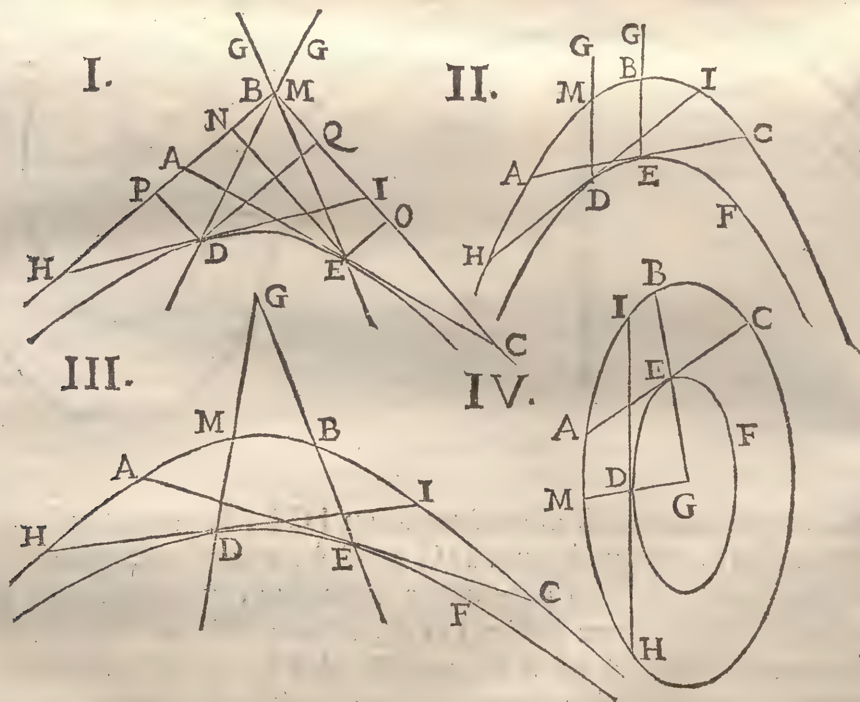
anguli ad H, I sunt æquales, ergo triangula DHM, AIL sunt æquiangula, hoc est angulus DMH æqualis erit angulo ALI, ac ideo DM, AL inter se æquidistant. Quod vltimò demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PRoportionalitas, quàm primo loco superioris theorematis inter semidiametros concentricorum quadrantum NGE, OGB similium Ellipsium inuenimus, eadem penitùs reperietur in alijs deinceps quadrantibus, & ad verticem, vt per se satis patet.

THEOR. XXVI. PROP. XLV.

In Hyperbola intra angulum asymptotalem; vel in Parabolis parallelis, siue in Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis circa eandem diametrum per diuersos vertices simul adscriptis, portiones omnes anguli, vel exterioris sectionis, quarum bases interiorem sectionem contingant, inter se sunt æquales.



SIt intra angulum asymptotalem ABC descripta Hyperbole DEF, vt in prima figura, vel duæ æquidistantes Parabolæ ABC, DEF, vt in secunda; vel similes concentricæ Hyperbolæ, vt in tertia, aut Ellipses, vt in quarta, quarum commune centrum sit G, ac omnes per diuersos vertices B, E sint simul adscriptæ circa eandem diametrum GBE, & ad verticem E interiorem sectionem contingat recta AEC, & ad quodcunque aliud punctum

ctum D contingat eandem recta HDI. Dico ipsas contingentes exteriori sectioni ad vtranque partem occurrere, ac de ea æquales portiones abscindere.

Nam ductis diametris GBE, GMD; cum in prima figura rectæ AEC, HDI Hyperbolen contingant in E, D, ipsæ productæ cum vtraque asymptoto conuenient in A, C, & in H, I, atque [a] bifariam secabuntur in E, D, à quibus si ducantur asymptotis æquidistantes EN, EO, & DP, DQ, erit rectangulum NEO ęquale [b] rectangulo PDQ, siue parallelogrammum NO ęquale sibi æquiangulo parallelogrammo PQ, & duplum duplo ęquale erit, hoc est triangulum ABC, triangulo HBI (cum AC, HI sint bifariam sectæ in E, D.) a 3. di co b 12. ibid.

In reliquis verò figuris cum AEC contingat in E interiorem sectionem DEF, ipsa æquidistabit [c] contingenti ex B exteriorem, ac ideo erit vna applicatarum ad diametrum GBE in exteriori sectione ABC, & bifariam secabitur in E. Eadem ratione contingens HDI erit vna applicatarum ad diametrum GMD in exteriori, & bifariam secabitur in D, eritque in secunda figura segmentum diametri BE æquale segmento MD, & in tertia habebit [d] GB ad BE eandem rationem, ac GM ad MD, in quarta denique GE ad EB eandem, ac GD ad DM: quare portiones ABC, HMI exterioris sectionis ABC, quarum bases contingunt interiorem DEF inter se sunt [e] æquales. Quod demonstrandum erat. c 43.44. h. d ibidem. e 40. h.

COROLL.

Hinc est, quod contingentes ad puncta interioris concentricæ sectionis, exteriori semper ad vtranque partem occurrunt, & à tactibus bifariam secantur.

THEOR. XXVII. PROP. XLVI.

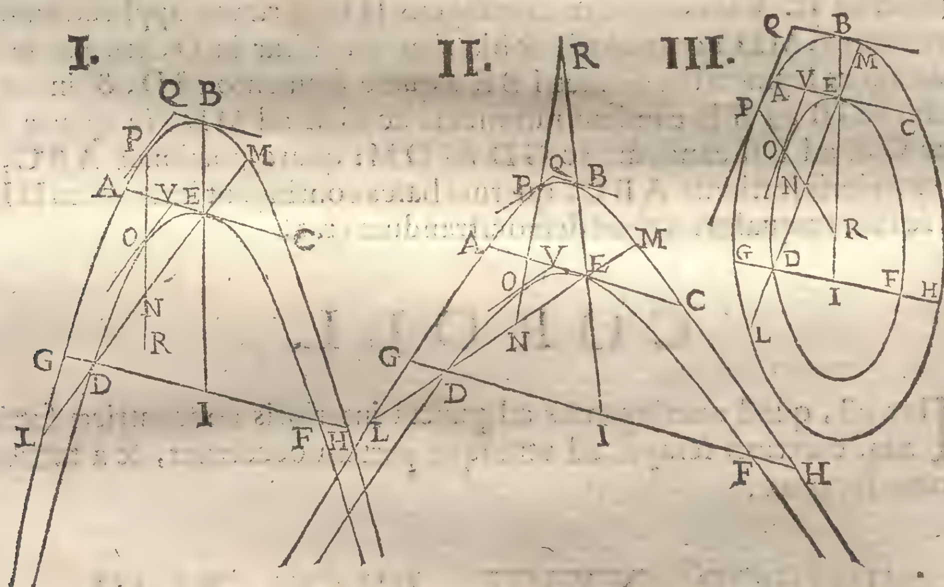
Si in Parabolis parallelis, vel in Hyperbolis, aut circulis, siue in Ellipsibus similibus, & concentricis ad punctum quodlibet interioris sectionis, quædam recta linea contingat, cui ducta sit quęcunq; alia æquidistans, vtranque sectionem secans, erit rectangulum sub segmentis huiusmodi applicatę inter vtranque sectionem interceptis, æquale quadrato semi-tangentis.

Sint duę Parabolę ęquidistãtes, vt in prima figura, vel similes, & concẽtricę Hyperbolę, vt in secũda, aut Ellipses, vel circuli, vt in tertia, ABC, DEF, quarũ centrum, respectiuè sit R, & ad quodcunq; punctum E interioris sit contingens recta AEC, (quæ ad vtranque partem exteriori [f] occurret in A, C, & à tactu E bifariam secabitur) eique sit æquidistanter ducta quælibet alia GDH, (quæ item ad vtranque partem exterioris occurret in f Coroll. 45. h.

G, H cum sit vna applicatarum, &c.) interiorem secans in D, F. Dico rectangulum sub segmentis G D, D H æquari quadrato semi-tangentis A E.

Nam iuncta D E, & bifariam secta in N, ducatur eius diameter N O P, quæ erit vtriusque sectionis diameter (cum ipsę ponantur parallelę, vel concentricæ) eas secans in O, P. Patet, si ex O, P concipiantur contingentes sectiones O V, P Q has inter se [a] æquidistare, sed O V ipsi D E ęquidistat, cum hæc sit vna applicatarum in sectione D E F ad diametrum R N O, quare, & P Q ipsi D E æquidistabit, hoc est D E erit vna applicatarum in sectione A B C ad diametrum R N P; ex quo N E producta ad vtranque partem exteriori sectioni A B C occurret, vt in L, M, & à diametro P N bifariam secabitur in N, sed D E quoque bifariam secta fuit in N, quare interceptæ L D, E M inter se sunt æquales, hoc est rectangulum L D M æquale est rectangulo L E M.

a 43. 44. huius.



Iam cum sit applicata A C bifariam secta in E, ducta eius diametro B E, hæc quoque bifariam secabit aliam applicatam G H, vt in I, eritque etiam diameter sectionis parallelæ, vel concentricæ D E F; & cum A C contingat sectionem D E F in E, sitque D F ei æquidistans, hæc item bifariam secabitur à diametro E I, vt in I. Cum sit ergo G I æqualis I H, & ablata D I æqualis ablatæ I F, erit reliqua G D reliquæ F H æqualis, siue rectangulum G D H æquale rectangulo G F H.

Tandem ex B ducatur contingens B Q alteri contingenti P Q conueniens in Q. Erit ergo rectangulum G D H ad L D M, [b] vt quadratum B Q ad P Q; eademque ratione rectangulum A E C ad L E M, vt quadratum B Q ad P Q: quapropter rectangulum G D H ad L D M, erit vt A E C ad L E M, & permutando G D H ad A E C, vel ad quadratum A C, (cum A E, E C sint æquales) vt rectangulum L D M ad L E M, sed L D M ipsi L E M æquale ostensum fuit, quare, & rectangulum G D H, vel G F H æquale erit quadrato semi-tangentis A E. Quod erat demonstrandum:

b 17. tertij conic.

quodque

quodque in parallelis Parabolis, ac similibus concentricis Hyperbolis in 42. & 47. primi huius, sed alijs aggressionibus ostensum fuit.

COROLL. I.

HInc est, quod in parallelis Parabolis, vel concentricis, ac similibus Hyperbolis, aut Ellipsibus, applicata in interiori sectione hinc inde producta exteriori necessariò occurrit, totaque ab illius diametro bifariam secatur, & quod huius applicatæ intercepta segmenta inter se sunt æqualia.

Demonstratum est enim applicatas DE, DF in interiori sectioni DEF exteriori ABC occurrere in L, M, & in G, H, & diametros ON, FI, quæ bifariam secant DE, DF in N, I, bifariam quoque diuidere totas LM, GH, atque interceptas portiones LD, EM inter se æquales esse, itemque GD, FH æquales.

COROLL. II.

COnstat etiam ex vltima parte huius Theorematis, quod, si in quacunq; coni-sectione, vel circulo duæ rectæ lineæ applicatæ fuerint inter se æquidistantes, ad vtranque partem sectioni occurrentes, quæ à tertia quadam applicata vtcunque secentur, rectangula sub segmentis æquidistantium eandem inter se habere rationem, quam rectangula sub segmentis tertiæ secantis homologè sumpta.

Ibi enim ostensum fuit tùm in Parabola, tùm in Hyperbola, aut Ellipsi, vel circulo ABC, in quibus duę æquidistanter applicatæ AC, GH secantur à tertia applicata LM in punctis E, D, rectangulum GDH ad AEC, esse vt rectangulum LDM ad LEM.

THEOR. XXVIII. PROP. XLVII.

In Hyperbola intra angulum asymptotalem descripta, vel in æquidistantibus Parabolis, aut similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus; rectarum in exteriori applicatarum, ac interiorem sectionem contingentium, MINIMA est ea, quæ ad verticem maioris axis ducitur. At in Ellipsibus, MAXIMA est quæ ad verticem minoris axis.

ESto, in prima figura, in angulo asymptotali ABC descripta Hyperbole DEF, cuius axis BEG, vel in secunda, sint duæ Parabolæ æquidistantes, vel duæ similes concentricæ Hyperbolæ ABC, DEF circa axim BE; aut in tertia, duæ similes concentricæ Ellipses ABC, DEF, sitque exterioris sectionis axis maior BPN, minor OPQ, & in interiori sit maior

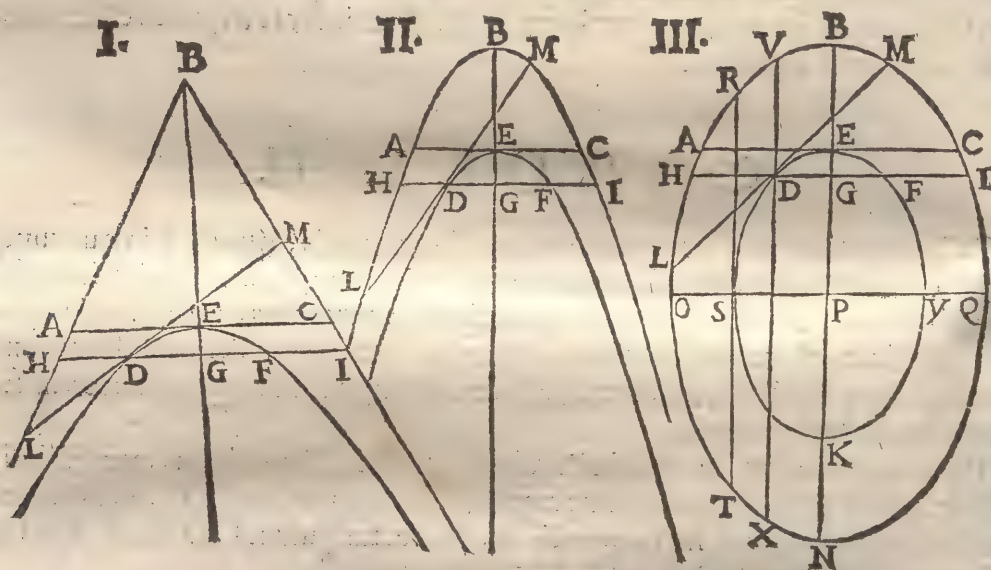
EPK,

EPK, minor SPY, & in quauis figura ad E verticem maioris axis interiorem sectionem contingat recta AEC, quæ ad vtranque partem exterioris pertinget, [a] ac bifariam secabitur in E. Dico ipsam AEC esse *MINIMAM* exteriori sectioni applicatarum, atque interiorem contingentium. Et in Ellipsibus contingentem RST ad verticem minoris axis esse *MAXIMAM*.

[a] Coroll. 45. huius.

Sit quæcunque alia contingens LDM ad punctum D, quæ item exteriori sectioui occurret in L, M, [b] & bifariam secabitur in D, & per D agatur HDI ipsi AEC æquidistans, exteriori occurrens in H, I. Et cum in sectione ABC per punctum D intra ipsam sumptum, sint duæ HDI, LDM, quarum prima maiori axi BG est perpendicularis, altera verò inclinata, erit rectangulum HDI minus rectangulo LDM, (cum ipsum HDI sit *MINIMUM* [c]) sed HDI æquatur [d] quadrato AE, ergo quadratum AE

[b] ibidem.
[c] 33.34.h.
[d] 46.h.



minus erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo minus, hoc est quadratum AC minus quadrato LM, siue contingens linea AC minor contingente AM, & hoc semper, vbicunque contingat obliqua AM: quare AEC erit *MINIMA* interiorem sectionem contingentium. Quod erat primò, &c.

Iam, ducta sit per D, recta VDX æquidistans contingenti RST. Et cum in Ellipsi ABC sit per punctum D recta VDX minori axi OQ perpendicularis, sitq; alia obliqua LDM; erit rectangulum VDX maius rectangulo LDM (cum VDX sit [e] *MAXIMUM*) sed VDX æquatur [f] quadrato RS, quare quadratum RS maius erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo maius, hoc est quadratum RT maius quadrato LM, hoc est linea RT maior linea RM, & hoc semper de qualibet contingente inter S, & E, quare ipsa RT erit *MAXIMA* interiorem Ellipsim contingentium. Quod erat vltimò demonstrandum.

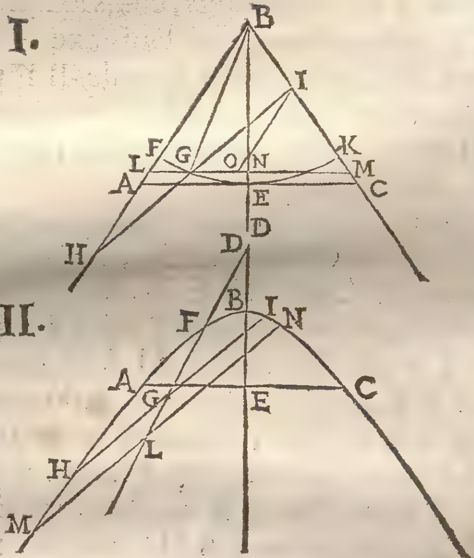
[e] 34. h.
[f] 46. h.

THEO-

THEOR. XXIX. PROP. XLVIII.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel Hyperbole, & quarum diametri sint æquales, est ea, cuius diameter sit axis dati anguli, vel Hyperbolæ.

Esto primùm, in prima figura, ABC angulus rectilineus, circa axim BD, cui applicata sit perpendiculariter quæcunque AEC, eum secans in E. Dico portionum, siue triangulorum ex dato angulo abscissorum, & quorum diametri sint æquales ipsi BE, *MAXIMVM* esse ABC.



Nam cum BE sit perpendicularis ad AC, facto centro B interuallo BD, ac circulo descripto, eius peripheria continget rectam AC in D, anguli latera secans in F, K; quare diametri æquales abscissorum triangulorum ad peripheriam FEK pertingēt: sumpto igitur in ipsa quocunque puncto G, iungatur BG, & ducatur per G recta LGM ipsi AC æquidistans, axim secans in N, & erit LN æqualis NM, vnde LG minor GM; secetur ergo GO ipsi LG equalis, & agatur OI parallela ad BA, iungaturque IG, & producatur, quæ cum OI secet in I, alteram quoque parallelam BA secabit in H, eritque IG æqualis GH, sed anguli ad verticem IGO, HGL sunt æquales, ergo, & triangulum IGO triangulo HGL æquale erit, & communi addito trapetio BLGI, erit quadrilaterum BLOI æquale triangulo HBI, sed triangulum ABC maius est quadrilatero BLOI, totum sua parte, quare triangulum ABC erit quoque maius triangulo HBI, cuius diameter BG æqualis est axi BE trianguli ABC, & hoc semper de quolibet alio triangulo circa diametrum ipsi BE equalem; quare triangulum ABC est *MAXIMVM*. Quod erat primò, &c.

Sit præterea, in secunda figura, Hyperbole ABC, cuius centrum D, axis DBE, ex quo dempta sit BE, eique per E applicata AEC, & sit quælibet alia diameter DFG, ex qua sumatur FG ipsi BE æqualis, appliceturque HGI. Dico portionem ABC portione HFI maiorem esse.

Nam cum sit semi-axis DB semi-diametrorum *a MINIMA*, hæc erit maior DF, estque BE æqualis FG, quare DB ad BE minorem habebit rationem quàm DF ad FG: fiat ergo DF ad FL, vt DB ad BE, & habebit DF ad FL minorem rationem quàm DF ad FG, ideoque FL maior erit FG, si ergo per L applicetur MLN, quæ ipsi HGI æquidistet, erit a 24. h.

portio

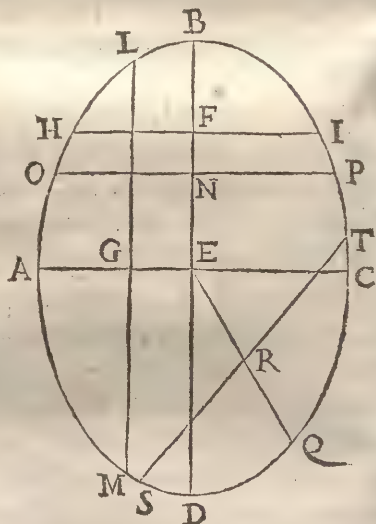
portio MFN maior portione HFI (totum ſua parte) ſed portio MFN æqualis [a] eſt portioni ABC (cum ſit DF ad FL, vt DB ad BE) quare portio ABC erit maior HFI, & hoc ſemper de qualibet alia portione, cuius diameter æqualis ſit axi BE: ergo portio ABC eſt *MAXIMA* portionum æqualium diametrorum. Quod erat vltimò demonſtrandum.

a 40. h.

THEOR. XXX. PROP. XLIX.

MAXIMA portionum ſemi-Ellipſi minorum, & æqualium diametrorum eſt ea, cuius diameter ſit minoris ſemi-axis ſegmentum. MINIMA verò, cuius diameter ſit ſegmentum maioris ſemi-axis.

ESto ABCD Ellipſis, cuius axis maior ſit BD, minor AC, centrum E, ſitque ex minori ſemi-axe AE demptum ſegmentum AG, & ex maiori BE ipſi AG ſit æquale BF perque puncta G, F applicatæ ſint axibus rectæ LGM, HFI. Dico portionem LAM eſſe *MAXIMAM*, & HBI *MINIMAM* aliarum portionum eiuſdem Ellipſis circa diametros ipſis AG, BF æquales.



Quod LAM ſit maior HBI patet ſic. Nam cum ſit EA minor EB, AG verò æqualis BF, habebit EA ad AG minorem rationem quàm EB ad BF: fiat ergo EB ad BN, vt EA ad AG, & habebit EB ad BN minorem rationem quàm EB ad BF, ſiue BN erit maior BF; quare applicata ONP cadet infra HI: & cum ſit vt EA ad AG, ita EB ad BN, erit portio LAM [b] ęqualis portioni OBP, ſed hæc maior eſt portione HBI, totum parte, ergo LAM maior eſt HBI.

b ibidem.

Præterea, ducta inter ſemi-axes quacunque ſemi-diametro EQ, ex ipſa, quę maior eſt EA (eo quod hæc ſit ſemi-diametrorum *MINIMA* [c]) & eò maior ipſa AG, dematur QR æqualis ipſi AG, vel BF, appliceturque SRT. Iam cum ſit EA minor EQ, & AG æqualis QR, habebit EA ad AG minorem rationem, quàm EQ ad QR, ac ideò vti ſuperiùs oſtendimus, portio LAM erit maior portione SQT. Eadem ratione, cum ſit EQ minor EB, (eò quod hæc ſit [d] ſemi-diametrorum *MAXIMA*) & QR ęqualis BF, habebit EQ ad QR minorem rationem quàm EB ad BF, quapropter portio SQT maior erit portione HBI, & hoc ſemper de qualibet portione, cuius diameter ſit inter ſemi-axes; quare portio LAM erit *MAXIMA*, & HBI *MINIMA* portionum æqualium diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

c 86. primi huius.

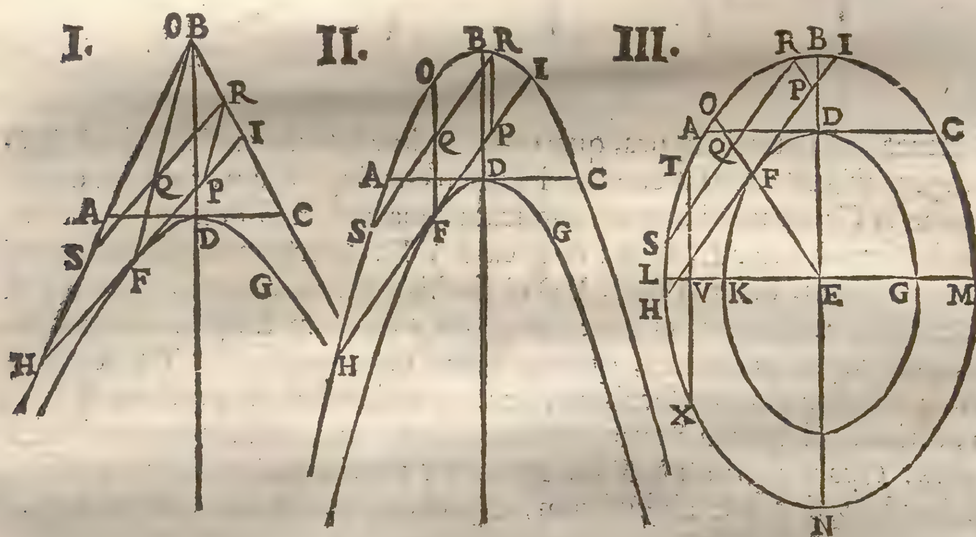
d ibidem.

THEO-

THEOR. XXXI. PROP. L.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel cuiuscunq; coni-sectionis, quarum bases sint æquales, est ea, cuius diameter sit segmentum axis, vel maioris semi-axis (respectiuè ad Ellipsim) datæ sectionis. MINIMA verò in Ellipsi est, cuius diameter sit segmentum minoris semi-axis.

ESto ABC angulus rectilineus, vt in prima figura; vel Parabole, aut Hyperbole, vt in secunda; vel Ellipsis, vt in tertia, quarum axes sint BD, & in Ellipsi axis maior sit BDN, minor LKM, centrum E, atque maiori axi in quauis figura applicata sit quęcunque ADC. Dico primùm portionem ABC, quæ tamen in tertia figura sit minor semi-Ellipsi LBM, esse *MAXIMAM* omnium portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, quarum bases æquales sint basi AC.



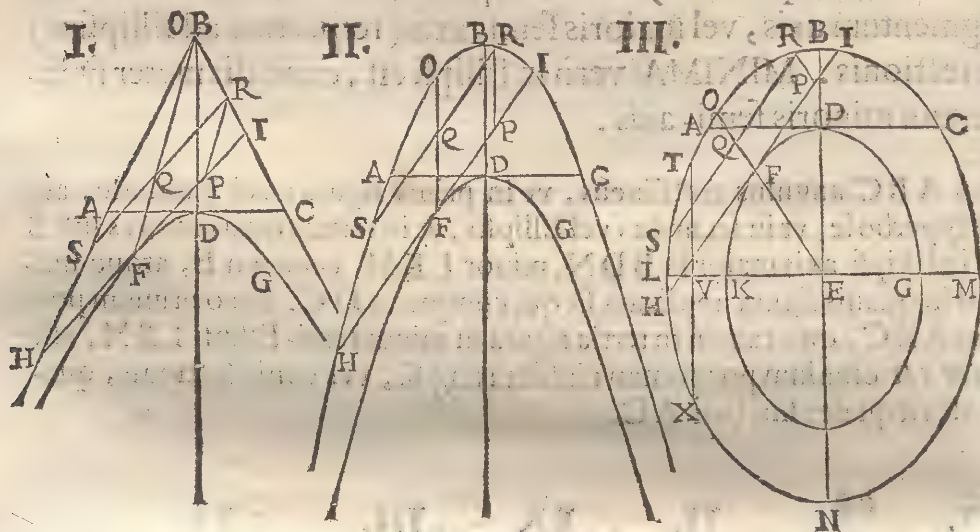
Nam, in prima figura, describatur per D in angulo asymptotali ABC Hyperbole FDG, in secunda verò, si ABC fuerit Parabole, describatur per D congruens Parabole FDG, vel si fuerit Hyperbole, describatur item per D, vti etiam in tertia, eiusdem nominis sectio FDG similis, & concentrica ipsi ABC, & tunc recta ADC continget omnino sectionem FDG in D; sumptoque in interiori sectione FDG quolibet puncto F, per ipsum ducatur sectionem contingens HFI exteriori occurrens in HI, deque ipsa abscindens portionem HOI, cuius diameter sit OF.

Iam, in singulis figuris, basis AC minor est basi HI, cum sit *a MINIMA* contingentium sectionem FDG, quare, & dimidium DC dimidio FI minus erit. Fiat ergo FP æqualis DC, & ex P agatur PR diametro FO æquidistans, cui ex R applicetur RQS; patet ipsam RQS ęquari basi AC, a 47. h.

 hoc est

hoc est portiones ABC, SOR esse æqualium basium, sed HOI maior est SOR, totum parte, ergo, & ABC, quæ ipsi HOI [a] est æqualis, erit maior eadem SOR, & hoc semper, &c. vnde portio ABC est *MAXIMA* portionum æqualium basium. Quod primò erat, &c.

a 45. h.



Preterea, cũ in tertia figura, quæ ex K ducitur interiorem Ellipsim FDG contingens sit [b] *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, ipsa erit omnino maior AC; quare eidem axi applicata, quæ ipsi AC sit æqualis, minorem axim secabit inter L, & K, & sit ea TVX. Si ergo concipiatur per V descripta Ellipsis, datis ABC, FDG similis, & concentrica, recta TVX hanc Ellipsim continget, eritque [c] *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, quapropter portiones, quarum bases sint æquales basi TVX, hanc mediam Ellipsim omnino secabunt, ac ideo maiores erunt portione TLX, cum portiones ab ijsdem contingentibus abscissæ sint [d] omnes portioni TLX æquales. Quare portio TLX est *MINIMA* portionum æqualium basium, ex eadem Ellipsi ABC abscissarum. Quod erat vltimò demonstrandum.

b 47. h.
c ibidem.
d 45. h.

COROLL.

EX his constat *MINIMAM* portionum semi-Ellipsi maiorum, quarum bases sint equales eam esse, cuius diameter sit segmentum maioris axis, *MAXIMAM* verò, cuius diameter sit segmentum minoris.

Nam in tertia figura, cum portionum ABC, SOR, TLX, &c. semi-Ellipsi minorum, & super æqualibus basibus, ipsa ABC sit *MAXIMA*, & TLX *MINIMA*, ac ipsæ sint portiones eiusdem terminatæ magnitudinis, siue Ellipsis eiusdem ABCN; patet reliquarum portionum semi-Ellipsi maiorum ANC, SNR, XMT, &c. quæ item sunt super æquales bases AC, SR, TX, portionem ANC esse *MAXIMAM*, & XMT *MINIMAM*.

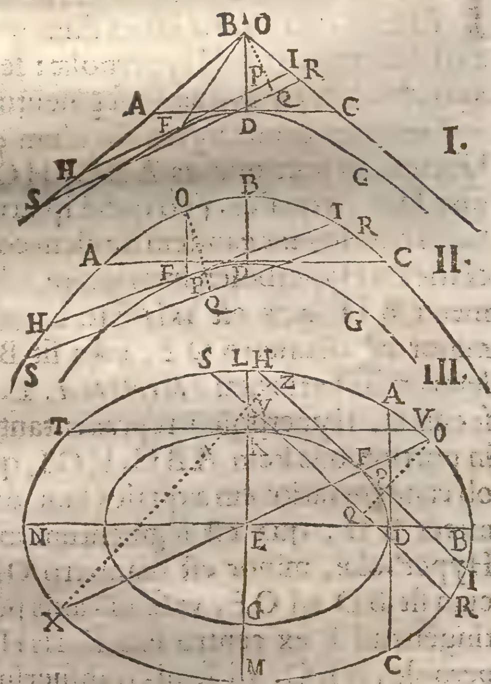
THEO-

THEOR. XXXII. PROP. LI.

MINIMA portionum eiuſdem anguli, vel cuiuslibet coni-ſectionis, quarum altitudines ſint ęquales, eſt ea, cuius diameter ſit ſegmẽtum maioris axis: in Ellipſi verò MAXIMA eſt, cuius diameter ſit ſegmentum minoris axis.

ESto A B C, in prima figura, angulus rectilineus, vel in ſecunda, Parabole, aut Hyperbole, ſiue in tertia Ellipſis, quarum axes ſint B D, at in Ellipſi axis maior ſit B D N, minor L K; centrum E, atque axi B D in quauis figura applicata ſit quælibet A D C. Dico portionem A B C, quæ in tertia figura ſit, vel maior, vel minor ſemi-Ellipſi, eſſe *MINIMAM* omnium portionum eiuſdem anguli, vel coni-ſectionis, quarum altitudines ſint æquales ipſi B D.

Deſcripta .n. per D, vel Hyperbola in prima figura, cuius aſymptoti ſint B A, B C; vel in reliquis figuris, deſcripta eiuſdem nominis coni-ſectione ſimili, & concentrica F D G, quę rectam A D C continget in D; ſumatur in interiori ſectione quodlibet aliud punctũ F, ad quod ſit contingens H F I exteriori occurrens in H, I, atque portionẽ abſcindens H O I, cuius diameter ſit O F, altitudo verò ſit O P.



Itaque cum portio H O I ęqualis [a] ſit portioni A B C eiuſdem ſectionis, erit reciprocè baſis H I ad baſim A C, vt altitudo B D ad altitudinem O P, ſed eſt H I maior A C, cum A C ſit omnium [b] contingentium *MINIMA*, ergo, & B D erit maior O P: producatur ergo O P, & ſumatur O Q ipſi B D æqualis, appliceturque S Q R contingenti H I æquidiſtans: eruntque portiones S O R, A B C æqualium altitudinum, ſed eſt portio H O I minor S O R, pars ſuo toto, ergo, & portio A B C, quæ ipſi H O I eſt æqualis, minor erit portione S O R, & hoc ſemper, &c. Vnde portio A B C eſt *MINIMA* portionum eiuſdem anguli, vel coni-ſectionis, & æqualium altitudinum. Quod primò erat, &c.

a 45. h.

b 47. h.

Amplius in tertia figura eſto recta V K T minori axi L M ordinatim applicata. Dico portionem V M T (quæ ſit vel maior, vel minor ſemi-Ellipſi) cuius diameter, vel altitudo eſt M K, eſſe *MAXIMAM* portionum omnium, quarum altitudines ipſi M K ſint æquales.

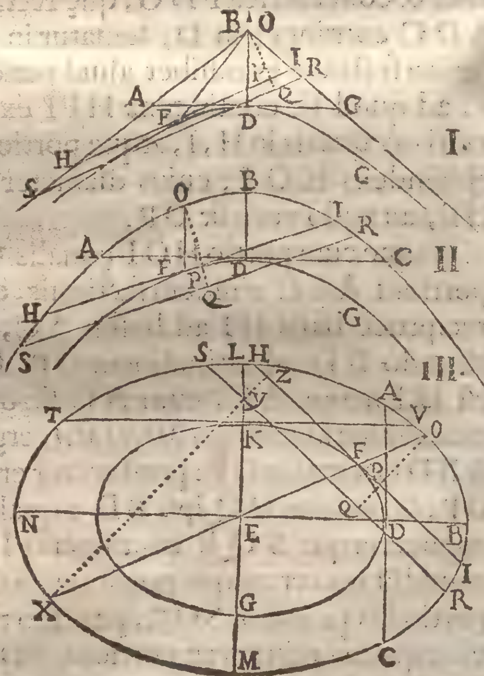
Deſcripta enim per K Ellipſi K D G ſimili, & concentrica datæ A B C N, quæ rectam V K T continget in K, ſumptoque in eius peripheria quocunque puncto F, ducatur contingens H F I exteriori ſectioni occurrens in H, I, deque ipſa abſcindens portionem I X H, cuius diameter ſit F X, altitudo verò ſit X Z.

a 45. h. Iam cum portio V M T æqualis sit [a] portioni I X H, erit basis V T ad basim
b 47. h. I H reciprocè vt altitudo X Z ad altitudinem M K, sed est V T maior I H, cum ipsa V T sit contingentium [b] *MAXIMA*, ergo, & X Z erit maior M K; facta igitur X Y æquali ipsi M K, applicataque S Y R, erunt portiones V M T, R X S æqualium altitudinum, sed est portio R X S minor portione I X H, pars suo toto, ergo ipsa R X S minor quoque erit portione V M T, & hoc semper, &c. Quare portio V M T est *MAXIMA* portionum eiusdem Ellipsis, & æqualium altitudinum. Quod erat vltimò demonstrandum.

SCHOLIVM.

PRoxima quatuor præcedentia Theoremata, super hoc ipso Diagrammate, facilè simul, tanquam Consectaria demonstrabuntur, si tamen hæ tres conclusiones notatu dignæ præmittantur, à quibus ipsa ortum ducant. Nimirũ.

1. INter diametros æqualium portionum eiusdem anguli, vel Hyperbolæ, aut Ellipsis, *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter simul sit segmentũ axis dati anguli, vel Hyperbolæ: sed in Ellipsi, quæ sit segmentum minoris axis, & *MAXIMA*, quæ sit segmentum maioris.



Etenim in prima figura angulum exhibente, in portionibus A B C, H O I, (c 45. h.) quæ sunt [c] æquales, (eò quod ipsarum bases contingant eandem similem concẽtricam Hyperbolen interiorem) diameter B D, quæ est axis dati anguli, minor est diametro O F, cum sit B D semi-transuersorum [d] *MINIMA*. (d 24. h.) Et in secunda, Hyperbolen repræsentante, in portionibus item A B C, H O I, quę ob eandem rationem æquales sunt, diameter B D, quæ est segmentum axis Hyperbolæ, minor est diametro O F, cum sit B D ad O F, vt semi-axis pertingens ad B ex centro exterioris Hyperbole, A B C, ad semi-transuersum pertingens ad O ex eodem centro, vt satis constat ex 44. huius, at semi-axis, minor est semi-transuerso, quare patet, &c. In tertia denique in portionibus T L V, H O I, A B C inter se pariter æqualibus, diameter L K portionis T L V, quæ est ex minori axe datæ Ellipsis, minor est diametro O F portionis H O I, atque minor diametro B D portionis A B C, & sic de singulis, quoniam E K ad K L est vt E F ad F O, & vt E D ad D B, estque antecedens E K minor
e ibidem. qualibet alia antecedentium, cum ea sit [e] semi-transuersorum *MINIMA*, & E D maior est ipsarum antecedentiũ, cum sit semi-trãsuersorum *MAXIMA*, quare & K L erit *MINIMA*, & D B *MAXIMA*, &c. idemque dicetur de æqualibus portionibus semi-Ellipsi maioribus. Verùm inter diametros æqualium portionum eiusdem Parabolæ non datur *MAXIMA*, cum omnes æquales sint.

2. Inter

2. INter bases æqualiũ portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, respectiuè ad Ellipsim: & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmentum minoris.

In qualibet enim figura, basis A C portionis A B C, circa maiorem axim, *MINIMA* [a] est basium, aliarum æqualium portionum; & in Ellipsi basis V T portionis V L T circa minorem, *MAXIMA* est basium, reliquarum æqualium portionum, vel ipsæ simul sint semi-Ellipsi minores, vel simul maiores, &c. a 47. h.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem angulo, vel coni-sectione *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MINIMA* eius, cuius diameter sit segmẽtum minoris.

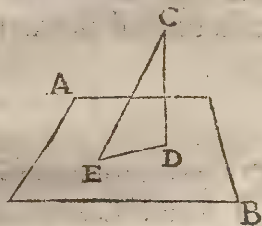
Id autem in superiori propositione ostensum fuit: nempe B D, quæ est altitudo portionis A B C, circa maiorem axim, maiorem esse O P altitudine ęqualis portionis H O I, atque ampliùs, in Ellipsi, altitudinem M K portionis T M V circa minorẽ axim, minorem esse altitudine X Z æqualis portionis HXI, &c.

E' prima itaque harum conclusionum, elicitur veritas prop. 48. & 49. h. ex altera verò prop. 50. è tertia denique prop. 51. quæ omnia per se satis patent.

Sed hæc de planis, pro hac vice, dixisse sufficiat. Nonnulla sequuntur quæ iam diù pariter circa solida à coni-sectionibus genita excogitauimus. Noua omnia, ni fallor, omnia saltem geometrica: quæ si apertæ iucunditatis referta comperies amice Lector, reconditæ vtilitatis haud expertia esse aliquando te certiorem factum non dubito.

THEOR. XXXIII. PROP. LII.

Recta linea, quę à puncto extra planũ dato sit ipsi plano perpẽdicularis, MINIMA est rectarũ ab eodem pũcto ad idem planũ ducibiliũ.



SIt extra planum A B, punctum C, à quo ducta sit ipsi plano perpendicularis C D. Dico hanc esse *MINIMAM* ducibilium ex C ad alia puncta plani A B.

Sumatur vbicunque in dato plano aliud punctum E, junganturque D E, C E. Et cum C D recta sit ad planum A B, erit [b] angulus C D E rectus, ideoque C E D acutus, siue minor C D E: quare C D minor erit C E, & hoc semper. Vnde C D est *MINIMA*, &c. Quod &c. b 3. def. vnd. Ele.

THEOR. XXXIV. PROP. LIII.

Si in Cono, vel Cylindro recto planum ductum per vnum laterum trianguli, vel rectanguli per axem eidem triangulo, vel rectangulo rectum fuerit, idem planum in ipso tantùm latere conicam, vel cylindricam superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem plani contingentis.

ESto in figura, (quę & Conum, & Cylindrum rectum exhibeat) planum per axẽ A B C, cui rectũ sit aliud planũ G D K H transiens per latus A B, cum plano

plano basis Coni, vel Cylindri A C efficiens communem sectionem G A D. Dico ipsum planum G D K H, licet in infinitum extendatur, in vnico tantùm latere B A superficiem Conicam, vel Cylindricam contingere, ac propterea hanc totam cadere infra planum contingens.

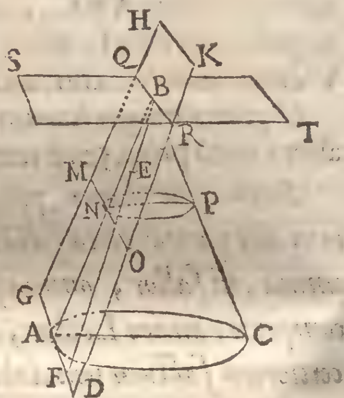
Quoniam cum axis Coni, vel Cylindri recti sit perpendicularis plano basis, erit planum per axem B A C rectum basi A C, siue planum basis A C rectum plano per axem A B C, cui rectum quoque positum fuit planum per B A, A D ductum, quare G A D communis planorum sectio eidem plano per axem erit perpendicularis, [a] vnde angulus D A C rectus erit, sed est C A diameter circuli A C, quare G A D circuli peripheriam continget, ac tota cadet extra conicam, vel cylindricam superficiem.

a 19. vnd. Elem.

Iam per B axis verticem concipiatur ductum planum S T basi A C æquidistans, quod communem sectionem faciet cum plano G K rectam Q B R ipsi G A D [b] parallelam, abscindetque de plano G K vtrinque in infinitum extenso, partem Q R K H, quæ tota cadet supra planum S T ad oppositas partes conicæ, vel cylindricæ superficiei B A C (cum hæc tota cadat inter æquidistantia plana S T, A C, vt satis constat,) & partem Q R D G, quæ tota erit ad partes eiusdem superficiei. Sumatur ergo in plano Q R D G extra lineam B A, inter æquidistãtes Q R, G D quodlibet punctum E, & iuncta B E producatur: patet ipsam cum A D conuenire: (cum recta B E sit in eodem plano in quo sunt B A, & A D, & alteram parallelarum secet in B) conueniat in F, & cum punctum F sit extra solidi superficiem, ipsa quoque B F cadet tota extra [c] eandem, quare punctum E erit extra ipsam superficiem, & sic de quolibet alio puncto plani G R, quod sit extra latus B A, quapropter planum G R superficiem dati solidi contingit per rectam B A, ac ideo ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod erat, &c.

b 16. ibid.

c Coroll. primę primi Conic.



ALITER.

SI per quodcunque aliud punctum N lateris B A concipiatur duci planum secans Conum, vel Cylindrum, quod sit basi A C parallelum, ipsum in solidi superficie circuli peripheriam [d] describet, & in plano per axem rectam, seu diametrum N P, quæ ipsi A C [e] æquidistabit, in plano verò Q D rectam M N O, quæ item rectæ G A D erit parallela (cum sint communes sectiones æquidistantium planorum cum altero plano) eritque angulus O N P [f] æqualis angulo D A C, siue rectus, (cum superiùs demonstratum sit ipsum D A C rectum esse) hoc est recta M N O peripheriam N P continget in N, & ex vtraque parte cadet extra solidi superficiem, & hoc semper de qualibet alia ducta in plano B D ipsi G D æquidistante: quare totum planum G R, quod per latus B A ductum fuit rectum ad planum A B C per axem ductum, solidi superficiem contingit tantùm per latus B A: vnde ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod, &c.

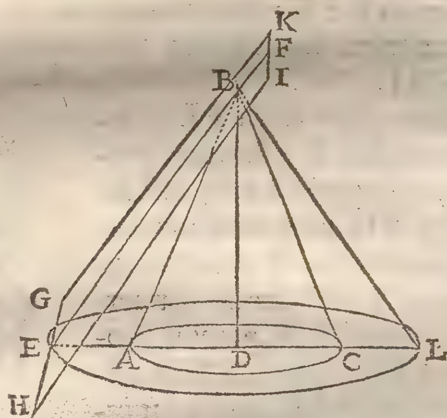
d 4. primi Conic.
e 16. vnd. Elem.
f 10. ibid.

THEO-

THEOR. XXXV. PROP. LIV.

Si Conus rectus plano per axem secetur, per in quo verticem ducta sit quędam linea, quę non in directum sit posita cum aliquo laterum trianguli per axem perque ipsam agatur planum, quod rectum sit ad idem planum, per axem ductum: Huiusmodi planum in ipso tantùm vertice coni superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem ducti plani.

Sit conus rectus ABC plano per axem BD sectus efficiente triangulum ABC, in cuius plano, & per verticem B sit quælibet linea EBF, non tamen cum aliquo laterum BA, BC sit in directũ posita, per quam transeat planum GHIK, quod ad planum per axem ABC sit rectum. Dico tale planum GI in nullo alio puncto, quàm in vertice B conicam superficiem contingere, &c.



Quoniam si recta EBF ęquidistat ipsi AC basi trianguli per axem, anguli interiores EBD, ADB duobus rectis æquales erunt, sed ADB rectus est, cum sit axis BD plano basis AC perpendicularis, quare, & angulus EBD rectus erit, sed planum ABC ponitur rectum ad planum GI, & in eo ad communem horum sectionem EBF ducta est perpendicularis DB, ergo ipsa DB erit [a] recta ad planum GI, estque eadem BD recta ad planum basis AC, quare duo plana GI, AC inter se [b] æquidistant, atque est punctum B in vno plano GI, & circuli peripheria AC in altero AC, ergo recta BA, quæ manente puncto B circa peripheriam CA circumducitur conicam superficiem describens, hoc est ipsa conica superficies tota cadet inter plana ęquidistantia (vbicunque enim ducatur planum per axem, habentur communes æquidistantium planorum sectiones inter se parallelę, inter quas cadit communis sectio secantis plani cum superficie) ac ideò planum GI in ipso tantùm vertice B, coni superficiem continget.

[a] 4. defin. vndec. Elem.

[b] 14. vnd. Elem.

Si verò recta FBE conueniet cum CA, vt in E; patet, dum triangulum BED circa axim BD conuerti concipitur, rectam BE coni BEL superficiem describere, cuius triangulum per axem est BEL idem cum plano ABC, cui rectum est planum GI ductum per latus BE, quare idem planum GI continget conicam BEL in ipso tantùm [c] latere BE, sed latus BE contingit conicam BC in vnico tantùm vertice B, ergo planum GI conicam ABC in ipso tantùm vertice B contingit, ac propterea ipsa coni superficies cadit tota infra planum GI. Quod erat demonstrandum.

[c] 53. h.

THEO-

THEOR. XXXIV. PROP. LV.

Si rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, aut Sphæra, aut Sphæroides rectum plano per axem secetur, & communem sectionem plani secantis cum solidi superficie quædam recta linea in puncto contingat, per quam ductum sit aliud planum, quod rectum sit ei per axem ducto: huiusmodi planum in prædicto tantùm puncto solidi superficiem continget, ipsaque superficies cadet tota ad alteram partem plani contingentis.

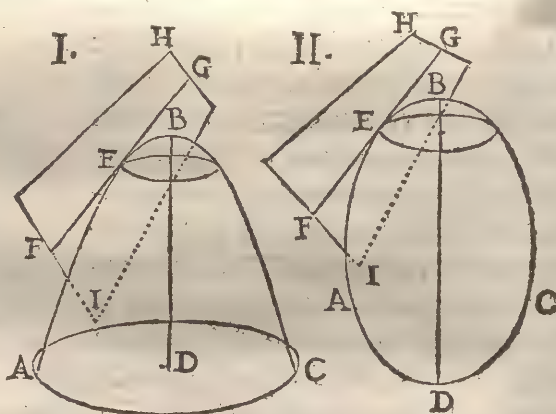
ESto rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, vt in prima figura; vel Sphæra, aut Sphæroides rectum, vt in secunda, plano per axem BD sectum efficiente in solidi superficie sectionem ABC, (quæ erit genitrix [a] dati solidi) & per punctum E in ipsa sumptum, sit ei contingens linea FEG, per quam concipiatur duci planum HI, quod sit rectum plano per axem ABC: dico huiusmodi planum HI in ipso tantùm puncto E conuexam solidi superficiem contingere, atque hanc totam cadere infra planum HI.

[a] ex comment. Cômand. in lib. Arch. de Conoi. & Sphær.

Cum enim recta FEG sectionem ABC cõtingat, producta conueniet [b] cum axe sectionis BD ad partes verticis B; quapropter si concipiatur planum ABC denuò conuerti circa axim BD, patet sectionem ABC, dati solidi, & cõtingentem FEG, coni superficiem describere, quæ conuexam solidi superficiem per circuli tantùm peripheriam à pũcto E descriptam continget (cum punctum E sit tum in contingente, tum in ipsa sectione, & in reuolutione peripheriam circuli designet, ac reliqua puncta rectæ FG sint extra sectionem ABC.) Et quoniam planum HI per contingentem FG ductum, positum fuit rectum ad planum per axem ABC, quod est idem, ac planum per axem coni à latere FG descripti, ergo planum HI secundùm latus tantùm FG conicam superficiem continget, [c] sed latus FG conuexam solidi superficiem contingit tantùm in puncto E, quare planum HI in vnico puncto E solidi superficiem contingit, ac ideò hæc cadit tota infra planum HI. Quod probandum erat.

[b] 24. 25. pr. conic.

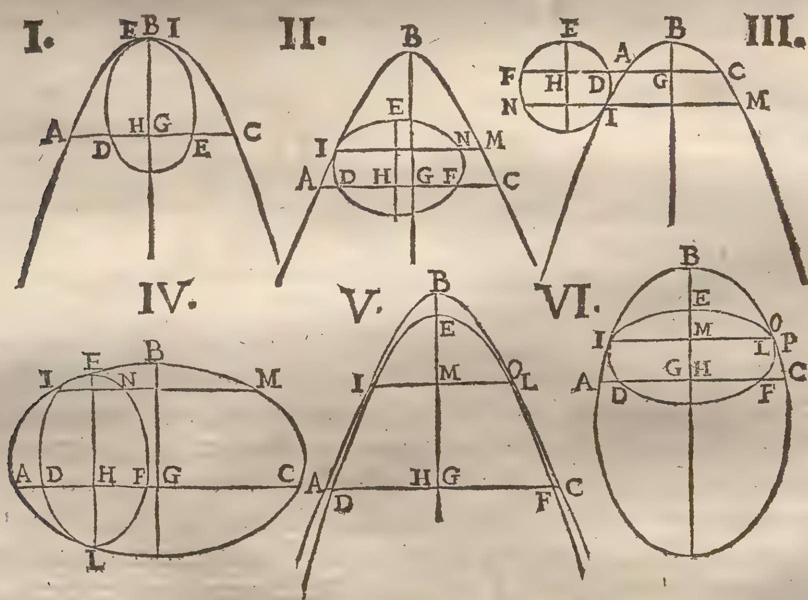
[c] 53. h.



THEOR. XXXVII. PROP. LVI.

Si coni-ſectio, vel circulus coni-ſectionem, vel circulum intus, vel extra, in vno, aut in duobus punctis contingat, & harum ſectionum axes, vel ſibi mutuò congruant, vel æquidiſtent, vtraque autem figura, altera immota, circa proprium axem conuertatur. Solidum factum ab vna ſectionum nunquam ſecabit ſolidum ab altera genitum, ſed omnino ſe mutuò contingent, vel in vnico puncto, ſi figurarum planarum contactus fuerit tantùm in puncto, ſiue axes congruant, ſiue æquidiſtent; vel in duobus tantùm, ſi ad duo puncta ſe mutuò contingant, dum axes ſint paralleli; vel denique ad integram circuli peripheriam à contactibus genitam, ſi ad duo puncta ſectiones ſimul occurrant, dum axes ſimul congruant.

SInt duæ coni-ſectiones ABC, DEF, quarum axes ſint BG, EH, & vel ſimul congruant, vt in prima, quinta, & ſexta figura, vel inter ſe æquidiſtent, vt in ſecunda, tertia, & quarta, atque ſe mutuò contingant, vel

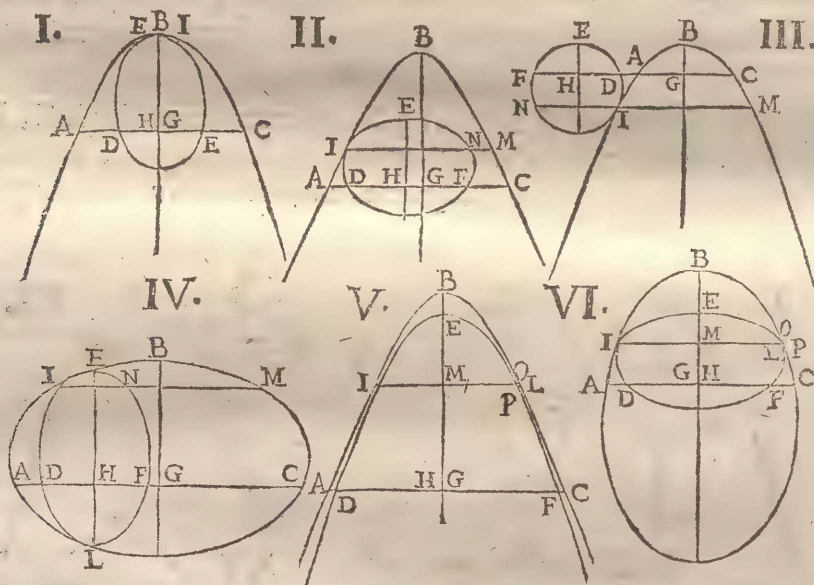


in vnico puncto I, vt in prima, ſecunda, & tertia, vel in duobus tantùm I L, vt in quarta, quinta, & ſexta; & concipiatur modò figurã ABC, manente alia DEF, circa axim BG conuerti; modò figurã DEF, manente altera, ita vt ab ipſis ſolida conoidalia, ſphærica, aut ſphæroidalia deſcribantur. Dico talia ſolida nunquam ſimul ſecari, ſed vel in vnico puncto I, in quo plana ſe contingunt, ſe quoque mutuò contingere in prima, ſecunda, & tertia, vel in duobus tantùm I, L, in quarta vbi axes BG, EH inter

K ſe æqui-

ſe æquidiſtant: vel tandem ad integram circuli peripheriam à contactibus I, L in figurarum reuolutione deſcriptam in quinta, & ſexta vbi axes ſimul congruunt.

Cùm enim harum ſectionum axes, vel congruant ſimul, vel æquidiſtent, quæ ad vnum ipſorum plana ducentur erecta, alteri quoque erecta erunt, deſcribentque circulos in proprijs ſolidis, quorum centra in ipſis axibus cadent: vnde cum axes ſimul congruent, vt in prima, quinta, & ſexta, huiuſmodi circuli erunt concentrici; at ſi æquidiſtent, vt in reliquis, circuli erunt eccentrici, & communes ſectiones horum planorum cum ipſis ſectionibus ABC, DEF erunt eorundem circulorum diametri: quare ducto quocunque plano ADFC ad axes erecto, non per contactus I, vel L tranſeunte, efficiente verò in ſectione ABC diametrum AC, in ſectione autem DEF diametrum DF: patet in prima, ſecunda, quarta, quinta, & ſexta figura, in quibus ſectio DEF inſcripta eſt ſectioni ABC diametrum DF totam



cadere intra diametrum AC, ac ideo circulum ex DF in ſolido DEF disiunctum eſſe à circulo ex AC in ſolido ABC, vel per armillam ADC, vt in prima, ſecunda, & ſexta, ob circulorum concentricitatem, vel per armillam excentricam ADC, in ſecunda, & quarta ob ipſorum circulorum excentricitatem. Rurſus in tertia figura in qua ſectio DEF tota cadit extra ABC, prædicta diameter DF tota cadet extra diametrum AC, ideoque circulus ex DF in ſolido DEF totus cadet extra circulum ex AC in ſolido ABC, & hoc ſemper: quare in ſingulis figuris vbicunque ductum ſit planum ADFC, præter ad contactus, huiuſmodi ſolida erunt in totum diſiuncta, ex quo nullibi ſe mutuò ſecabunt.

Præterea cum in prima figura ſectionum contactus ſit in ipſo axium vertice, patet, & ſolida circa communem axim ab ipſis ſectionibus genita in eodem puncto ſe mutuò contingere. In ſecunda verò tertia, & quarta ducto plano ad axes erecto per punctum contactus I, in ſolido ABC efficiente circulum, cuius diameter ſit IM, at in ſolido DEF circulum, cuius diame-

ter ſit

ter sit I N; patet tales circulos in ipso puncto I se mutuò contingere, ideoque, & solida in eodem contactus puncto I se tantùm contingere, & ob eandem rationé in quarta figura in altero contactus puncto L se contingent, &c. At in quinta, & sexta, in quibus sectiones sunt circa communem axim B G, & in duobus punctis I, L se contingunt, si ex contactu I ducatur communis applicata I M, & producatur, ipsa ad alterum contactus punctum L omnino pertinget; quoniam producta I M vtranque sectionem secans in O, P, est semi-applicata I M, in sectione A B C, æqualis semi-applicatæ I M, in sectione D E F, sed est M O in sectione A B C æqualis I M, & M P in sectione D E F æqualis eidem I M, ergo M O, M P sunt æquales, hoc est puncta O, P vnum, ac idem sunt; quare sectiones in puncto P simul conueniunt, sed conueniunt quoque in I, & in duobus tantùm punctis I, & L positum fuit eas simul occurrere, ergo punctum P idem est, ac punctum contactus L: quare I M L est communis sectionum applicata, per quam si ducatur planum ad axem erectum, efficiet in vtroque solido circulum, cuius diameter [a] erit eadem I L; itaque per huius circuli peripheriam à puncto I ex sectionum reuolutione descriptam, huiusmodi solida se cōtingent. Quod erat vltimò demonstrandum.

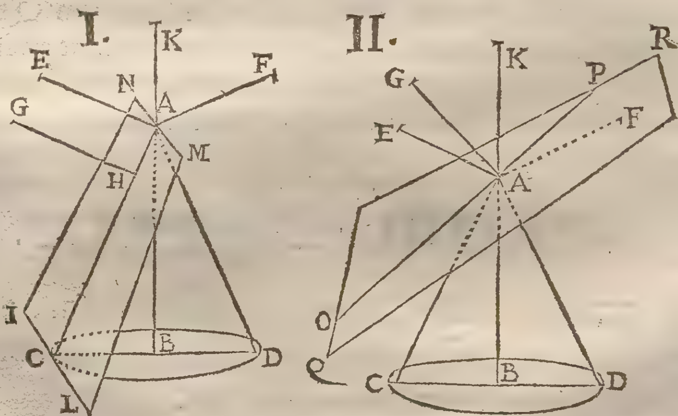
[a] ex Command. cōment. in lib. Arch. de Conoid.

PROBL. VIII. PROP. LVII.

A puncto extra conum rectum dato ad eius conuexam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

Esto conus rectus, cuius axis A B. Oportet per punctum G datum extra conum ad eius conuexam superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur conus, in vtraque figura, plano per axem A B, ac per datum punctum G transeunte, quod efficiat in superficie triangulum C A D: producatur axis B A in K; & cum anguli C A B, D A B sint æquales, & acuti, qui ipsis deinceps sunt C A K, D A K erunt æquales, & obtusi. Fiant igitur ex vertice A anguli C A E, D A F recti, & primò sit datum punctum G in prima figura in altero rectorum angulorum, vt puta in ipso C A E, demittaturque ex G recta G H perpendicularis lateri A C (quæ, vt patet *MINIMA* est ad anguli latera, &c.) Dico ipsam G H esse *MINIMAM* quæsitam.

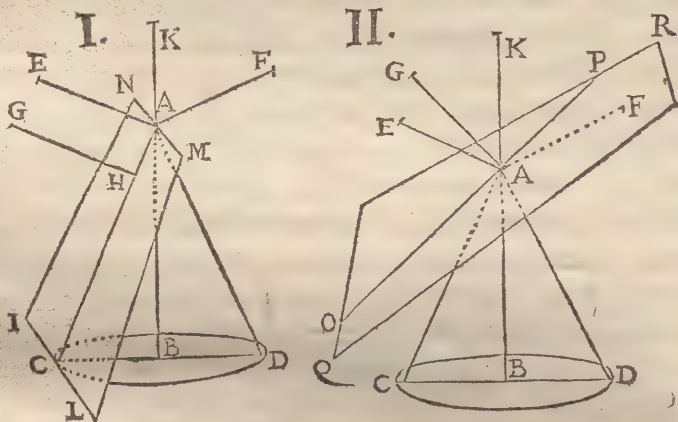


Concipiatur enim per rectam A C duci planum N I L M, quod rectum sit ad planum per axem D A C, in quo est recta G H.

Iam cum planum NL rectum sit ad planum DAC, cumque in plano NL sit GH communi planorum sectioni AC perpendicularis, erit ipsa GH ad idem planum NL recta [a] hoc est *MINIMA* [b] ducibilium à puncto G ad quodcunque aliud punctum eiusdem plani NL, sed conuexa coni superficies tota est infra planum NL, ipsum tantùm contingens [c] per rectam AC, quare eadem GH eò ampliùs *MINIMA* erit ad conuexam dati coni recti CAB superficiem.

a 4. def. 11. Elem.
b 52. h.
c 53. h.

Si autem datum punctum fuerit in ipsa perpendiculari EA, vt in E, eodem modo demonstrabitur EA rectam esse ad planū NL, ideoque ad ipsum *MINIMAM*, & eò magis ad coni superficiem.



Si denique datum punctum G fuerit intra angulum EAF, vt in secunda figura. Iungatur GA, & hæc erit *MINIMA* quæsita.

Nam cū angulus CAG sit maior recto, in plano per axem DAC, in quo est AG, fiat rectus angulus OAG, & linea OA producatur ad P: patet AP cadere inter AG, & AD cum angulus GAP sit rectus, & duo simul GAF, FAD recto sint maiores: (est .n. vnicus DAF rectus, ex constructione) itaque si per rectam OP concipiatur planum QR, quod rectum sit ad planum DAC, in quo est AG, ob rationem superiùs allatam, ipsa GA recta erit ad planum QR, hoc est *MINIMA*, [d] sed planum QR in ipso tantùm vertice A coni superficiem contingit, [e] quæ tota cadit ad inferiorem partem plani QR, quare eadem GA erit *MINIMA* ducibilium ex G ad conuexam coni superficiem. Ducta est ergo à puncto G extra conum rectum dato, &c. Quod faciendum erat.

d 52. h.
e 54. h.

PROBL. IX. PROP. LVIII.

A puncto extra Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vel Sphæram, aut Sphæroides dato, ad eius conuexam superficiem MINIMAM rectam lineam ducere.

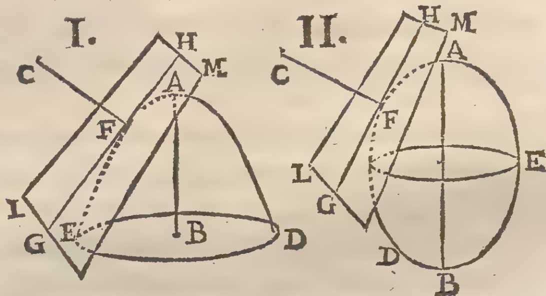
Esto Conoides Parabolicū, aut Hyperbolicū, in 1. figura, vel Sphera, aut Spheroides in secunda, cuius axis AB, & oporteat per pūctum C extra datum ad conuexam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur datum solidum plano per axem AB, ac per datum punctum C, efficiente in superficie genitricem solidi sectionem DAE, ad cuius peripheriam ex puncto C ducatur [f] *MINIMA* linea CF. Dico hanc quoque esse *MINIMAM* ad conuexam dati solidi superficiem.

f 20. 22. 23. h.

Ducatur

Ducatur enim in plano secante D A E, per punctum F sectionem contingens G F H, quæ, (vti elicitur ex propositionibus 20. 22. ac 23. huius) cum *MINIMA* C F rectos angulos efficiet. Concipiatur denique per contingentem G H, ductum planũ L M, quod ad planum D A E, in quo iam ponitur esse C F, rectum sit. Cum ergo plana L M, D A E, se mutuò secent per rectam G H, cui in plano D A E ducta est perpendicularis C F, erit ipsa C F, a recta quoque ad planum L M, siue ad idem planum ex puncto C erit b *MINIMA*; sed planum L M conuexam solidi superficiem contingit in puncto tantùm F, quę cadit c tota infra idem planum, ergo recta C F eò magis est *MINIMA* ad conuexam solidi superficiem D A E. Quod erat, &c.



a 4. def. 11. Elem.
b 52. h.
c 55. h.

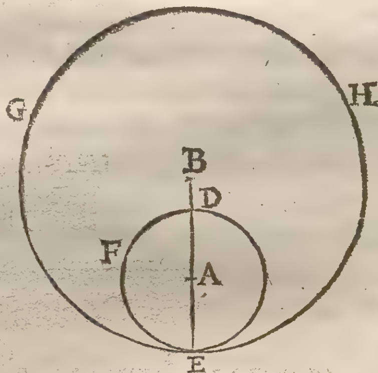
PROBL. X. PROP. LIX.

A puncto non intra sphæram dato, ad eius superficiem, MAXIMAM rectam lineam ducere.

SIt data sphæra, cuius centrum A, & oporteat per punctum B non intra sphæram datum, ad eius superficiẽ, *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Iungatur B A, & producatur, donec sphæricæ superficiei occurrat in D, & E. Dico B E, in qua est centrum, esse *MAXIMAM*.

Concipiatur per B E ductum planum, quod in spæræ superficie maximum circulum designabit D F E, ad cuius peripheriam est recta B E *MAXIMA*.



Iam in plano circuli D F E, cum radio B E descripto circulo G E H, & circa immotum axim B E reuoluto, ab ipso describetur sphæra G E H, quæ datam sphæram D F E circa eundem axim descriptam comprehendet, ac se simul contingẽt in ipso d circulorum contactu E, sed quæ à centro B ad sphæricam superficiem G E H ducuntur omnes sunt æquales rectæ B E, ergo quæ ab eodem puncto B ad interioris sphæræ D F E superficiem ducentur ipsa B E minores erunt. Vnde B E est *MAXIMA* quæsita, &c. Quod erat, &c.

d 56. h.

PRO-

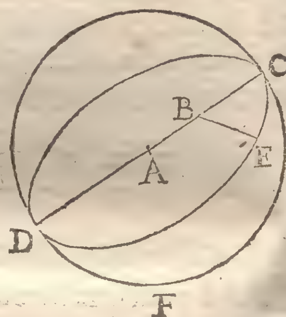
PROBL. XI. PROP. LX.

A puncto intra sphæram dato, ad eius concauam superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto sphæra, cuius centrum A, & oporteat per datum intra ipsam punctum B ad concauam sphæræ superficiem *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Si punctum B fuerit in centro sphæræ, patet tunc neque *MAXIMAM*, neque *MINIMAM* dari, cum omnes eductæ à centro ad sphærę superficiem sint æquales.

Si autem datum punctum fuerit præter centrum: iungatur cum centro A recta B A, quæ hinc inde producta occurrat sphęricæ superficiei in punctis C, D. Dico B D, in quà est centrum, esse *MAXIMAM*, reliquam B C *MINIMAM*.



Si enim circà axim C D intelligatur quicunque *MAXIMVS* sphæræ circulus C D F: patet linearum ex B ad peripheriam C D F ducibilium, B D in qua centrum A, esse *MAXIMAM*, & B C *MINIMAM*.

Si verò ducta sit quælibet alia B E extra peripheriam C D F, sphæricæ superficiei occurrens in E; per rectas C D, & B E intelligatur planum, cuius communis sectio cum sphæræ superficie erit cuiusdam *MAXIMI* circuli peripheria C E D, & eius diameter C D: quare B D, in qua est centrum, cùm sit *MAXIMA*, erit maior B E; & B C, cum sit *MINIMA* minor erit eadem B E, & hoc semper vbicunque pertingat ducta B E: ideoque B D est *MAXIMA* ad vniuersam sphæræ superficiem ducibilium ex dato puncto B, & B C *MINIMA*. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. LXI.

A puncto intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum dato, ad eius concauam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto Conus rectus, vt in prima figura, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vt in secunda, cuius axis A B, & oporteat per punctum intra ipsum datum ad concauam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur solidum plano per axem A B, ac per datum punctum ducto efficiente in solidi superficie sectionem D A E, quæ eadem erit, *a* ac ipsius solidi genitrix sectio, & in Cono angulum rectilineum constituet.

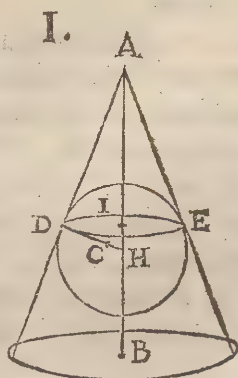
a ex Comment. Cōmand. in 12. Arch. de Conoid. & Spheroid.

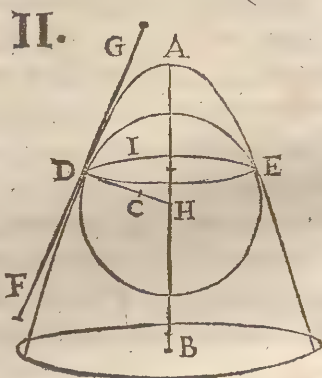
Iam si datum punctum fuerit in axe, vt in H; ducta H D, quæ in se-

ctione

ctione D A E sit *MINIMA*, (sed quæ in angulo, primæ figuræ, erit perpendicularis ad A D) ipsa H D erit quoque *MINIMA* in solido.

Nam si H D est *MINIMA* ad peripheriam D A E patet ex 20. 22. ac 23. huius, ipsam H D perpendicularem esse rectæ F D G, quæ ad punctum D sectionem contingat. Si ergo centro H, interuallo H D circulus describatur [a] D E B, ipse cadet totus intra sectionem, eam contingens tantùm in duobus punctis D E: quare in reuolutione sectionis D A E circa axim A B describetur datum solidum, & à circulo sphæra, quæ tota cadet intra solidum, eius concauam superficiem contingens [b] tantùm per peripheriam D I E eius circuli, qui in reuolutione describitur à puncto D; & ipsa H D, vna cum qualibet alia eductarum ab H ad prædictam peripheriam D I E, erit *MINIMA* in solido quæsita; cum hæ omnes sint æquales inter se, eò quod sint latera Coni recti, cuius basis est circulus D I E, vertex H; cumque omnes aliæ eductæ ab H ad solidi superficiem, occurrant priùs sphęricæ superficiei (quæ cadit tota intra solidi superficiem) quàm superficiei conicæ, aut dati solidi conoidalis.





[a] 92. primi huius.

[b] 56. h.

Si verò datum punctum sit C inter axem, & sectionem: ducta item C D, quæ in sectione sit [c] *MINIMA*. Dico ipsam quoque esse *MINIMAM* in solido.

[c] 20. 22. 23. h.

Cum enim C D sit *MINIMA* ad sectionis peripheriam D A E, ipsa C D erit contingenti F D G perpendicularis, quare, & producta axi [d] occurret, vt in H: quo facto centro, ac interuallo H D descripto circulo D E B, & facta reuolutione circa axim A B, procreabitur denuo datum solidum, & sphæra, cuius superficies cadet tota intra [e] solidi superficiem, sed recta C D est *MINIMA* [f] à puncto C ad sphæræ superficiem eductarũ; quare ipsa C D est omnino *MINIMA* ex C ducibilium ad concauam, & exteriorem solidi superficiem. Quod facere oportebat.

[d] 88. pr. h.

[e] 56. h.

[f] ex 60. h.

PROBL. XIII. PROP. LXII.

A puncto vbicunque dato, ad Sphæroidis superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

Schematismus 4.

Esto datum Sphæroides A B C D, cuius axis reuolutionis sit B D, centrum E, & punctum datum sit F. Oportet primò ex F ad Sphæroidis superficiem *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Pro huius lineæ indagatione, generalis constructio in singulis figuris quarti Schematismi, talis est.

Secetur Sphæroides A B C D plano per axem B D, ac per datum punctum F

punctum F

ctum F ducto, sectionem efficiens in solido figuram A B C D, quæ semper est eadem, ac Ellipsis quæ solidum genuit; & à dato puncto F ad huius sectionis peripheriam ducatur [a] *MAXIMA* linea. Dico ipsam quoque esse *MAXIMAM* ad solidi superficiem.

a 23. h.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vt in 9. primis figuris; vel Prolatum, vt in totidem proximè sequentibus.

Si primum: vel datum punctum F idem est cum centro E, vt in prima figura, & tunc duo semi-axes maiores F B, F D erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam per 23. huius ad num. 1. Vel est in maiori axe B D, hoc est inter verticem, & centrum, vt in secunda, & tunc F D tantùm, in qua est centrum est *MAXIMA*, vt ad num. 4. & 5. Aut in ipso vertice B, vt in tertia, quo in casu F B, item est *MAXIMA*, vt ad num. 2. Vel in ipso maiori axe, extra tamen sectionem, vt in quarta, & tunc ipsa F D, in qua est centrum pariter est *MAXIMA*, vt ad num. 3. Vel est in minori axe A C, hoc est vel distans à vertice A per interuallum F A non minus dimidio recti, cuius transuersum est A C, vt in quinta figura, & tunc ipsa F A est *MAXIMA*, vt ad num. 6. Aut distat ab A per interuallum minus prædicto dimidio, vt in sexta figura, & sic duæ tantùm F H, F G sunt *MAXIMAE*, vt ad num. 7. Vel denique datum punctum F est inter axes, & hoc, vel in ipsa peripheria, vt in septima figura, vel intra, vt in octaua, vel extra, vt in nona, atque in his casibus vna tantùm duci potest ex F *MAXIMA*, vt ad num. 9. quæ sit F G.

Si autem Sphæroides fuerit Prolatum, vt in nouem proximis figuris eiusdem Schematismi, vel datum punctũ est idem cum centro F, vt in 10. figura, & tunc duo semi-axes maiores F A, F C erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam. Vel est in maiori axe, & hoc vel inter centrum, & verticem C, vt in vndecima, vel in ipso vertice, vt in duodecima, vel extra verticem vt in decimatertia, quibus in casibus F A, in qua centrum, est *MAXIMA*. Vel est in minori axe distans à vertice B per interuallum non minus dimidio recti, cuius transuersum sit B D, vt in decima quarta figura, & tunc F B, vel F G est *MAXIMA*, vel distans à vertice B per interuallum minus prædicto dimidio, vt in decimaquinta, & tunc duæ sunt *MAXIMAE* F G, F H. Vel est inter axes, & hoc aut in ipsa peripheria, aut intra, aut extra, vt in 16. 17. & 18. in quibus vna tantùm F G est *MAXIMA*, quæ omnia ad præcitatos numeros propos. 23. huius sunt demonstrata. Si ergo in singulis figuris ad interuallum *MAXIMAE* repertæ F D, vel F G respectiuè, cum centro dati puncti F circulus describatur, ipse cadet totus extra Ellipsim, hanc tantùm contingens in eò puncto, vel in ijs duobus ad quę *MAXIMA*, vel *MAXIMAE* perueniunt; nam si circulus alibi cum Ellipsi conueniret *MAXIMAE* quoq; plures essent quàm vna, vel duæ respectiuè, quod est contra ostensa in 23. huius.

Prætcrea, vbi F centrum descripti circuli G H non est in B D axe reuolutionis Ellipsis A B C D, vti reperitur in 1. 2. 3. 4. 10. 14. ac 15. figura, in quibus eadem B D est circuli diameter, ducatur I F L diameter circuli G H, atque axi B D equidistans; & concipiatur, modo circulum circa diametrum I L, tanquam circa axim conuerti, interea manente Ellipsi, & fiet sphæra G H, modò Ellipsim circa axim B D, manente tamen circulo, & procreabitur Sphæroides A B C D, quod cadet totum intra sphæram, hanc [b] tantùm contingens,

b 56. h.

ad vnicum punctum D, aut G, vt in 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. 16. 17. ac 18. figura, quoniam in his quoque vnicus est contactus inter circulũ, & Ellipsim; vel ad duo tantùm puncta B, D, vt in prima, aut G, H, vt in sexta, in quot circulus Ellipsim contingit, & quæ non sunt extrema eiusdem applicatæ in vtraq; sectione ad communem axim; vel tandem ad integram circuli peripheriam à puncto A in decima figura, vel à puncto G in 15. ex figurarum reuolutione circa communem axim BD descriptam. Cum ergo Sphæra GH claudat Sphæroides ABCD, atque ipsum contingat tantùm, vel in vno, vel in duobus punctis, vel ad integram circuli peripheriam, cũq; omnes rectæ, quæ à centro F ad punctum sphæricæ superficiei duci possunt sint æquales ijs, quæ ad prædicta contactuum pũcta, vel peripherias ducuntur, ideò quæ ab eodem centro ad inclusam Sphæroidis superficiem, præter ad prædicta puncta, vel peripherias ducentur minores erunt, ac propterea ipsæ eductæ à centro F, siue à puncto dato ad prędicta puncta, vel peripherias in Sphæroidis superficie erunt *MAXIMAE* quæsitæ. Quod erat primò faciendum.

SI verò ad Sphæroidis superficiem ABCD ducenda sit *MINIMA* linea à puncto dato F. Vel datum punctum est in ipsa superficie, & tunc *MINIMA* in punctum abit. Vel cadit extra, & tunc *MINIMA* reperitur, vt in 58. huius. Vel tandem est intra Sphæroides, & tunc ad *MINIMAM* venandam generalis constructio est huiusmodi.

Secetur Sphæroides plano per axem BD, & per datum punctum F, genitricem Ellipsim efficiente ABCD, ductaque ex F ad Ellipsis peripheriam *MINIMA* * recta linea, ipsa quoque erit *MINIMA* ad Sphæroidis superficiẽ.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vel Prolatum. Sit primò Oblongum, vt in figuris 19. 20. 21. 22. 23. Itaque datum punctum F, vel est in centro, vt in 19. & tunc duæ FA, FC, sunt *MINIMAE*, vel in maiori axe AB distans à vertice B per interuallum maius dimidio recti, &c. itemque duæ FG, FH sunt *MINIMAE*, vt in 20. vel per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 21. & tunc vnica FB, in qua non est centrũ, est *MINIMA*; vel est in minori axe, vt in 22. in qua FC vbi centrum non reperitur est *MINIMA*; vel tandem est inter axes, vt in 23. & tunc vnica FG est *MINIMA*, &c. *23. h.

Sit denique Sphæroides Prolatum, vt in postremis figuris huius quarti Schematismi. Si punctum F congruit cum centro E, vt in 24. figura duæ FD, FB sunt *MINIMAE*; si est in semi-axe maiori EC, distans à C per interuallum maius recti dimidio, &c. vt in 25. duo item FG, FH sunt *MINIMAE*; si per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 26. vnica FC est *MINIMA*; si in semi-axe minori EB, vt in 27. ipsa FB, in qua non est centrum est *MINIMA*; si tandem inter axes, vt in 28. vnica FG est *MINIMA*, quæ omnia in prop. 23. huius sunt demonstrata.

Si ergo in his omnibus figuris cùm centro F, ad interuallum nuper inuentæ *MINIMAE* describatur circulus GH, ipse circumscriptus erit Ellipsi, hanc tantùm contingens in eo, vel in ijs punctis, ad quæ *MINIMA*, vel *MINIMAE* perueniunt; nam si alibi cum Ellipsi conuenirent, *MINIMAE* plures essent, quàm esse possint. Itaque in circulis figurarum 22. 23. 25. 26.

28. in quibus eorum centra non sunt in BD axe reuolutionis Ellipsis, prout sunt in reliquis, ducatur per centrum F diameter IL eidem axi BD æquidistans, & concipiatur, tum circulum, tum Ellipsim conuerti eadem arte, qua superiùs vsi sumus, non absimili ratiocinatione, atque ope 56. huius, ostendetur inclusam Sphæram Sphæroides contingere, vel in vnico puncto, vt euenit in 21. 22. 23. 26. 27. ac 28. vel in duobus tantùm, vt in 24. & 25. vel ad integram circuli peripheriam, vt in 19. & 20. ideoque omnes rectas, quæ à centro F ad puncta Sphæricæ superficiei ducuntur, æquales esse ijs, quæ ad prædicta contactuum puncta, vel ad peripherias ducuntur, ac propterea, quæ ad circumscriptam Sphæroidis superficiem, præter ad eadem puncta, vel peripherias ducentur, maiores erunt. Vnde ipsæ eductæ, à dato puncto F ad reperta contactuum puncta, vel ad peripherias super dati Sphæroidis superficiem erunt *MINIMAE*. Quod vltimò faciendum erat.

MONITVM.

Miraberis fortasse, ac non immeritò, proximas hasce quinque propositiones circa planas portiones versantes, & immediatè post quadragesimam quintam huius aptè apponendas, locum hunc inter solida sortitas fuisse: sed inuitam, vel fortuitam potiùs huius transmissionis causam, hìc tibi enarrare superuacaneum puto. His itaque vtaris prout suo loco insertis; nulla namque ipsarum indiget aliqua præcedentium vsque ad num. 46. inclusiuè, licet sola quinquagesima prima nonnullarum sequentium notionem assumat.

THEOR. XXXVIII. PROP. LXIII.

Conuersum Prop. 40. h.

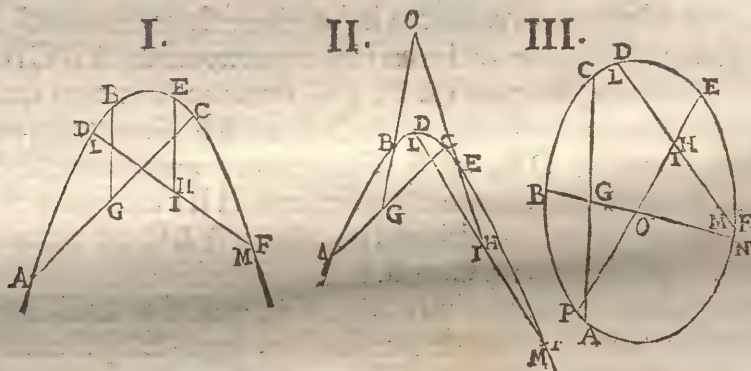
Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, si fuerint de eadem Parabola habebunt intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia. Si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo, prædicta diametrorum segmenta erunt proprijs semi-diametris proportionalia.

Sint, in quacunque harum figurarum, duæ portiones ABC, DEF inter se æquales, quæ in sectione Ellipsis tertiæ figuræ sint primò minores semi-Ellipsi, & harum omnium segmenta diametrorum sint BG, EH, tùm in Parabola primæ figuræ, tùm in reliquis, quarum centrum sit O. Dico, in prima, segmenta EH, BG inter se æqualia esse, in reliquis verò, esse vt HE ad EO, ita GB ad BO.

Ex altera diametrorum, vtputa ex EH, secetur, in prima figura, EI æqualis segmento BG; & in reliquis, fiat OE ad EI, vt OB ad BG, atq; in omnibus ordinatim applicetur per I ipsi diametro EI recta LIM, quæ

rectæ DHF æquidistabit, cum & hæc quoque sit eidem diametro ordinatim ducta.

Iam in singulis figuris erit portio LEM æqualis [a] portioni ABC, sed est quoque portio DEF eidem portioni A B C æqualis, ex hypothesi, quare duæ portiones LEM, DEF inter se æquales erunt, sed vtraque est de eadem sectione, & circa communem diametrum EHI, & super bases parallelas, ergo basis LIM tota congruet cum basi DHF, vnde & punctum I cum puncto H; quare segmenta EI, EH inter se æqualia erunt, ac propterea erit, in prima, segmentum quoque EH æquale BG, & in reliquis erit HE ad EO, vt GB ad BO. Quod primò ostendere proponebatur. a 40. h.



Sint iam in tertia figura duæ portiones æquales ANC, DPF semi-Ellipsi maiores, quarum segmenta diametrorum sint GN, HP, & commune centrum O. Dico item esse GN ad NO, vt HP ad PO.

Producantur diametri NG, PH, ad B, E.

Et cum portiones ANC, DPF sint æquales, & semi-Ellipsi maiores erunt quoque reliquæ A B C, DEF de eadem Ellipsi inter se æquales, sed semi-Ellipsi minores; quare erit, vt supra ostendimus, GB ad BO, vt H E ad E O, & conuertendo, & diuidendo O G ad GB, vt OH ad HE, & est GB ad BO, vel ad ON, vt HE ad EO, vel ad OP, ergo, ex æquali G O ad O N, vt HO ad OP, & componendo, G N ad NO, vt HP ad PO. Quod vltimò erat, &c.

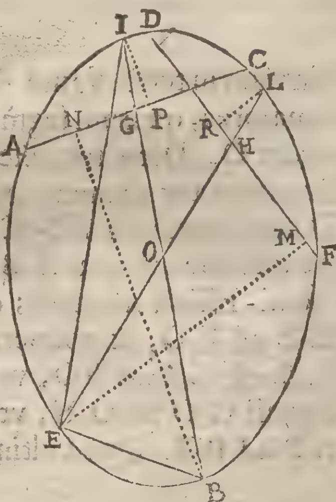
THEOR. XXXIX. PROP. LXIV.

Portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli rectilinei, quarum intercepta diametrorum segmenta in Parabola sint æqualia, vel in Hyperbola, aut in Ellipsi, vel circulo, ad proprias semi-diametros eandem simul habeant rationem; vel in angulo pertingant ad eandem inscriptam concentricam Hyperbolen, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales.

Schematismus 3.

NAm, quo ad primùm, reiterata inspectione figurarum tertij Schematismi pro propositione 40. huius; ibi in portionibus ABC, HEI, tùm quandò, in Parabola, diametri BF, EG sint æquales; tùm quandò, in reliquis sectionibus, sit semi-diameter DB ad BF diametrum portionis ABC, vt semi-diameter DE, ad EG diametrum portionis HEI, demonstratum fuit, propè finem, basim HI portionis HEI, ad basim AC portionis ABC, esse reciprocè, vt altitudo portionis ABC ad altitudinem portionis HEI. Quod tanquam Coroll. Prop.40. huius elici poterat. At cum ibi tantùm loquatur de portionibus Ellipticis, quæ sint semi-Ellipsi minores, hoc idem verificari etiam de portionibus semi-Ellipsi maioribus, vel etiam de ijsdem semi-Ellipsibus, ita demonstrabitur.

Sint duæ portiones ABC, DEF de eadem Ellipsi, cuius centrum O; vtraque verò sit semi-Ellipsi maior, quarum diametri GB, HE ad proprias semi-diametros BO, EO sint in eadem ratione. Dico, basim AC vnius, ad DF basim alterius, esse vt huius altitudo EM, ad illius altitudinem BN.



Productis enim diametris BG, EH vsq; ad Ellipsis peripheriam in punctis I, L, è quibus ductis IP, LR, basibus AC, DF perpendicularibus, hæ erunt altitudines portionum AIC, DLF, & reliquarum portionum altitudinibus, BN, EM æquidistabunt.

Et cum, ex hypothesi, sit GB ad BO, vt HE ad EO, sumptis consequentium duplis, conuertendo, & per conuersionem rationis BI ad IG, erit vt EL ad LH; & sumptis antecedentium subduplis, OI ad IG, vt OL ad LH: quare, per superiùs ostensa, in portionibus AIC, DLF, semi-Ellipsi minoribus, erit basis AC ad DF, vt altitudo LR ad altitudinem IP, sed LR ad IP est, vt EM ad BN, vt mox demonstrabitur, ergo AC ad DF erit quoque, vt EM ad BN.

Quod autem sit LR ad IP, vt EM ad BN. Cum demonstratum sit esse

esse E L ad L H, vt B I ad I G, erit diuidendo, & conuertendo L H ad H E, vel L R ad E M (ob triangulorum L H R, E H M similitudinem) vt I G ad G B, vel ita I P ad B N (ob similitudinem triangulorum I G P, B G N) & permutando L R ad I P, vt E M ad B N. Quod reliquum erat ostendere de portionibus semi-Ellipsi maioribus.

Tandem intelligantur duæ semi-Ellipses I E B, E B L de eadem Ellipsi. Dico basim I B ad basim L E esse reciprocè, vt altitudo portionis E B L ad altitudinem portionis I E B.

Iunctis enim E I, E B; cum in triangulis I E O, B E O, quorum communis vertex E, sit basis I O æqualis basi B O, erit triangulum I E O, triangulo B E O æquale; & si concipiatur basis trianguli B E O permutari, ita vt ipsa sit O E, & vertex B: cum huiusmodi triangula sint æqualia, erit basis I O, vnius I E O, ad basim O E, alterius B E O, ita reciprocè altitudo trianguli B E O, cuius vertex B, ad altitudinem trianguli I E O, cuius vertex E; sed horum triangulorum altitudines sunt eædem, ac semi-Ellipsium E B L, I E B, ergo I O ad O E, vel sumptis duplis, basis I B ad basim L E, erit reciprocè, vt altitudo semi-Ellipsis E B L ad altitudinem semi-Ellipsis I E B.

Quò autem ad portiones eiusdem anguli, super figuram primam Propos. 45. huius, in qua diametri B E, M D portionum, siue triangulorum A B C, H M I pertingunt ad eandem Hyperbolen D E concentricam, cum ibi demonstratum sit ipsa triangula inter se esse æqualia, erit basis A C vnius, ad H I basim alterius, vt altitudo trianguli H M I ad altitudinem trianguli A B C: hoc enim elicitur ex elementis, nam triangula æqualia habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quare portiones eiusdem coni-sectionis, &c. Quod erat, &c.

THEOR. XL. PROP. LXV.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Et è conuerso.

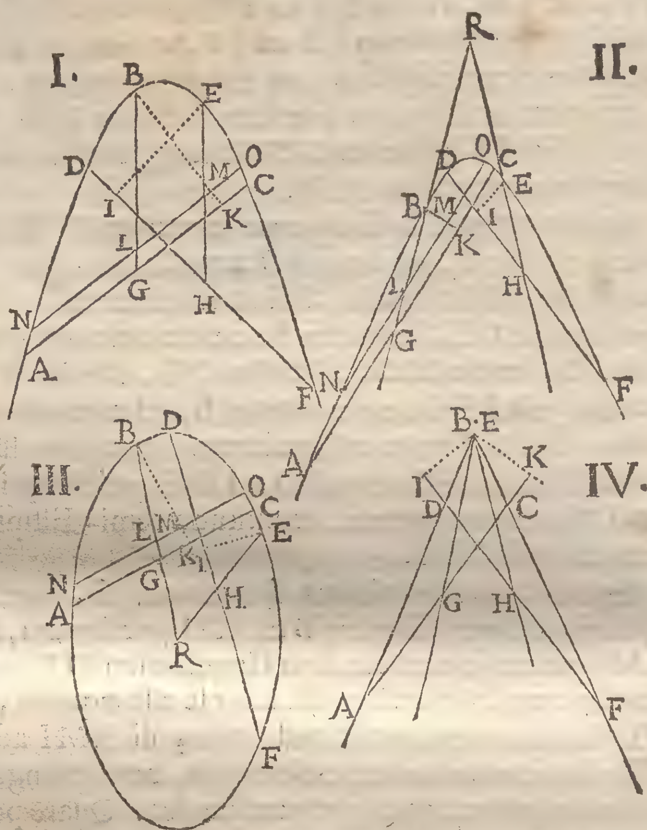
Si portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo habuerint bases altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

1. Etenim, quò ad primùm, quandò portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo sunt æquales, si fuerint de eadem Parabola, habent intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia, & si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo habent segmenta proprijs semi-diametris [a] proportionalia (nam si fuerint de eodem angulo propositum satis constat, ex Elementis;) sed quandò huiusmodi portionibus insunt conditiones prædictæ, ipsæ habent [b] bases altitudinibus reciprocè proportionales, ergo, & cum fuerint æquales, ipsarum bases altitudinibus erunt reciprocæ.

a 63. h.
b 64. h.

cæ. Quod erat primò, &c. quodque tanquam præostensum bis assumpsimus in 51. h.

2. PRo demóstratione autẽ cõuersi huius, ponantur portiones A B C, D E F de eadem coni-sectione, in primis tribus figuris, (quę tamen in tertia sint semi-Ellipsi minores) vel de eodem angulo, vt in quarta, quarum omniũ diametri sint G B, H E, bases A C, D F, altitudines verò B K, E I, centrum autem in secunda, & tertia sit R: sitque basis A C ad basim D F, reciprocè, vt altitudo E I ad altitudinem B K. Dico ipsas portiones inter se æquales esse.



Nam si segmenta diametrorum B G, E H, in prima exhibente Parabolen, fuerint æqualia; & in secunda, ac tertia exhibentibus Hyperbolen, & Ellipsim, habuerint ad proprias semi-diametros B R, E R eandem rationem; iam patet, per 40. huius, ipsas portiones inter se æquales esse.

At si inter hæc diametrorum segmẽta non est prædicta æqualitas in prima figura; vel proportionalitas, in secunda, & tertia, alterum ipsorum segmẽtorum erit æquo maius. Sit ipsum B G, & ad æquum reducatur in L: erit ergo B L minus B G, cui per L ordinatim applicetur N L O (quæ basi A C æquidistabit) altitudinem B K secans in M; & erit B M altitudo portionis N B O.

Iam, diameter L B, in prima, facta est æqualis diametro H E; in secunda verò, & tertia nũc ponitur L B ad B R habere eandem rationem quàm H E ad E R, ergo per primam partem huius, erit basis N O ad D F, vt altitudo E I ad B M; vnde rectangulum sub N O, B M æquabitur rectangulo sub D F, E I; sed est, ex hypothesi, basis A C ad D F, vt altitudo E I ad B K, ergo, & rectangulum sub A C, & B K, æquabitur eidem rectangulo sub D F, & E I; quare duo rectangula sub N O, & B M, & sub A C, & B K sunt æqualia, quod est falsum. Rectangulum enim sub N O, B M minus est rectangulo sub A C, B K, eò quod sub minoribus lateribus contineatur, cum sit applicata N O minor applicata A C, & altitudo B M minor altitudine B K: quapropter ipsa diametrorum segmenta, in prima, æqualia erunt; & in re-

& in reliquis, erunt proprijs ſemi-diametris proportionalia, hoc eſt ipſæ portiones æquales [a] erunt. De portionibus tandem eiuſdem anguli, quæ ſunt triangula, iam notum eſt, quandò baſes ipſorum altitudinibus ſint reciprocè proportionales, ipſa triangula eſſe æqualia. Quare, &c. quod ſecundò probandum erat. a 40. h.

Haud incongruum, neque inutile duximus hic adnotaſſe Theorema huiuſmodi.

THEOR. XLI. PROP. LXVI.

Æquales portiones eiuſdem coni-ſectionis, vel circuli (quæ tamen in Ellipſi ſint, vel vnà æquales, vel vnà maiores, vel vnà minores ſemi-Ellipſi) ad inſcripta ſibi triangula, (nempè ad ea, quorum baſes eædem ſunt, ac portionum, eædemque altitudines, ſiuè ijdem vertices) vel ad circumſcripta parallelogramma, ſunt inter ſe in vnà, eademque ratione.

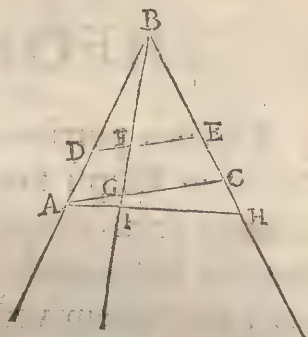
NAm cum baſes æqualium portionum eiuſdem coni-ſectionis, vel circuli earum altitudinibus ſint [b] reciprocæ, baſes quoque inſcriptorum triangulorum, eorum altitudinibus reciprocabuntur, cum vtrobique altitudines, & baſes ponantur eædem; ac propterea ipſa triangula æqualia erunt. Quare, vt portio ad portionem, ita triangulum ad triangulum, ob æqualitatem tùm portionum, tùm triangulorum; & permutando, portio ad ſibi inſcriptum triangulum, vt altera æqualis portio de eadem coni-ſectione, vel circulo ad ſibi inſcriptum triangulum. Et ſumptis conſequentium duplis, portio ad circumſcriptum parallelogrammum, erit vt altera portio ad circumſcriptum parallelogrammum. Quod erat, &c. b 65. h. ad num. I.

Hoc de ſolis Parabolæ portionibus, etiam ſi inæqualibus, nec de eadem Parabola, manifeſtum iam erat ex Archimede (omnis enim Parabolæ portio ad ſibi inſcriptum triangulum habet [c] rationem ſeſquitertiam.) De reliquarum autem coni-ſectionum æqualibus portionibus, non dum. c 17. pr. h.

LEM.

LEMMA XIII. PROP. LXVII.

Si in angulo A B C applicatæ ſint duæ rectæ lineæ D E, A C, quæ ab eadem recta B G per verticem B ducta proportionaliter ſecentur, ita vt ſit A G ad G C, homologè, vt D F ad F E. Dico ipſas A C, D F inter ſe æquidiſtare.



SI enim A C non eſt ipſi D E parallela, ſit alia applicata A H, ſecans B G in I: erit ergo (ob parallelas) A I ad I H, vt D F ad F E; vel ob hypotheſim, vt A G ad G C, ergo in triangulo A C H erit I G parallela ad H C, ſed ipſæ conueniunt in B. Quare non erit alia ex A ipſi D E parallela, quàm A C. Quod erat, &c.

THEOR. XLII. PROP. LXVIII.

Conuerſum Prop.45.h.

Baſes æqualium portionum, ex eodem angulo, ſiue ex eadem quacunque coni-ſectione, vel circulo abſciſſarum, eandem inſcriptam eiuſdem nominis ſectionem ſimilem, & concentricam ad puncta media contingunt.

SInt de angulo rectilineo, vt in prima figura, vel de qualibet alia coni-ſectione, vel circulo, vt in ſecunda, abſciſſæ duæ æquales portiones A B C, D E F, quarum baſes A C, D F ſint bifariam ſectæ in G, H, & per G inſcribatur [a] eiuſdem nominis ſectio ſimilis, & concentrica exteriori A B F, quæ ſit I G H. Dico baſim A C ſectionem I G H contingere in G, & baſim quoque D F eandem ſectionem contingere in H.

a 4. ſec. conic & 5.6.7. p. h.

Iungatur, in prima, B G, & producatur, nam ipſa erit diameter Hyperbolæ I G H (cum ſit B eius centrum) bifariam ſecans omnes in ea applicatas, quæ ſi vſque ad aſymptotos producantur, erunt, & ipſarum ſegmenta inter aſymptotos, & ſectionem æqualia [b] inter ſe, quare ſi ipſa ſegmenta concipiantur addita æqualibus ſemi-applicatis in ſectione eis in directum poſitis, prouenient totæ applicatæ in angulo A B E biſariam ſectæ à diametro B G producta, ſed ponitur quoque applicata A C bifariam ſecta in G, quare A C ipſis applicatis in ſectione [c] æquidiſtabit, ac ideò ſectionem I G H continget [d] in G.

b 8. ſecũd. conic.

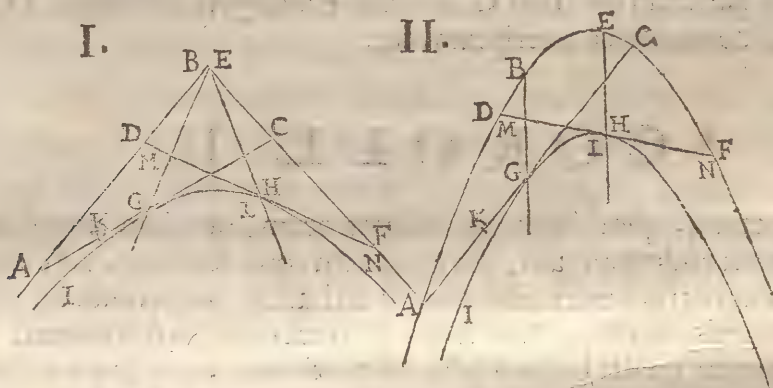
c 67. h.
d 32. primi conic.

In ſecunda autem figura quaſcunque coni-ſectiones exhibente ducatur ex G diameter G B, quæ vtriuſque ſectionis A B E, I G H erit communis diameter (cum ipſæ ponantur ſectiones concentricæ, &c.) ad applicatas in

ipſis

ipsis æqualiter inclinata; quare applicatæ in sectione IGH ad diametrum BG æquidistabunt applicatis in sectione ABC ad eandem diametrum, quarum vna est AC per verticē G ducta, cum in G sit bifariam secta; ergo ipsa AC continget [a] in G sectionem IGH. a ibidem.

Sed hoc idem breuiùs, tùm in angulo, tùm in qualibet coni-sectione, omisso precedenti Lemmate.



Concedatur sectionem IGH occurrere rectæ AC in alio puncto quàm G, quod sit K. Dico tamen punctum K idem esse ac G.

Quoniam erit AK [b] æqualis GC, sed est quoque AG æqualis eidem GC, ergo AK, & AG sunt æquales, sed hæ habent communes terminos ad A, ergo, & punctum K congruet cum G. Quare ipsa basis AC contingit omnino sectionem IGH in G. b 8. sec. conic. & ex 1. Coroll 46.h.

Ampliùs, in prima figura, iungatur EH, quæ est [c] diameter inscriptæ Hyperbolæ IGH, & in secunda ex H ducatur vnius sectionis diameter HE, quæ erit quoque diameter alterius (cum ponantur concentricæ, &c.) Si ergo hæc diameter EH producatur, ipsa secabit interiorem sectionem IGH in aliquo puncto, vt in L, ex quo ducatur in sectione ABF recta MLN ipsi DF æquidistans. c 8. pr. h.

Et quoniam, in singulis, figuris DF est bifariam secta in H, erit quoque MN bifariam secta in L (cum MN ex constructione æquidistet ordinatim ductæ DF in eadem sectione ABF) sed sectio IG transit per L, quare sectio ipsa IG continget omnino rectam MN in L (quod ijsdem rationibus, ac supra de AC ostensum fuit, demonstrabitur) ergo portio MEN æquabitur [d] portioni ABC, sed portio quoque DEF æquatur eidem portioni ABC, ex hypothesi, quare portiones MEN, DEF inter se æquales erunt, suntque de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & circa communem diametrum EHL, & ipsarum bases simul æquidistant, quapropter, & bases quoque simul in totum congruent, nempe MN cum DF, ac ideò punctum L cum puncto H. Recta igitur DF, quæ eadem est cum MN, contingit sectionem IG in H. Quod tandem erat demonstrandum. d 45. h.

COROLL. I.

HInc elicitur, quod basis angularis portionis, vel basis cuiuslibet coni-sectionis, vel circuli ad punctum medium contingit eiusdem nominis sectionem similem, & concentricam per ipsum punctum dato angulo, vel sectioni, aut circulo inscriptam.

Nam primò loco superiùs demonstratum fuit, in vtraque figura, basim AC ad eius punctum medium G omnino contingere sectionem IGH per punctum G concentricè inscriptam, &c.

COROLL. II.

SEquitur etiam, quod segmenta diametrorum, omnium æqualium portionum ex eodem angulo, aut ex eadem coni-sectione, vel circulo abscissarum, cum earum extremis terminis ad basim, perueniunt ad eandem eiusdem nominis, similem, & inscriptam concentricam sectionem.

Etenim puncta media basium ipsarum portionum, quæ iam eandem similem inscriptam concentricam sectionem contingunt, eadem sunt, ac prædicta diametrorum extrema puncta, &c. vt satis constat.

MONITVM.



Pportunè monendus hic Lector est, nos superius, & in sequentibus, Hyperbolen intra angulum asymptotalem descriptam, & Parabolen Parabolæ æquidistantem, interdum nuncupasse similes, & concentricas sectiones, perinde ac si angulus rectilineus asymptotalis, sectio esset similis, & concentrica Hyperbolæ, & quasi Parabole æquidistanti Parabolæ concentrica esset. Verùm si id accuratiùs perpendamus, quo ad angulum rectilineum, animaduertere licebit ipsum non abs re haberi posse tanquam vnam Hyperbolarum, quarum centrum sit vertex eiusdem anguli, & asymptoti sint eadem anguli latera: Omnes enim Hyperbolæ cum ijsdem asymptotis, siue cum eodem centro descriptæ, sed cum diuersis semi-axibus, inter se similes sunt, vti ex doctrina primi huius iam satis patuit; & quò semi-axes sunt minores, eò tales Hyperbolæ fiunt angustiores (nempe inscriptibiles per vertices ijs, quarum semi-axes sint maiores) sed tantò magis accedunt ad latera eiusdem anguli, nunquam tamen eis occurrunt, & in hoc semi-axium decremento, peruenitur tandem ad MINIMVM, nempe ad punctum, seu verticem anguli, qui est centrum omnium similium Hyperbolarum, & ad MINIMAM Hyperbolen,

hoc

hoc est ad omnium similium, & concentricarum angustissimam, cum ipsis anguli lateribus, seu cum asymptotis in totum congruentem. Itaque angulus rectilineus vocari quodammodo potest prima, & MINIMA similium Hyperbolarum concentricarum, quarum angulus asymptotalis sit æqualis dato, & quælibet prædictarum similium Hyperbolarum inscriptarum dici potest sectio eiusdem nominis cum angulo similis, & concentrica, &c. quales meritò appellantur duæ Hyperbolæ, vel duæ Ellipses inter se similes, & concentricæ.

Quò autem ad congruentes Parabolas, vel etiam non congruentes, (omnes enim Parabolæ sunt similes inter se) sed per diuersos vertices simul adscriptas, quas alibi æquidistantes diximus, liceat etiam, quamuis impropriè, concentricas appellare. Etenim, & Parabole suum habet centrum à quo procedunt eius diametri, sed cum id positum sit in infinitam distantiam extra sectionem, ideò ipsæ diametri ab eodem centro emanantes inter se æquidistant, &c.

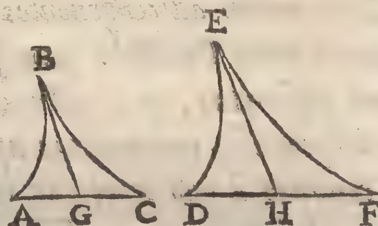
Ob easdem quoque rationes, si concipiantur Hyperbolæ intra angulos asymptotales, vel Parabolæ æquidistantes, vel Hyperbolæ, aut Ellipses, vel circuli similes, & concentrici circa communes axes in gyrum conuersi, solida ab ipsis genita vocabuntur in posterum solida eiusdem nominis similia, & concentrica. Conus enim ab angulo procreatus habebitur pro primo, & MINIMO Conoidorum Hyperbolicorum similium, & concentricorum, &c. & Conoidalia Parabolica tanquam simul concentrica, quorum commune centrum abeat in infinitam distantiam. De similibus verò, & concentricis Conoidibus Hyperbolicis, aut Sphæroidibus, vel Sphæris, à similibus, & concentricis sectionibus genitis, nihil est quod ad nominum declarationem addamus, cum eadem definitio ipsi definito perquàm rectè conueniat. Verumenimuerò iam suscepta, ac nuper intercisa solidorum tractatio, antequam resumatur, nouarum quarundam vocum explicationem requirit, quam ideò in sequentibus ita exhibemus.

DEFINITIONES.

I.

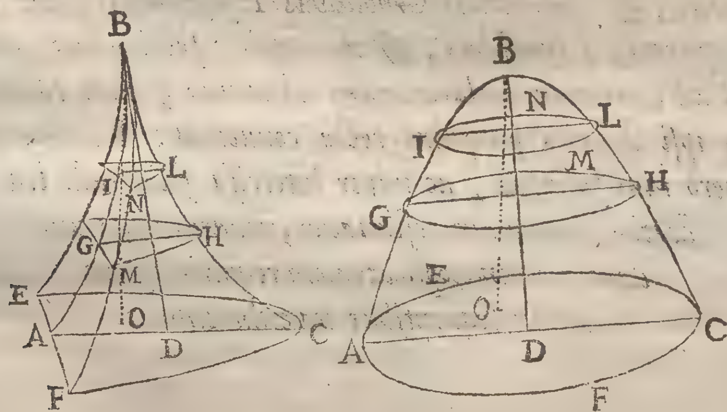
PLANA ACVMINATA SIMILIA vocentur illa, quæ inter se sint proportionalia, & quorum diametri super bases sint æqualiter inclinatæ, ac ijsdem basibus proportionales.

Hoc est si sint duo quælibet plana Acuminata proportionalia ABC, DEF, quorum diametri BG, EH cum basibus AC, DF æquales angulos alterum alteri constituant, nempe AGB ipsi DHE, & qui ei est deinceps CGB reliquo FHE sit æqualis, sitque diameter BG ad basim AC, vt diameter EH ad basim DF; huiusmodi plana inter se vocentur SIMILIA ACVMINATA. Vnde, & duæ similes Ellipses vocari poterunt similia Acuminata, cum vtraque ex duobus proportionalibus Acuminatis constet, siue ex duobus semi-Ellipsibus, per diametros æqualiter inclinatas dissectis, quarum diametri sunt basibus proportionales, &c. Idemque de duobus circulis, &c.



II.

SOLIDVM ACVMINATVM REGVLARE, vel tantùm SOLIDVM ACVMINATVM, voco omnem figuram solidam ad alteram partem deficientem, circa planum Acuminatum descriptam, cuius omnia plana basi solidi æquidistantia per Acuminati applicatas ducta, sint quoque plana Acuminata, eidem basi, ac inter se similia, & similiter posita, & quorum homologæ diametri sint ipsæ applicatæ prædicti Acuminati, &c.



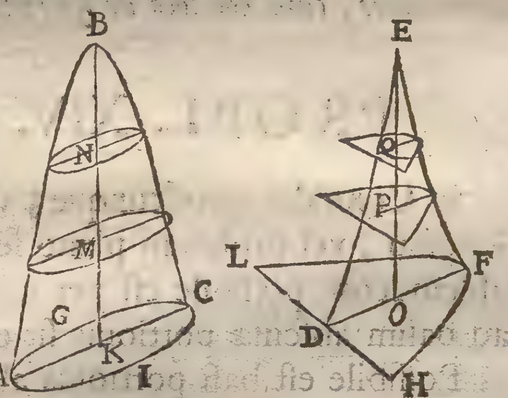
Esto planum quodcunque Acuminatum ABC, cuius basis AC, diameter BD, vertex B, & ipsa AC, sit vel diameter circuli, aut Ellipsis, vel cuiuscunque ipsarum figurarum portionis, aut diameter Parabolæ, vel Hyperbolæ, vel cuiuslibet alij plani Acuminati AECF, quod tanquam basis, ad quemlibet inclinationis angulum cum plano ABC sit dispo-

dispositum, sintque omnia plana G M H, I N L, &c. quæ basi A E C F æquidistanter ducuntur per Acuminati A B C applicatas G H, I L, &c. ipsi basi, ac inter se, similia Acuminata, & similiter posita, atque ipsæ applicatæ G H, I L sint eorundem Acuminatorum homologæ diametri: huiusmodi figura SOLIDVM REGVLARE ACVMINATVM vocetur, vel tantùm ACVMINATVM SOLIDVM; A E C F verò BASIS solidi Acuminati; sed portionem A B C Acuminati plani intra Acuminatum solidum interceptam (eò quod ipsa sit tanquam Regula, vel Modulus, aut Canon homologarum diametrorum similium planorum æquidistantium, ac solidum procreantium) nuncupare liceat CANONEM solidi Acuminati, qui si ad planum basis A E C F rectus fuerit, dicatur CANON RECTVS solidi Acuminati, & B D diameter Canonis, nuncupetur quoque AXIS solidi, & eius VERTEX punctum B, in quod abit solidum, atque eiusdem solidi ALTITVDO dicatur recta B O, quæ à vertice B super basim A E C F recta ducitur. Plana verò A C, G H, I L, &c. dicantur PLANA ORDINATIM DVCTA ad axim solidi Acuminati.

III.

SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnia plana ordinatim applicata per puncta, eorum axes proportionaliter diuidentia, sint quoque inter se, & basibus proportionalia.

Videlicet si duo solida Acuminata A B C, D E F, quorum bases sint A G C I, L F H D axes verò sint B K, E O proportionaliter secti in M, P; & in N, Q; ita vt K M, ad M B sit vt O P, ad P E; & K N ad N B, vt O Q ad Q E, &c. sitque basis A G C ad basim L F H, vt planum ordinatim applicatum per M ad applicatum per P, & vt applicatum per N ad applicatum per Q, &c. talia solida, dicentur SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA.



IIII.

Si super diametrum Acuminati plani descriptum sit parallelogrammum quodlibet super ipsum planum quomodocunque eleuatum, idemque Acuminatum concipiatur sibi ipsi æquidistanter moueri, ita vt eius diameter suo motu parallelo prædictum parallelogrammum describat; solidum occlusum à duobus oppositis Acuminatis congruentibus, ac parallelis, atque à superficie, quæ à perimetro figuræ motæ describitur CYLINDRICVS vocetur. Acuminatum verò solidum procreans, dicatur BASIS, & parallelogrammum, per quod fit æquidistans latio Acuminati plani Cylindricum procreantis, CANON DIAMETRALIS nuncupetur.

Nimirum, sit Acuminatum planum A B C, cuius diameter B D, cui insistat parallelogrammum quodcumq; B D E F super planum figuræ A B C

vtcunque

vtcunque eleuatum, concipiaturque Acuminatum A B C moueri motu sibi ipsi parallelo, sed ita vt recta B D æquidistanter incedat super parallelogrammum B E, donec congruat cum opposito latere E F. Huiusmodi solidum occlusum à parallelis, & congruentibus Acuminatis A B C, G F H, atque à superficie, quæ à perimetro A B C A in sua latione describitur, vocetur CYLINDRICVS, Acuminatum verò A B C eius BASIS, & parallelogrammum B E CANON DIAMETRALIS prædicti Cylindrici, cuius altitudo metietur per rectam ad vtrunque oppositorum planorum perpendicularem.

Itaque CYLINDRICVS dicetur omne solidum circa parallelogrāmum quodcunque descriptum, & cuius omnia plana basi solidi æquidistantia, ac per applicatas in parallelogrammo ducta, sint plana Acuminata, eidem basi, ac inter se æqualia, & similia, & similiter posita, & quorum homologę diametri sint ipsæ applicatæ in prædicto parallelogrammo; quod CANON DIAMETRALIS Cylindrici vocabitur.

Omittimus vniuersaliores Solidorum Acuminatorū, ac Cylindricorum definitiones, cum hoc loco de ijs sermo minimè habendus sit.

PROBL. XIV. PROP. LXIX.

Si Conoides quodcunque, vel Sphæra, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum plano secetur ex dato solido portionem abscindens: possibile est per axem solidi, planum ducere, quod ad basim abscissæ portionis sit erectum. Item.

Possibile est basi portionis aliud planum æquidistans ducere, quod conuexam solidæ portionis snperficiem contingat.

ESto quodcunque ex prædictis solidis A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, atque ex eo per planum E H G I sit abscissa portio solida E F G, cuius basis E H G I (quæ, vel erit [a] Ellipsis, vel circulus.) Dico possibile esse basi E H G I planum ducere per solidi axem B D, quod ad basim E H G I rectum sit. Præterea possibile esse eidem basi aliud planum æquidistans ducere, quod solidæ portionis superficiem contingat.

Si enim planum secans E I G fuerit ad axem B D erectum, hunc secans in K, sectio circulus erit, [b] cuius centrum K; & si per axim B K agatur quodcunque planum E B G basim portionis E H G I secans per rectam E G, sectionis portio plana E B G erit [c] ea, quæ solidum genuit, cuius basis eadem E G, axis verò ipse B K, & ad basim E H G I recta [d] erit. Quod primò, &c.

[a] ex 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.

[b] 12. Archim. ib. à Comād. restit.

[c] ibidem.

[d] 18. vnd. Elem.

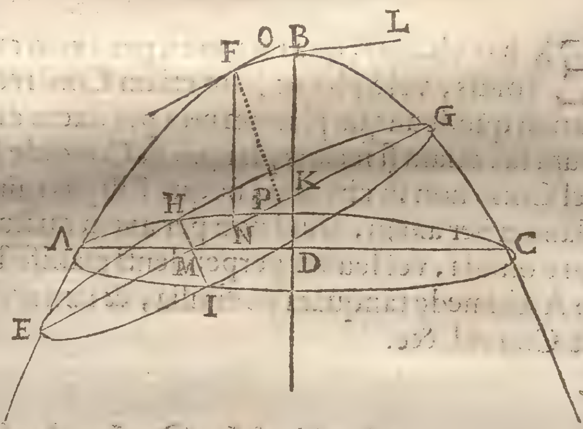
Iam

Iam si per verticem B ducatur in plano portionis E B G recta B L, ipsam portionem contingens, hæc basi E G *a* æquidistabit: & si per B L concipiatur planum duci, quod plano per axem E B G sit erectum, id solidæ portionis superficiem continget *b* in B, atque basi E H G I erit parallelum *c* cum vtrunque planorum sit eidem E B G rectum, & communes sectiones B L, E G sint parallelæ. Quod secundò, &c.

a 32. primi conic.
b 55. h.
c per Sch. Clauij post 18. vndec. elem.

Si verò planum secans E H G I rectum non fuerit ad axem B D; (& tunc sectio *d* erit Ellipsis) secetur denuò datum solidum quocunque alio plano A H C I ad axem recto: (quod tamen non transeat per intersectionem axis B D cum plano E H G I, si hoc axem secuerit intra solidum) id in solido sectionem faciet *e* circulum, centrum habentem in axe B D, vti in D, omninò autem secabit basim E H G I per communem rectam H I tùm in Ellipsi, tùm in circulo applicatam, cui ex D, circuli centro, ducta perpendiculari D M; per axem B D, ac rectam D M agatur planum in solido efficiens genitricem sectionem E A B G C, cuius communis sectio cum circulo erit diameter A C, & cum Ellipsi erit recta E G.

d 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.
e 12. Arch. ib. à Comãd. rest.



Iam priùs ostendam sectionem hanc per B D axem ductam ad secans planum E H G I, siue ad basim solidæ portionis E F G rectam esse. Quoniam cum planum circuli E H C I rectum sit ad planũ per axem E A B C, cumq; linea I M in circulo perpendicularis sit ad A C horum planorum communem sectionem, erit eadem linea I M recta *f* ad planum per axem E A B C: quare omnia plana, quæ per ipsam ducentur ad idem planum E A B C recta erunt, *g* sed E H G I basis solidæ portionis transit per I M, ergo basis E H G I, siue planum secans rectum erit ad planum per axem E A B C, siue id rectum ad planum secans, hoc est ad basim solidæ portionis. Quod primò, &c.

f 4. def. vnd. Ele.
g 18. vnd. Elem.

Cum ergo E G sit communis sectio planorum, eius scilicet, quod solidũ secat, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans, ipsa E G erit *h* axis Ellipsis E H G I, qua bifariam secta in N, erit N Ellipsis centrum, ex quo, in plana portione E F G sectionis per axem à recta E G abscissæ, & super basim solidæ portionis erectæ, ducta diametro N F, & per F sectionem *i* contingente F O, per ipsam F O agatur planum, quod ad idem planum per axem E B G rectum sit, id solidæ portionis E F G superficiem continget *l* in F, & basi E H G I æquidistabit. *m* Quod secundò, &c. Si fuerit ergo Conoides quodcunque, vel Sphæra, &c. possibile est, &c. Quod erat faciendum, ac demondrandum.

h 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.
i 2. & 4. pr. h.
l 55. h.
m Schol. Clauij post 18. vndec. Elem.

SCHO-

SCHOLIVM I.

CVm huiusmodi solida portio E F G de quolibet prędictorum solidorum abscissa, sit solidum ad alteram partem F deficiens, circa Acuminatũ planum E F G descriptum, cumque omnia plana eius basi E H G I æquidistantia, sint plana Acuminata, vt in prima proximè præcedentium definitionum monuimus, sintque omnia inter se [a] similia, ac similiter posita, eò quod vel sint circuli, vel Ellipses, quarum homologi axes sunt [b] eædem applicatæ in Acuminato E F G, idcircò per secundam prædictarum definit. talis solida portio in posterum vocari poterit aliquandò solidum Acuminatum; & planum Acuminatum, seu portio plana E F G, cum sit recta ad basim E H G I, dicetur Canon rectus solidæ portionis.

a Coroll. 15. Arch. de Conoi. &c.
b 13. 14. 15. ibid.

COROLL. I.

EX hac elicitur, qua methodo per axem cuiuslibet Conoidis, aut Sphæroidis, vel Sphæræ, aut etiam Coni recti duci possit planum, quod ad datum quodcunque planum non per axem ductum, & solidum secans, rectum sit, etiam si secans planum in Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, vel Cono non sit circulus, neque Ellipsis: simulque patet, quod prædictum planum per axem, aliud non per axem ductum omnino secat intra solidum: quæ omnia, vel leuiter perpendenti manifesta sunt ex dictis, quæque ab ipso Archimede tanquam possibilia, & iam nota passim supponuntur in libro de Conoid. &c.

SCHOLIVM II.

POterat quidem prima pars huius Problematis breuiùs persolui. Nam ex vertice B, vel ex quolibet alio axis puncto, super planum secans E H G I ducta perpẽdiculari, per quàm, & per axem B D ducto plano; constat hoc idem super planum secans rectum [c] esse. Verùm cum sæpe eueniat, quod ipsa perpendicularis occurrat secanti plano non intra solidum, sed vel in eius superficie, vel extra, cumq; omnino ostendere opus sit, quod huiusmodi planum per axem, rectum ad planum secans, hoc idem planum secat semper intra solidum, idcircò prò huius Problematis solutione superiorem viam elegimus, quæ ad vtrunq; simul nos perduceret vnica constructione.

c 18. vnd. Elem.

COROLL. II.

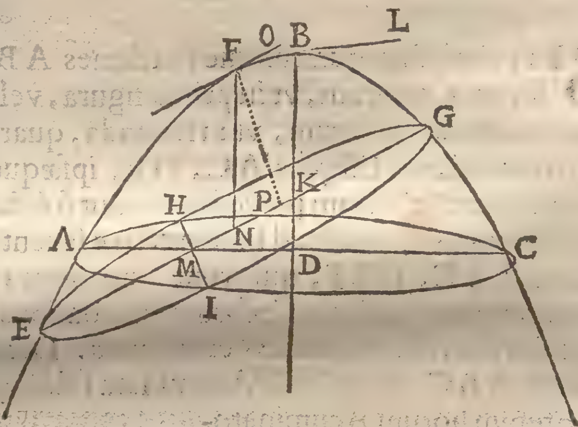
COlligitur quoque planum, quod basi portionis cuiuslibet prædictorum solidorum æquidistat, atque eius conuexam superficiem contingit, eam contingere ad verticem diametri recti Canonis; hoc est tangere ad verticem axis portionis solidæ.

Nam,

Nam, ad finem propositionis ostensum fuit, planum contingens portionem solidam EFG, & basi EHGI parallelum, eam contingere ad punctum F, quod est vertex diametri NF Canonis recti EFG, atque insuper idem punctum contactus F, iuxta Archim. definitiones præmissas ad librum de Conoid. &c. iam notum est verticem vocari axis portionis solidæ EFG.

SCHOLIVM III.

EX his itaque notandum est, axim solidæ portionis eundem esse cum diametro prædicti Canonis recti, & altitudinem, eandem cum altitudine. Nam eadem recta FN, quæ ex constructione diameter est planæ portionis EFG, est quoque axis solidæ, cum ab F eius vertice, ad N centrum basis EHGI incedat. Præterea ducta ex harum portionum cõmuni vertice F recta FP ad basim EG planæ portionis, seu recti Canonis EFG perpendiculari. Patet hanc esse Canonis altitudinem, sed Canon EFG rectus ponitur ad basim EHGI; quare FP, quæ ad communem horum planorum sectionem EG est perpendicularis, recta erit ad planum basis EHGI, ac propterea ipsa erit quoque altitudo portionis solidæ EFG, cum perpendiculariter cadat ex eius vertice F super basim EHGI, &c.



COROLL. III.

PAtet denique axim portionis cuiuscunque prædictorum solidorum, & axim solidi, cuius est portio, esse in vno eodemque plano, quod per axem eiusdem solidi ad basim portionis rectum ducitur, siue esse in plano Canonis recti.

Etenim, & BD axis dati solidi, & FN axis solidæ portionis EFG sunt in plano EBC ducto per axem BD, sed erecto super basim EIGH portionis solidę EFG, quod planum EBC idem est, ac planum recti Canonis EFG intra solidam portionem intercepti.

Si ergo per axim datæ solidæ portionis, & per axim solidi, cuius est portio ducatur planum, hoc erit ad planum basis portionis erectum, atque in solida portione rectum Canonem exhibebit.

THEOR. XLIII. PROP. LXX.

Portiones eiusdem, vel diuersorum Conorum, aut Conoidum Parabolicorum, sunt solida Acuminata proportionalia. Item.

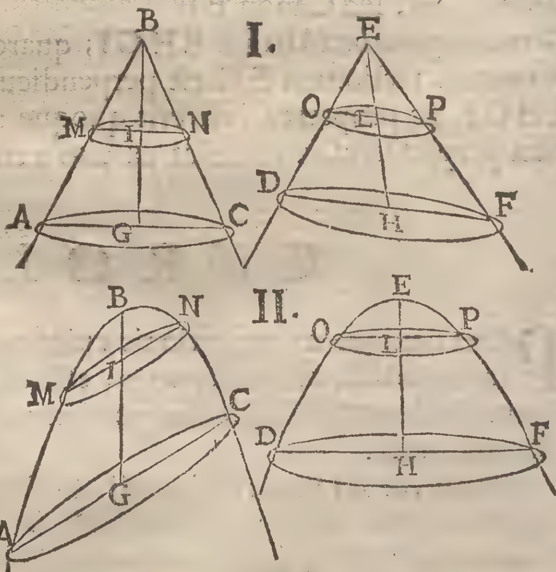
Portiones eiusdem, vel diuersorum Conoidum Hyperbolicorum, vel Sphærarum, aut Sphæroidum, quarum segmenta diametrorum in portionibus genitricium earum sectionum ad bases erectis intercepta, ad suas semi-diametros eandem homologam habeant rationem, sunt pariter solida Acuminata proportionalia.

Sint primò duæ quæcunque portiones A B C, D E F eiusdem, vel diuersorum Conorum, vt in prima figura, vel eiusdem, aut diuersorum Conoidum Parabolicorum, vt in secunda, quarum axes sint B G, E H, bases verò circuli, aut Ellipses A C, D F, ipsæque portiones solidæ, (quæ iam per primum Scholium præcedentis sunt solida Acuminata) planis per eorum solidorum axes ductis ad bases rectis [a] secentur, & fient [b] in solidis recti Canones A B C, D E F, qui erunt [c] portiones sectionum solida genitricium, & communes sectiones ipsorum cum basibus erunt [d] rectæ A C, D F, quæ circulorum, aut Ellipsium [e] erunt axes. Dico in vtraque figura solidas portiones A B C, D E F esse Acuminata solida proportionalia.

a 69. h.
b ibid. 1. Schol.
c ex 12. Archim. de Conoid. & Comand. suppleta.
d 3. vnd. Elem.
e ex 13. Archim. ibidem.

Etenim horum Acuminatorum solidorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque sectis in I, L, ducantur per I, L plana M N, O P basibus A C, D F æquidistantia, quæ in solidis efficient sectiones ipsarum basibus similes [f] earumq; communes sectiones cum planis A B C, D E F [g] erunt rectæ M N, O P ipsis A C, D F [h] parallelæ, & earundem similium sectionum homologæ diametri.

f ex Coroll. 15. ib.
g 3. vnd. Elem.
h 16. ib.

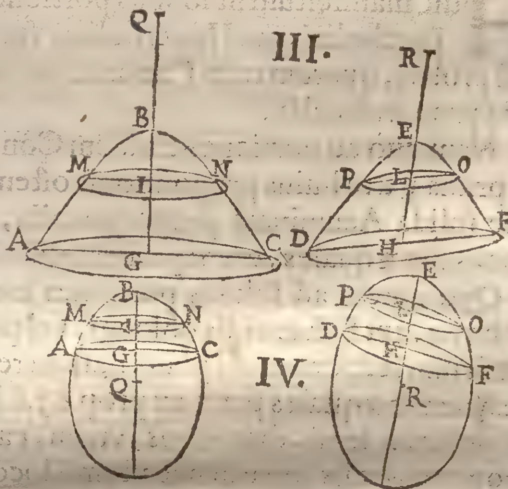


Iam cum sit G B ad B I, vt H E ad E L, ob constructionem, sitque in prima figura A C ad M N, vt G B ad B I; & D F ad O P, vt H E ad E L (cum Canones A B C, D E F sint triangula) erit A C ad M N vt D F ad O P, & quadratum A C ad M N, vt quadratum D F ad O P. In secunda verò est quadratum A C ad M N, vt recta G B ad B I (cum Canon A B C sit portio Parabolæ) vel vt recta H E ad E L, per constructionem, vel vt quadratum D E ad O P: est ergo in vtraque figura, vt quadratum A C ad M N, vel vt circulus, [i] aut Ellipsis

i Coroll. 7. Arch. ibid.

A C ad

A C ad ſibi ſimilem M N, ita quadratum D F ad O P, vel ita circulus, aut Ellipſis D F ad ſibi ſimilem O P, & permutando, ſectio A C ad D F erit vt ſectio M N ad O P, & hoc ſemper vbicunque ſolidorum Acuminatorum axes ſint proportionaliter ſecti: quare, ex tertia præmiſſarum definitionum, Acuminata ſolida A B C, D E F erunt ſolida Acuminata proportionalia. Quod erat primò, &c.



Præterea ſint A B C, D E F duæ portiones eiuſdem, vel diuerſorum Conoidum Hyperbolicorum, vt in tertia figura, vel eiuſdem, aut diuerſorum Sphæroidum, vel Sphærarum, vt in quarta, (quæ portiones ſunt pariter ſolida Acuminata per 1. Schol. 69. h.) quarum baſes ſint circuli, aut Ellipſes A C, D F. Patet quod ſi per axes ſolidorũ, quorum ſunt portiones ducantur plana, *a* quæ portionum baſibus ſint erecta, fient in ſolidis portiones genitricium *b* ſectionum A B C, D E F, hoc eſt in tertia portiones Hyperbolarum, & in quarta portiones Ellipſium, quas vocamus *c* Canones, & communes horum Canonum ſectiones cum baſibus erunt *d* rectæ A C, D F, quæ ipſarum baſium erunt *e* axes. Sint iam Canonum A B C, D E F intercepta diametrorum ſegmenta B G, E H, (quæ & ſolidarum portionum axes vocantur ab Archimede) quibus productis vſque ad earum centra Q, R, habeat ſegmentum G B ad ſemi-diametrum B Q, eandem rationem, ac ſegmentum H E ad ſemi-diametrum E R. Dico in vtraque harum figurarum, portiones ſolidas, vel ſolida Acuminata A B C, D E F eſſe Acuminata ſolida proportionalia.

a 69. h.
b ex 12. Arch. de Conoid.
c 1. Schol. 69. h.
d 3. vnd. Elem.
e ex 14. & 15. Archim. ib.

Diuiſis enim ipſorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque in I, L, ductiſque per I, L planis M N, O P ipſis baſibus A C, D F æquidiſtantibus, erit ſectio M N in ſolido A B C ſimilis *f* baſi A C, & ſectio O P in ſolido D E F ſimilis baſi D F, & earum communes ſectiones cum planis Acuminatis A B C, D E F erunt rectæ M N, O P ipſis A C, D F parallelæ *g* vtraque vtrique, eruntque homologæ diametri earundem ſimilium ſectionum.

f ex Coroll. 15. eiuſdem.
g 3. & 16. vnd. El.

Et quoniam, per conſtructionem, in Acuminatis planis A B C, D E F, Hyperbolarum, vt in tertia figura, aut Ellipſium, vt in quarta, ſegmenta diametrorum G B, E H ad proprias ſemi-diametros B Q, E R eandem habent rationem, erunt *h* ipſa Acuminata, plana Acuminata proportionalia; ſuntque B G, E H proportionaliter ſectæ in I, L, ex conſtructione, quare vt recta A C ad D F, ita recta M N ad O P (ex definitione planorum Acuminatorum proportionalium) & quadratum A C ad D F, hoc eſt circulus, vel *i* Ellipſis A C ad ſibi ſimilem D F, vt quadratum M N ad O P, vel vt circulus, aut Ellipſis M N ad ſibi ſimilem O P, & hoc ſemper vbicunque

h 36. h.
i ex coroll. ſept. Arch. de Conoid.

 axes

axes B G, E H solidarum portionum sint proportionaliter secti: quare, ex definitione, ipsæ solidæ portiones A B C, D E F erunt solida Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonstrandum erat.

COROLL.

HInc manifestum fit solidas portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones sint æquales, inter se esse Acuminata solida proportionalia.

Nam quò ad portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, iam in prima parte huius propositionis ostensum est eas omnes, quæcunque sint, esse solida Acuminata proportionalia, ac ideò, & illæ quarum recti Canones sint æquales, erunt pariter solida Acuminata proportionalia.

Quò autem ad solidas portiones eiusdem Conoidis Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati; quandò earum portiones genitricium sectionum ad plana basium rectæ (quæ eædem sunt, ac recti Canones) fuerint æquales patet ex prop. 63. huius, segmenta diametrorum ipsarum ad proprias semi-diametros, vnam, eandemque simul rationem habere, ac propterea ex ijs, quæ in hac vltimò loco demonstrauimus, huiusmodi solidæ portiones erunt Acuminata solida proportionalia.

THEOR. XLIV. PROP. LXXI.

Cylindrici æqualium altitudinum, inter se sunt vt bases.

SInt duo Cylindrici A, B, quorum bases sint plana Acuminata C D E, F G H, altitudines verò, sint æquales cuidam rectæ I. Dico Cylindricum A ad Cylindricum B, esse vt basis C D E ad basim F G H.

Concipiatur alius quicunque Cylindricus L, cuius basis sit parallelogrammum K T, altitudo verò sit eadem I: quod erit parallepipedum. Ostendam priùs Cylindricum A ad parallelepipedum, vel Cylindricum L esse vt basis C D E ad basim K T.

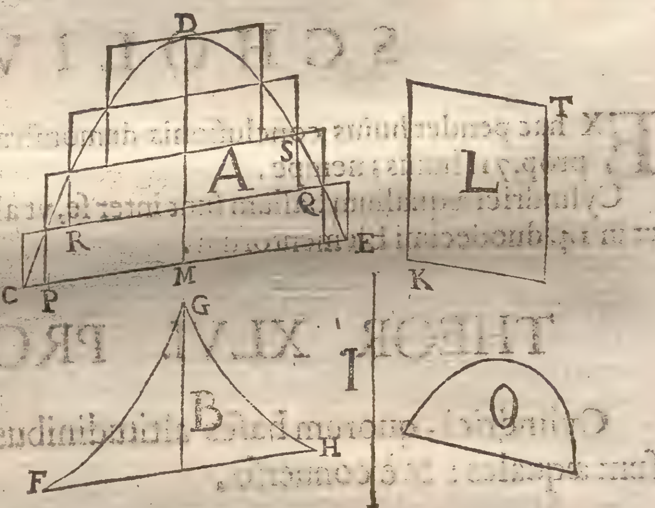
Nam si non est ita, erit basis C D E, vel maior, vel minor quàm sit opus, ad hoc vt ad basim K T habeat eandem rationem, ac Cylindricus A ad L. Esto primùm maior, sitque excessus O. Et cum Acuminatum C D E sit figura circa diametrum D M ad partem D deficiens, & cuius perimeter est ad eandem partem cauus, poterit, vsitata methodo, per continuam diametri D M bisectionem, inscribi Acuminato C D E figura ex parallelogrammis, ita vt ipsum Acuminatum superet inscriptam minori excessu, quàm sit O; sit ergo hæc inscripta P Q, R S, &c. Itaque cum Acuminatum C D E superet inscriptam P Q, R S, &c. minori quantitate O, erit inscripta adhuc maior, quam opus est ad hoc, vt ad basim K T sit vt Cylindricus A ad Cylindricum L.

Iam intra Cylindricum A super omnia inscriptæ figuræ parallelogramma

ma P Q, R S, &c, concipiantur descripta solida parallelepipeda æqualium altitudinum cum Cylindrico A, vel L; & quorum insistentes lineæ sint æquidistantes insistentibus Cylindrici A, &c. erit ergo vnumquodque parallelepipedorum inscriptorum, ad parallelepipedum L, [a] vt propria basis ad basim, ac ideò omnia simul inscripta super P Q, R S, &c. ad vnicum parallelepipedum, vel Cylindricum L, erunt vt omnes bases P Q, R S, &c. hoc est vt figura inscripta ad basim R T; sed inscripta ad K T maiorem habet rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo, & omnia simul parallelepipeda inscripta, ad Cylindricum L maiorem habebunt rationem, quàm Cylindricus A circumscriptus ad eundem Cylindricum L, ergo inscripta simul parallelepipeda maiora erunt Cylindrico A, pars suo toto, quod est absurdū: non est ergo basis C D E maior quàm opus est ad hoc vt ad basim K T sit vt Cylindricus A ad L.

[a] 32. vnd. Elem.

Si verò ponatur basim C D E ad K T habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, erit basis C D E minor quàm opus est ad hoc vt huiusmodi magnitudines sint proportionales, inuento igitur defectu, &c. & facta basi C D E circumscriptione figuræ ex parallelogrammis, &c. quæ ad basim K T adhuc minorē habeat rationem quàm Cylindricus A ad L, & circumscriptis parallelepipedis vt supra, ostendetur aggregatum circumscriptorum parallelepipedorum ad Cylindricum L esse vt figura circumscripta ab basim K T, hoc est habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad eundem Cylindricum L, ideoque prædictum aggregatum parallelepipedorum minus esse Cylindrico A, totum sua parte, quod est absurdum. Non ergo basis C ad K T habet maiorem, nec minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo erit basis C D E ad basim K T, vt Cylindricus A ad L. Eadem ratione demonstrabitur, basim K T ad Acuminatum F G H, siue ad basim Cylindrici B, esse vt Cylindricus L ad Cylindricum B; quare, ex æquo, erit vt basis C D E ad basim F G H, ita Cylindricus A ad Cylindricum B. Quod erat, &c.



COROLL.

Perspicuum hinc est, quod si huiusmodi Cylindrici æqualiū altitudinum æquales bases habuerint inter se æquales erunt.

THEO-

THEOR. XLV. PROP. LXXII.

Si Cylindricus plano ſecetur baſi æquidiſtante, erit Cylindricus ad Cylindricum, vt altitudo ad altitudinem.

HOc eadem penitus conſtructione, ijſdemque argumentis demonſtrabitur, ac 13. duodecimi Elem. ope tamen præcedentis Corollarij; animaduertendo ſimul, quod dum Cylindricus plano ſecatur baſi æquidiſtante, in ipſa ſectione oritur figura ſimilis, & æqualis, ſiue in totum congruens baſi Cylindrici: nam ipſæ Cylindricus, ex motu parallelo ſuæ baſis procreari concipitur, ex definitione, &c.

SCHOLIVM.

EX hac pendet huius concluſionis demonſtratio, quod eſt conuerſum prop.71. huius; nempe.

Cylindrici æqualium baſium ſunt inter ſe, vt altitudines; quod oſtenditur vt in 14. duodecimi Elementorum.

THEOR. XLVI. PROP. LXXIII.

Cylindrici, quorum baſes altitudinibus reciprocantur, inter ſe ſunt æquales: & è conuerſo.

HVius Theorematis demonſtratio elicitur ex præcedenti, eſtque omninò ſimilis 15. duodec. Element. itaque breuitatis gratia, hanc ipſam o mittimus, ſimulque nonnullas alias Cylindricorum affectiones, cum hìc de ijs diſſerere non ſit opus.

THEOR. XLVII. PROP. LXXIV.

Solida Acuminata proportionalia, quorum baſes altitudinibus ſint reciprocè proportionales inter ſe ſunt æqualia.

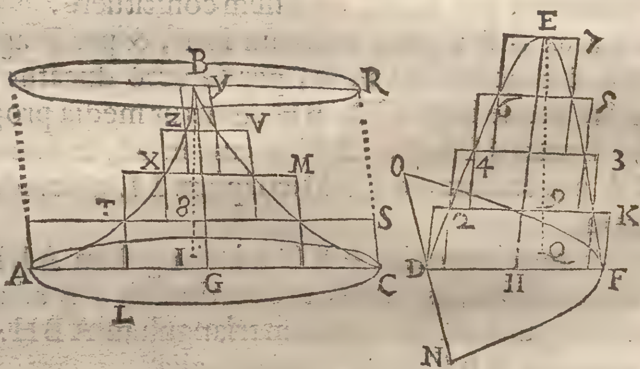
SInt duo Acuminata ſolida proportionalia, quorum Canones ABC, DEF ſint ſuper baſes AC, DF, & circa diametros BG, EH; baſes verò horum ſolidorum ſint Acuminata plana ALC, NFO circa diametros AC, DF, ſitque vnius ſolidi altitudo BI, ad alterius altitudinem EQ reciprocè, vt baſis NFO ad baſim ALC. Dico huiuſmodi ſolida inter ſe æqualia eſſe.

Si enim

Si enim fuerint inæqualia, alterum ipsorum minus erit: sit ipsum A B C, quod cum sit ad partem B deficiens, patet ei circumscribi posse per continuam axis B G bisectionem, &c. figuram ex Cylindris æque-altis, quæ inscriptum solidum Acuminatum A B C superet minori excessu, quo solidum D E F dicitur excedere idem solidum Acuminatum A B C: (sufficit enim vt circumscripto Canoni A B C parallelogrammo A R, eius ope, tanquam circa diametralem Canonem, ad æquidistantem motum basis A L C describatur Cylindricus A R, vt vides, circumscribens Acuminatum solidum A B C, sic enim plano per punctum medium axis B G applicato, bifariam [a] secabitur Cylindricus, quod si iterum axis dimidium bifariam secetur, &c. relinquetur tandem Cylindricus A S, qui prædicto excessu minor erit: vnde hac vltima diametri B G diuisione per æqualia segmenta, completa circumscriptione Cylindricorum T M, X V, Z Y æqualium altitudinum, quorum diametrales Canones sint A S; T M; X V; X Y; aggregatum ipsorum excedet solidum A B C minori quantitate, quàm sit primus Cylindricus A S, cum A S sit semper excessus circumscriptæ figuræ ex Cylindricis super inscriptam ex æque-altis Cylindricis, &c. sed Cylindricus A S ponitur minor excessu solidi D E F super A B C, ergo circumscripta figura A S M Y ex Cylindricis, superat inscriptum solidum A B C minori excessu ipsius solidi D E F supra A B C) sit ergo quęsita figura circumscripta, ex Cylindricis A S, T M, X V, Z Y; &c. quæ ideò adhuc minor erit solido D E F, cui eadem arte circumscribatur figura ex totidem æque-altis Cylindricis D K; 2 3; 4 5; 6 7; quorum maximi, diametralis Canon sit D K super basim O F N; proximi verò diametralis Canon sit 2 3, &c.

a 72. h.

Iam patet horum solidorum altitudines B I, E Q in tot æquas partes secari à parallelis basibus circumscriptorum Cylindricorum, in quot [b] secatur diametri B G, E H, Canonum A B C, D E F. Sit igitur primi Cylindrici A S altitudo 8 I, & primi D K altitudo 9 Q: & cum sit basis A L C, ad basim O F N, ita reciprocè altitudo E Q ad altitudinem B I, sumptis consequentium æque-submultiplicibus 9 Q, 8 I; erit basis A L C, ad O F N, vt altitudo 9 Q, ad 8 I; quare Cylindricus A S æqualis erit [c] Cylindrico D K. Eadem ratione demonstrabuntur reliqua Cylindrica T M, X V, Z Y, reliquis 2 3, 4 5, 6 7, æqualia esse, singula singulis, quapropter vniuersa figura ex Cylindricis, circumscripta solido A B C, æqualis erit vniuersæ circumscriptæ solido D E F, sed circumscripta ipsi A B C demonstrata est minor solido D E F, ergo, & circumscripta solido D E F, ipso sibi inscripto solido minor erit, totum sua parte, quod est absurdum. Non est ergo vllum horum Acuminatorum



b 17. vnd. Elem.

c 73. h.

rum

rum altero maius: quare omnino inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

NOn paucas alias solidorum Acuminatorum, eorumque truncorum proprietates (quales nimirum attigimus de planis, & mensalibus Acuminatis in Scholio propos. 37. huius) facilè huc esset, si locus requireret, ex superioribus afferre: verùm ad opportuniorem occasionem hæc omnia, aliaque fusius forsan pertractabimus, si Deo nobis valetudinem cum vita, vel saltem mitiorem ægritudinem præstare placuerit. Modò ad inuentionem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE solidarum portionum accedamus, nonnullis adhuc præostensis.

LEMMA XIV. PROP. LXXV.

Datæ portioni anguli rectilinei, circa diuersam diametrum datam, æqualem portionem constituere.

ESto ex angulo rectilineo abscissa portio ABC, cuius basis AC, diameter verò BD; sitque data alia diameter BE, circa quam oporteat portionem ipsi ABC æqualem constituere.

Latus AB secetur bifariam in F, & per F agatur FG parallela ad BC cum BE occurrens in G, per G verò ducatur AGH ipsam BC secans in H, atque inter CB, BH sumatur media proportionalis BI agaturque per I recta IL basim AC secans in M, & datam diametrum BE in N, & BA productam, in L. Dico ipsam IL abscindere LBI portionem quæsitam.

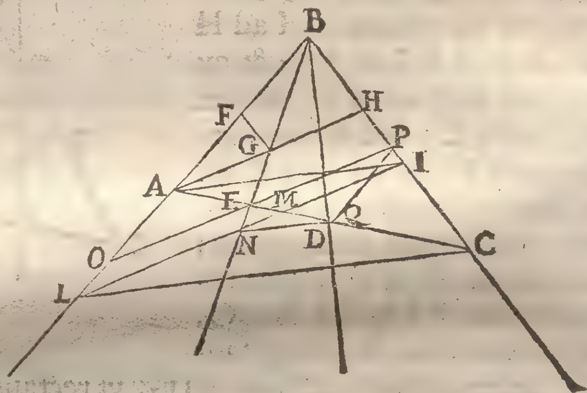
Triangulum enim ABC ad triangulum ABH est vt basis CB ad BH, vel vt quadratum mediæ proportionalis IB ad quadratum tertiæ BH, vel vt triangulum LBI ad idem triangulum ABH: (ob similitudinem) quare triangula ABC, LBI sunt æqualia.

Et cum rectæ LI, AH simul æquidistent, secenturque ab eadem BN ex vertice B trianguli LBI ducta, erit LN ad NI, vt AG ad GH, vel vt AF ad FB (ob parallelas FG, BH) sed est AF ipsi FB æqualis (per constructionem) ergo, & LN ipsi NI æqualis erit. Itaque ad datam diametrum BN, in angulo ABC ordinatim applicata est LI abscindens triangulum, vel portionem LBI alteri datæ portioni ABC æqualem. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

His peractis, patet bases A C, I L æqualium portionum de eodem angulo A B C necessariò se mutuò secare intra angulum. Nam I M, quæ ex puncto I inter H, & C sumpto æquidistans ducitur rectæ A H necessariò occurrit cum A C, vt in M.

Dico ampliùs earum basium occursum M cadere omninò inter diametros B D, B E; hoc est inter puncta E, D; atque rectas ND, A I, L C harũ basim tùm puncta media, tùm extrema iungẽtes esse inter se parallelas.



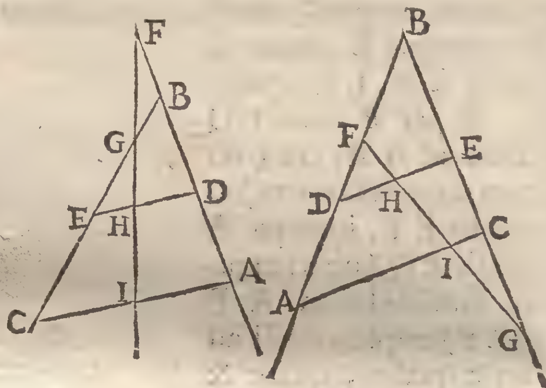
Si enim per E agatur O E P ipsis A H, L I æquidistans, & per P recta P Q parallela ad A B, erit (ob ipsarum æquidistantiam) O E æqualis E P, itemque A E ęqualis E Q (ob triangulorum similitudinem A E O, Q E P) atque anguli ad E sunt æquales, quare & ipsa triangula ęqualia erunt, quibus communi addito trapetio A B P E, fiet triangulum O B P æquale mensali A B P Q, hoc est minus triangulo A B C, vel triangulo L B I, quare L I est infra æquidistantem basim O P, siue basis L I secat basim A C vltra E, versus D. Præterea cum sit C B ad B I, [a] vt C I ad I H, vel vt C M ad ad M A, sitque C B maior B I erit C M maior M A, hoc est punctum M cadet vltra D, versus E. Itaque harum basium occursus est inter diametros B N, B D. Quod idem est, ac si dicatur nullam ipsarum basium transire per medium punctum alterius.

[a] Coroll. 12. primi huius.

Tandem cum triangula A B C, L B I sint æqualia, dempto communi triangulo A B I, remanebit triangulum A C I ęquale triangulo A L I, suntque super eadem basi A I, quare A I ipsi L C æquidistabit; & cum inter parallelas A I, L C interceptæ sint duæ C A, L I proportionaliter sectæ in N, D, (ibi enim bifariam sectæ sunt ex hypothesi) erit quoque iuncta N D ipsi L C, vel A I æquidistans; vt patet ex Elementis.

LEMMA XV. PROP. LXXVI.

Si in angulo ABC applicatæ fuerint quotcunque rectæ lineæ AC, DE, &c. inter se parallelæ; quæ a quacunque alia recta F G vtrique lateri dati anguli occurrente in F, G, secentur in H, I, &c. Dico vt rectangulum FHG ad DHE, ita esse rectangulum FIG, ad AIC.



Etenim ratio rectanguli F H G ad D H E, componitur ex ratione F H ad H D, siue ex F I ad I A; & ex ratione GH ad H E, siue ex G I ad I C; sed & ratio rectanguli F I G ad A I C ex ijsdem rationibus componitur, quapropter rectangulum F H G ad D H E, est vt rectangulum F I G ad A I C. Quod erat, &c. Et permutando, rectangulum FHG ad FIG, vt rectangulum DHE ad AIC.

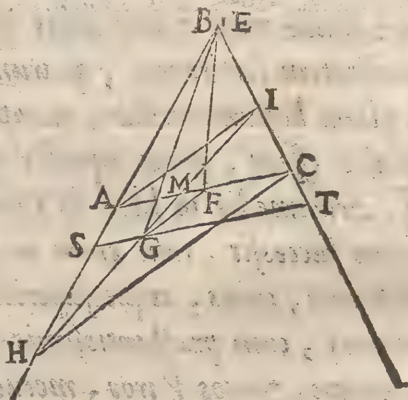
THEOR. XLVIII. PROP. LXXVII.

Si fuerint duæ æquales portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & ex puncto medio basis vnius portionis applicata sit in angulo, vel sectione quædam recta linea basi alterius portionis æquidistans: rectangulum sub segmentis huius applicatæ æquabitur quadrato semi-basis eiusdem portionis, cui hæc ipsa applicata æquidistanter ducta fuit.

Sint de eodem angulo, vt in præsenti figura, vel de quacunque coni-sectione, vt in figuris tertij Schematismi, abscissæ duæ æquales portiones ABC, HEI (vti docuimus in præcedenti, atque ex quadragesima huius absolui posse elicitur) quarum diametri sint B F, E G bases verò sint A C, H I ab ipsis diametris bifariam sectæ in F, G. Iam [a] patet has bases omninò se mutuò secare, atque inter portionum diametros vt in M, siue, punctum earum occursus M differre à punctis medijs F, G. Itaque si per alterum ipsorum, vtputa per G puncto medio basis HI, applicetur in angulo, vel sectione recta SGT parallela alteri basi AC, hæc omnino ad vtranque partem cum anguli lateribus, vel cum sectione conueniet, cum ipsa sit vna applicatarum ad diametrum BF. Occurrat ergo in S, T: Dico rectangulum SGT quadrato dimidiæ basis AC, siue quadrato F C æquale esse.

[a] Schol. 75. h. & per 1. Coroll. 40. h.

Iun-



Iunctis enim rectis A I, G F, H C: patet has inter se a æquidistare, ac ideò ipsas proportionaliter diuidere rectas H G M I, C F M A inter eas interceptas in punctis G, F, M. Erit ergo, in singulis figuris, quadratum H G ad quadratum G M, vt quadratum C F ad quadratum F M, & permutando quadratum H G ad quadratum C F, vt quadratum G M ad F M: sed, in præsenti figura, est quadratum H G æquale rectangulo H M I vnà cum quadrato G M, & quadratum C F æquatur rectangulo C M A vnà cum quadrato F M, (cum rectæ H I, A C bifariam sectæ sint in G & F, & non bifariam in M) atque est totum quadratum H G ad totum C F vt pars ad partem, vel vt quadratum G M ad F M, ergo reliquum ad reliquum, nempe rectangulum H M I ad C M A, vel b rectangulum H G I ad T G S erit vt totum ad totum, siue vt quadratum H G ad quadratum C F, sed antecedentia sunt æqualia, hoc est rectangulum H G I, & quadratum H G, cum sit recta H G æqualis G I, ergo, & consequentia æqualia erunt, nempe rectangulum T G S, & quadratum C F. Quod in anguli portionibus demonstrandum erat.

a ibidem.

b 76. h.

In reliquis autem figuris iam dicti tertij Schematismi, est rectangulum H G I ad rectangulum T G S, vt quadratum c contingentis E N ipsi H I parallelæ ad quadratum contingentis B N alteri A C æquidistantis, vel vt quadratum G M ad M F (nam ibi primo loco ostensum fuit in singulis esse E N ad N B, vt G M ad M F (vel ob parallelas A I, F G, C H, vt quadratum H G ad quadratum C F, atque antecedentia sunt æqualia, nempe rectangulum H G I quadrato H G, cum recta H G sit æqualis rectæ G I, ergo, & consequentia, siue rectangulum T G S quadrato C F æquale erit. Quod omnino ostendere propositum fuit.

c 17. tertij Conic.

MONITVM.

CVM ad abscindendas MAXIMAS, & MINIMAS coni-sectionum portiones per punctum in ijs datum, animaduertissemus olim præmittendam esse inuestigationem æqualium portionum eiusdem coni-sectionis, quas deinde pro quacunque coni-sectione reperimus, atque vnica demonstratione confirmauimus, (vt visum est in 40. huius, ac simul vt in 45. eas omnes proprijs basibus similem, & concentricam eiusdem nominis sectionem contingere) ita dum MAXIMAS, ac MINIMAS Conorum, aut Conoidalium, vel Sphæroidalium solidorum portiones nobis duximus inquirendum, necesse fuit prius contemplari, quæ nam eiusdem Coni recti,

vel Conoidis, siue Sphæræ, aut Sphæroidis portiones inter se æquales essent: vnde mox venit nobis in animum perpendendi, an illæ inter se æqualitatem sortirentur, quarum portiones planæ genitricium sectionum ad plana basium erectæ, nempe quarum recti Canones inter se pariter æquales essent, prout æquales inspexeramus in Conoide Parabolico, ex 25. Archimedis in libro de Conoid. & Sphæroid. Res quidem ex cogitatione successit, tunc enim in sequentem vniuersalem demonstrationem incidimus, cuius, atque superioris quadragesimæ propositionis, solæ enunciationes, cum præstantissimis Geometris, Galileo, ac Torricellio communicatæ, tantos Viros, meruerunt habere laudatores.

THEOR. IL. PROP. LXXVIII.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones sint æquales, inter se quoq; æquales sunt.

ESto Coni recti, vt in prima figura, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, vt in secunda, quorum axis BD, quælibet sectio per axem ABC, quæ erit [a] genitrix dati solidi, à qua demantur duæ æquales portiones planæ ABC, EFG (hoc autem fieri posse manifestum iam [b] est) quarum bases sint AC, EG bifariam sectæ in H, I, & ipsarum altera AC sit axi perpendicularis, altera verò vtcunque inclinata; & per eas concipiantur duci plana ALC, EMG ad planum per axem ABC erecta, auferentia portiones solidas ABC, EFG, quarum recti Canones erunt ipsæ portiones planæ ABC, EFG: patet sectionem ALC circulum esse, [c] cuius diameter AC, centrum H, atque EMG esse Ellipsim, cuius axis maior, in Cono, vel in Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, atque in Sphæroide oblongo, erit ipsa basis EG, sed in prolato erit [d] minor axis, vbique autem centrum I. Dico huiusmodi solidas portiones ABC, EFG inter se æquales esse.

a 12. Archim. de Conoid.
b ex 40. & ex 75. h.
c ex 1. primi huius, & ex 12. 13. 14. 15. Archim. de Conoid. &c.
d ibidem.

Secetur iterum datum solidum ABC, plano per punctum I transeunte, & ad axem BD erecto, siue plano ALC æquidistanti, quod in solido efficiet [e] pariter circulum NMO, cuius centrum P in axe, & diameter NO, quæ ipsi AC [f] æquidistabit, communis autem sectio recti plani NMO, cum alio plano EMG, erit [g] recta MI, quæ quidem recta erit [h] ad planum per axem ABC (cum ea sit communis sectio duorum planorum ad idem planum per axem erectorum) ideoque tùm ad circuli diametrum NO, tum ad EG axem Ellipsis, erit perpendicularis, & in Cono, aut Conoide, vel Sphæroide oblongo erit semi-axis minor, in prolato verò semiaxis maior. Et quoniam MI ad diametrum NO semi-circuli NMO est perpendicularis, erit quadratum MI çquale rectangulo NIO, sed & quadratum

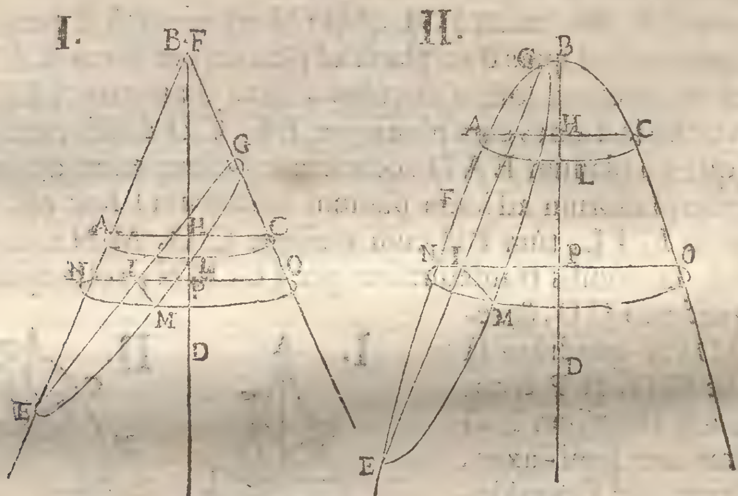
e 12. ibid.
f 16. Vnd. Elem.
g 3. ibid.
h 19. ibid.

dratum AH eidem rectangulo NIO est æquale, cum sit NIO *a* parallela ad AC, & per I punctum medium basis EG ducta, &c. ergo, & quadratum MI ipsi AH, seu linea MI lineæ AH æqualis erit, sed Ellipsis EMG ad circulum ALC est vt *b* rectangulum sub GI, & IM ad quadratum ex AH, vel vt linea GI ad AH (ob communem altitudinem MI) vel sumptis duplis, vt EG ad AC, ergo basis portionis solidę EFG, ad basim portionis solidę ABC, est vt EG basis Canonis EFG, ad AC basim Canonis ABC; verùm vt EG ad AC, ita *c* est reciprocè altitudo Canonis

a 77. h.

b ex 6. Archim. de Conoid.

c 65. h.



ABC ad altitudinem Canonis EFG (cum ipsi Canones ęquales facti sint) atque Canonum altitudines eædem sunt *d* cum altitudinibus solidarum portionum, vnde basis EMG ad basim ALC erit reciprocè, vt altitudo solidæ portionis ABC ad altitudinem solidæ EFG: hæ autem portiones sunt solida *e* Acuminata proportionalia, eò quod ipsarum Canones sint æquales, atque bases altitudinibus sunt reciprocæ, ergo huiusmodi portiones solidæ ABC, EFG sunt *f* æquales. Quod demonstrandum erat.

d 3. Schol. 69. h.

e Coroll. 70. h.

f 74. h.

Sed hoc idem, tribus proximè præcedentibus propositionibus omissis, super nouo diagrammate sic ostendere conabimur

ALITER.

SIt Conus rectus, vt in prima figura, vel aliud quodcunque prædictorum solidorum, vt in secunda, circa axim AB, & sectio per axim sit EAD, quæ genitrix erit *g* dati solidi, à qua demptæ sint duæ quælibet portiones planæ æquales CAD, EAF, quarum bases sint CD, EF, & per ipsas ducantur plana secantia data solida, & ad ipsum planum per axem EAD erecta, circulos, vel *h* Ellipses EOF, CPD describentia (quarum maiores axes in Cono, Conoide Parabolico, Hyperbolico, & Sphæroide oblongo

g ex 12. Archim. de Conoid. &c.

h ex prima primi huius, & ex 13. 14. 15. Arch. de Conoid. &c.

a ibidem. longo erunt *a* ipsę CD, EF, in prolato verò erunt axes minores) auferentiaque solidas portiones CAD, EAF, quarum recti Canones erunt ipsæ æquales portiones planæ CAD, EAF. Dico tales portiones solidas inter se æquales esse.

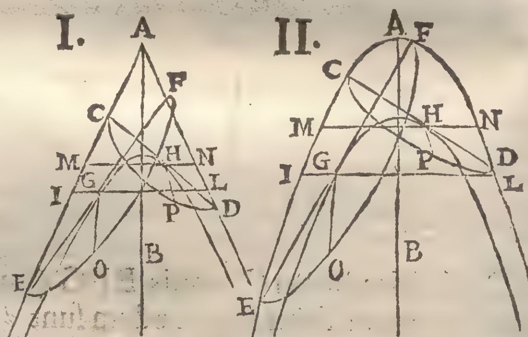
Nam bifariam sectis EF in G, & CD in H, patet puncta G, H esse centra circulorum, siue Ellipsium EOF, CPD; & si per punctum G describatur *b* in vtraque figura eiusdem nominis Coni-sectio GH, quę similis sit, & concentrica sectioni EAD, & qualis in Monito post 68. h. definiuimus; patet inquam ipsam sectionem GH omnino transire per H, simulque EF, & CD in punctis medijs G, H *c* contingere.

b 4. sec. Conic. & 5. 6. 7. primi huius.

c 68. h.

Iam ductis per G, H, rectis IGL, MHN ad axem AB perpendicularibus, concipiantur per ipsas duci plana ad planum per axem EAD erecta, quæ efficient in exteriori solido circulos *d* circa diametros IL, MN, & communes eorum sectiones cum planis per EF, CD ductis, erunt *e* rectæ GO, HP, quæ ad planum EAD rectæ erunt *f* (sunt enim communes sectiones duorum planorum ad idem planum erectorum) hoc est, tùm OG cum vtrisque EF, IL, tùm PH cum vtrisque CD, MN rectos efficiet angulos; vnde in circulis transeuntibus per IL, MN, rectangulum IGL æquabitur quadrato GO, & rectangulum MHN quadrato HP, atque ipsæ GO, HP erunt circulorum, aut Ellipsium EOF, CPD minores semi-axes, in Cono tamen, vel Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, vel in Sphæroide oblongo; nam in prolato, erunt maiores semi-axes: sed rectangula IGL, MHN sunt *g* æqualia, vtrunque enim æquatur quadrato semi-tangentis per verticem interioris sectionis, &c. ergo, & quadrato GO, HP æqualia erunt, siue semi-axis GO æqualis semi-axi HP; sed circulus, aut Ellipsis EOF ad CPD, est vt *h* rectangulum sub EF, GO, ad rectangulum sub CD, HP, & rectangulum sub EF, GO ad rectangulum sub CD, HP est vt EF ad CD (cum eorum latitudines GO, HP sint æquales) ergo circulus, vel Ellipsis EOF ad CPD erit in solido Parabolico, vel Hyperbolico, aut Sphæroide oblongo, vt maior axis EF ad maiorem axim CD, vel in Sphæroide prolato, vt minor axis EF ad minorem CD: sed EF ad CD est *i* vt altitudo Canonis CAD, ad altitudinem Canonis EAF, cum ipsi sint æquales portiones eiusdem coni-sectionis, & horum Canonum altitudines sunt *l* eædem, ac altitudines solidarum portionum CAD, EAF, quare circulus, vel Ellipsis EOF ad CPD, erit reciprocè vt altitudo solidæ portionis CAD, ad altitudinem solidæ EAF: at huiusmodi portiones sunt *m* solida Acuminata proportionalia, & ipsorum bases altitudinibus reciprocantur, ergo ipsæ solidæ portiones inter se sunt *n* æquales. Quod erat demonstrandum.

d 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c.
e 3. vnd. Elem.
f 19. ibid.



g 3. Coroll. 46. h.

h 7. Arch. de Conoid. &c.

i 65. h.

l 3. Schol. 69. h.

m Coroll. 70. h.

n 74. h.

CO-

COROLL. I.

HInc colligitur, quod puncta media rectarum quarumlibet applicatarum in sectione per axem ducta, cuiuscunque prædictorum solidorũ, sunt centra basium earum portionum solidarum à planis per easdem rectas ductis, atque ad eandem sectionem per axem erectis abscissarum.

Nam puncta media G, H, applicatarum E F, C D demonstrata sunt esse centra prædictarum basium E O F, C P D, &c.

COROLL. II.

PErspicuum est quoque, bases solidarum portionum inter se æqualium eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphęræ, aut Sphæroidis oblongi, habere inter se axes minores æquales, siue esse æqualium latitudinum, ac ideò esse inter se, vt axes maiores, vel vt bases rectorum Canonum. Bases verò æqualium portionum eiusdem Sphæroidis prolati habere maiores axes æquales, ac propterea esse inter se vt axes minores, vel vt bases eorundem rectorum Canonum.

Etenim, in pręcedentibus figuris, de basibus E O F, C P D (vel sint Circuli, vel Ellipses) portionum solidarum E A F, C A D, quas æquales esse demonstrauimus, ostensum priùs fuit semi- axes minores G O, H P in Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide oblongo esse æquales, ac ideò, & eorum duplos, hoc est integros minores axes æquales esse; & paulò post circulum, vel Ellipsim E O F ad C P D esse vt maior axis E F ad maiorem C D, vel vt basis recti Canonis E A F, ad basim recti Canonis C A D. In Sphæroide autem prolato demonstratum est ipsas G O, H P maiores semiaxes, item æquales esse, siue integros maiores axes æquales, & postea circulos, vel Ellipses E O F, C B D habere inter se eandem rationem, ac ipsi minores axes E F, C D; nimirum esse inter se, vt sunt bases rectorum Canonum E A F, C A D.

THEOR. L. PROP. LXXIX.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuscunque Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis tunc æquales sunt, qnando, in Cono, portionum axes pertingant ad idem Conoides Hyperbolicum concentricum, &c. In Conoide verò Parabolico, quando portionum axes sint æquales. At in Conoide Hyperbolico, Sphæra, aut quocunque Sphæroide, quando portionum axes, ad proprias semi- diametros iisdem axibus in directum positas, sint in vna eademque ratione.

ETenim quandò in portionibus eiusdem cuiuscunque prædictorum solidorum diametri rectorum Canonum habuerint relatiuè conditiones

superiùs

superiùs allatas, ipsi Canones recti, qui iam sunt portiones, vel anguli, vel coni-sectionis, aut circuli, æquales iam sunt ostensi, vti de anguli portionibus patet ex prima parte 45. huius, pro reliquis autem Coni-sectionibus, &c. ex 40. sed dum huiusmodi Canones recti sunt æquales, & portiones solidæ demonstrantur æquales, ex superiori Theoremate, suntque rectorum Canonum diametri [a] eædem, ac axes solidarum, quare, & dum diametri rectorum Canonum, siue dum axes solidarum portionum respectiuè seruabunt, quod modò exposuimus, ipsæ portiones solidæ æquales erunt. Quod erat, &c.

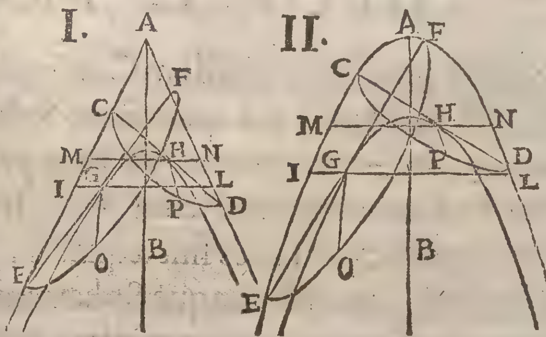
a 3. Schol. 69. h.

Itaque prop. 25. præcitati libri Archimedis, quæ solùm de portionibus Conoidis Parabolici differit, supposita etiam proportione Conoidis ad sibi inscriptum Conum, nobis hìc est præsens Theorema, quod generaliter proponit ea, quæ ad cognitionem faciunt æqualium portionum, cuiuslibet simul prædictorum solidorum, atque ipsa diuersa ratiocinatione confirmat, nulla habita ratione proportionis, quæ cadit inter solidas portiones, & inscriptos Conos, aut circumscriptos Cylindros.

THEOR. LI. PROP. LXXX.

Omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum bases contingant eandem similis, & inscripti concentrici solidi superficiem, inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt.

Repetito secundo Schemate præcedentis 78. ijsdemque positis, quæ ibi, si concipiantur figuræ conuerti circa axim A B, procreabitur denuò à sectione E A F datum solidum, & à sectione G H inscriptum simile solidum concentricum. Ampliùs si fuerint quotcunque rectæ E F, C D, &c. interiorem sectionem G H contingentes, per quas agantur plana E O F, C P D ad ipsas sectiones recta, hæc abscindent de exteriori solido portiones solidas E A F, C A D,



atque erunt earundem portionum bases, quæ concentrici solidi G H superficiem contingent [b] in ijsdem punctis G, H, in quibus rectæ E F, C D sectionem G H contingunt, quæ puncta, per iam demonstrata, sunt [c] centra ipsarum basium, sed huiusmodi portionum solidarum E A F, C A D, Canones

b 5. h.
c Coroll. 1. 78. h.

nones E A F, C A D (qui, ex constructione, sunt ad plana basium recti) sunt [a] æquales, ergo & ipsæ solidæ portiones æquales [b] erunt. Vnde omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet prædictorum solidorum, quarum bases contingant eiusdem similis, & concentrici solidi superficiem inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt. Quod ostendere propositum fuerat; quodque Cl. Tor. inter proprios pugillares geometricos regerere non est dedignatus: animo, vt opinari libet, huiusce haud iniucundi Theorematis, à me ipsi tantummodo expositi demonstrationem inquirendi, quam postea solùm de Coni portionibus nactus fuit, vel potiùs circa ipsas tantùm placuit ei meditari: eminentissimi enim, ac propè diuini ingenij Vir, & de aliorum solidorum portionibus feliciùs quàm à nobis superiùs factum sit, hoc idem reperisset, si tantillùm excogitasset: verùm proprias, ac ideò sublimiores contemplationes affectans, ab his nugis meis fortasse se abstinuit,

a 45. h.
b 78. h.

SCHOLIVM.

HIc autem animaduertendum est, quod nihil refert vtrùm bases, huiusmodi portionum solidarum inscriptum solidum concentricum contingant ad puncta eiusdem sectionis solidum genitricis, vel diuersarum: nam omnes genitrices sectiones eiusdem solidi concentrici, se mutuò secant in eodem vertice axis reuolutionis prædicti solidi; sed omnes portiones solidæ exterioris, quæ quamlibet solidi interioris genitricem sectionem per centra earum basium contingunt, æquales ostendi possunt per superiorem prop. 78. eidem tertiæ portioni solidæ ab ipso exteriori solido abscissæ, ei nempe, cuius basis transiens per axis verticem ad eundem axim sit recta, circulum in sectione efficiens; ergo omnes prædictæ portiones solidæ, vbicunque earum bases contingant superficiem similis, & concentrici inscripti solidi, inter se æquales erunt, cum tertiæ cuidam portioni sint æquales, &c.

THEOR. LII. PROP. LXXXI.

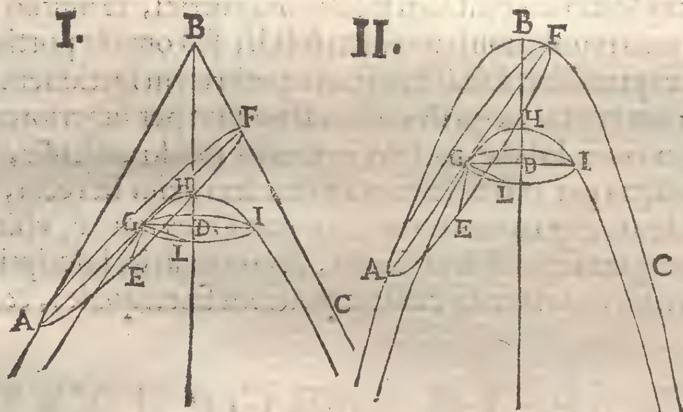
Si planum ductum per axem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati à quadam recta linea secetur, per quam ductum sit planum, quod ad planum per axem rectum sit: solidi portio, quæ per hoc planum abscinditur, MINIMA est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem rectam ductis abscissarum.

ESto quodlibet prædictorum solidorum A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, & planum per axem ductum sit A B C vbicunque sectum à quadam recta A F, ad vtranque partem sectioni occurrente, per quam concipiatur duci planum A E F ad ipsum A B C rectum, portionem ex solido

abſcindens ABF, cuius baſis ſit AEF, & Canon rectus ABF. Dico hanc ſolidam portionem *MINIMAM* eſſe earum, quæ à quocunque alio plano per eandem AF ducto ex dato ſolido abſcindi poſſunt.

Diuidatur AF bifariam in G, & per G in plano per axem ABC deſcribatur [a] in prima figura (exhibente Conum) Hyperbole GHI, cuius aſymptoti ſint BA, BC; in ſecunda verò (quodcunque aliorum ſolidorum repræſentante) deſcribatur [b] coni-ſectio GHI ſimilis, & concentrica ſectioni ABC, quæ in vtraque figura omnino continget rectam AF in G, (nam ſi alia eſſet contingens per G ſectionem GHI, ipſa producta ad vtranque partem exteriori ſectioni ABC occurreret, ac bifariam ſecaretur [c] in G: vnde duæ applicatę per G in ſectione ABC ſe mutuò bifariam ſecarent, quod eſſet contra 26. ſec. Conic., quæ vnicuique coni-ſectioni inſeruit, licet de ſola Ellipſi, vel Circulo agat, ſed hoc idem, & pro angulo ſimul, aliter patet, ex primo Coroll. 68. h.) & concipiatur circa communem axim BDH ſectio GHI in gyrum conuerti: patet hanc deſcribere ſolidum GHI ſimile, & concentricum exteriori ABC; & cum recta AF contingat ſectionem GHI in G, & per AF ductum ſit planum AEF ipſi plano per axem GHI perpendiculare, hoc ipſum continget [d] concentrici ſolidi ſuperficiem in puncto G.

a 4. ſec. Conic.
b 5. 6. 7. primi h.
c Coroll. 45. h.
d 55. h.



Ponatur primò punctum G eſſe extra axis verticem H, & per G intelligatur duci planum GLI ad axem erectum, quod in ſolido GHI circulum efficiet [e] centrum habentem in axe, vt in D, & cuius communis ſectio cum plano per axem erit diameter GDI, cum alio autem plano AEF erit recta EG, quæ cum ſit communis ſectio duorum planorum ad planum ABC erectorum, erit ad idem planum [f] recta, ac ideo cum diametro GDI rectum conſtituet angulum EGI, ſiue ipſa EG in puncto tantùm G circulum continget.

e 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c.
f 19. vnd. Elem.

Iam intelligatur per AF aliud planum duci ad planum per axem ABC non erectum (ſed tale quod de exteriori ſolido aliam terminatam ſectionem abſcindat) cuius communis ſectio cum circuli plano diuerſa erit à linea GE (planum enim nunc ductum conuenit cum plano AEF per rectam tantùm AF.) Sit ipſa GL. Et quoniam GE rectos facit angulos cum GI, ipſa

GL

G L cum eadem G I haud rectos efficiet, vnde producta hinc inde ad alteram partem cadet intra circulum G L I, eius peripheriæ occurrens in L. Cum ergo G L sit tota intra circulum, circulus verò totus intra solidum, erit quoque G L tota intra solidum: quare planum, quod per A F, & G L ductum fuit, secabit omnino interius solidum G H I, de quo aliquam terminatam portionem abscindet (cum idem planum vndique productum de exteriori solido ponatur quoque portionem quandam auferre) cuius conuexa superficies tota erit intra portionem exterioris solidi ab eodem plano abscissam.

Si verò punctum G (quod nuper ostēsum fuit esse cōtactum plani per A F ducti, ad planum per axem A B C recti, cum interioris solidi G H I superficie) fuerit in ipso axis vertice H, vt in hac tertia figura, ostendetur etiam quodlibet aliud planum A L F per rectam A F ductum, sed ad planum per axem A B C inclinatum, quodque de exteriori solido aliquam portionem abscindat, omnino secare interius solidum, ideoque de ipso quandam portionem terminatam auferre.

Nam, in prædicto contingente plano A E F, ducta per G quacumq; recta G E cū G A quemlibet angulum constituente, & per rectam G E, ac per axim G D ducto alio plano, id in interiori solido describet genitricem [a] sectionem L G M, quam cōtinget in G recta G E eorundem planorum communis sectio, cum hæc ponatur esse in plano contingente vniuersam solid superficiem, sed planum inclinatum A L F vndiq; productum ad alteram partium, vtputa ad E, cadit infra contingens planum, cum eo commune habens tantum rectam A F, ergo & communis sectio ipsius plani inclinati cum sectione L G M, nempe recta G L cadet infra idem planum contingens, ac ideo infra rectam G E; sed G L, & G E sunt in plano L G M, atque G E ipsam sectionem contingit, vt modò ostendimus, quare G L, quæ cadit infra G E cadet omnino [b] intra sectionem L G M, siue intra solidum, ac propterea planum inclinatum, quod per A F, & G L ducitur, secabit omnino interius solidum, ac de ipso quandam terminatam portionem auferet, cum idem planum inclinatum ponatur de exteriori terminatam portionem abscindere.

a 12. Archim. de Conoid. &c.

b 32. primi conic.

Itaque, cum in vtroque casu demonstratum sit, planum inclinatum transiens per A F, & G L, de interiori solido G H I aliquam portionem secare, possibile [c] erit ipsi plano, hoc est basibus vtriusque portionis, aliud planum æquidistans ducere, quod interioris portionis superficiem contingat: quare si mente concipiatur iam hoc ductum esse, ac vndique productum, patet hoc ipsum planum contingens, de prædicta exteriori portione dempta à plano per A F, & G L ducto, aliam portionem abscindere, sed illa omninò minorem (pars enim suo toto minor est) at hęc minor portio æqualis est [d] portioni A B F abscissæ à plano, quod per A F ductum fuit ad planum per axem A B C rectum (vtraque enim talium portionum terminatur à planis basium,

c 69. h.

d ex Sch. Prop. 80. huius.

 eiusdem

eiusdem similis concentrici solidi superficiem contingentium) ergo, & portio ABF à prædicto plano recto abscissa, erit minor eadem portione, quæ dempta fuit à plano per AF, & GL ducto, siue à plano, quod in constructione per AF obliquè ductum fuit super planum per axem ABC: & hoc semper verum esse demonstrabitur, quodcunque sit planum inclinatum transiens per AF; ergo portio solida ABF, quæ ex dato solido à plano per AF ducto, & ad planum per axem ABC erecto abscinditur, *MINIMA* est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem AF ductis abscissarum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX eo, quod prope finem huius demonstratum est, elicitur, omnem portionem cuiuscunque prædictorum solidorum, cuius basis secet simile inscriptum solidum concentricum, maiorem esse qualibet alia portione de eodem exteriori solido, cuius basis contingat idem inscriptum solidum.

Ibi enim ostendimus prædictam exterioris solidi portionem, cuius basis secet inscriptum solidum, maiorem esse ea, cuius basis contingens idem inscriptum, simul sit parallela secanti basi; sed omnes portiones de eodem solido, quarum bases contingant idem simile inscriptum concentricum, inter se sunt [a] æquales: ergo patet propositum, &c.

[a] Propos. 80. h.

PROBL. XV. PROP. LXXXII.

Per datum punctum intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, siue Sphæram, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum, planum ducere, quod de solido abscindat portionem MINIMAM; atque in Sphæroide, vel Sphæra portionem MAXIMAM.

ESto quodlibet prædictorum solidorum ABC, cuius axis reuolutionis sit BD, ac datum vbicunque intra solidum sit punctum E: oportet per E planum ducere, quod ex dato solido abscindat portionem *MINIMAM*, atque ampliùs in Sphæroide, vel Sphæra, portionem *MAXIMAM*. Oportet autem si solidum fuerit Sphæroides, vel Sphæra, quod datum punctum non sit idem, ac centrum; tunc enim neque *MAXIMA*, neque *MINIMA* portio exhiberi posset, cum omnia plana per centra eorum solidorum ducta in duas æquas portiones dimidant ipsa solida; veluti in Ellipsi, vel circulo dum quærebatur *MAXIMA*, & *MINIMA* portio, necesse fuit datum punctum non esse in centro, cum rectæ omnes per ipsum ductæ, huiusmodi superficies bifariam secent, vt iam satis constat.

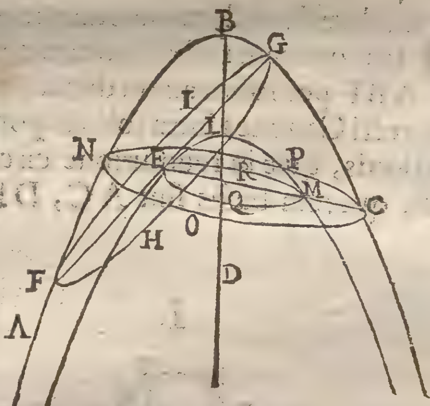
Secetur solidum plano per axem BD, ac per datum punctum E transeunte, efficienteque in solido [b] genitricem sectionem ABC, quæ indefinitè producatur, ac de ipsa per idem punctum E, cum recta FEG abscindatur

[b] 12. Archim. de Conoid. &c.

datur *a* *MINIMA* portio plana FBG, & per eandem FEG agatur planum FHGI, quod ad ductum per axem ABC rectum sit. Dico tale planum FHG quæsitum soluere, siue de dato solido auferre portionem solidam FBG *MINIMAM* omnium, quæ ex eodem solido à quibuslibet alijs planis, per idem punctum E ducibilibus, abscindi possunt. *a* 41.42.h.

Iam patet primò portionem FBG *MINIMAM* esse *b* aliarum portionum abscissarum à planis, transeuntibus quidem per rectam FG, ac ideo per datum punctum E, non autem rectis super planum per axem ABC. Verùm quod sit quoque *MINIMA* abscindendarum ab alijs planis non per rectam FG, sed omnino per punctum E ducibilibus, sic demonstrabitur. *b* 81.h.

In plano enim per axem ABC descripta per punctum E (quod bifariam secat applicatam FG, vti elicitur ex 41. & 42. huius) simili, & concentrica sectione ELM; ipsa rectam FG continget *c* in E: & facta reuolutione ipsius sectionis ELM circa eundem axim BD, describetur simile concentricum solidum, quod continget *d* planum FHGI in E; itaque ducto per datum punctum E quolibet alio plano non per FG transeunte, sed neque per axim BD; (tunc enim planum hoc, datum solidum in duas partes diuideret, quarum vtra esset quidem maior portione FBG, quoniam vel esset infinitæ magnitudinis, si datum solidum fuerit Conus, vel Conoides, vel esset solidi dimidium, si fuerit Sphæroides, vel Sphæra, ac propterea omninò esset maior portione FBG, quæ dimidio occlusi solidi minor est, cum extra ipsam sit centrum; nam centrum *MINIMAE* portionis planæ FBG, quod idem est, ac centrum solidi, iam constat esse extra ipsam portionem, quando datum punctum E in sectione sit extra centrum, vt ponitur) patet id iuxta quandam rectam NEMC necessariò secare planum per axem ABC, in quo est punctum E. Et quoniam FG sectionem ELM contingit in E, recta NC, quæ per E ponitur transire, omninò secabit interiorem sectionem ELM, siue per aliquam sui partem, vt puta per EM, tota cadet intra sectionem ELM; sed sectio ELM tota est intra concentricum inscriptum solidum, cum sit ducta per axem, quare, & ipsa recta EM tota erit intra solidum inscriptum, vnde planum, quod modò per ipsam duximus, quodque de exteriori aufert solidam portionem NBC, cuius basis est NOCP, secabit prorsus interius solidum, deque ipso quandam solidam portionem abscindet, nimirum ELM, cuius basis sit EQMR: portio igitur NBC, cuius basis est NOCP interius solidum secans, maior erit *e* portione FBG, cuius basis est FHGI idem interius solidum contingens, & hoc semper, quodcunque sit planum transiens per datum punctum E præter planum FHGI. Quare ex dato solido ABC per datum punctum E abscissa est *MINIMA* portio FBG. Quod faciendum erat. *c* 1. Corol. 68.h. *d* 55.h. *e* Schol. 81.h.



CO-

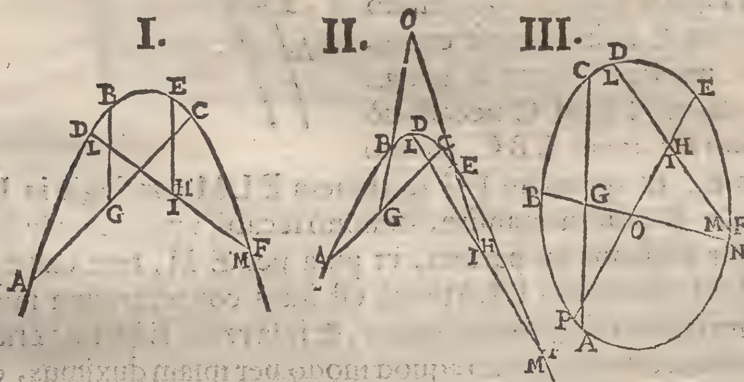
COROLL.

SI datum solidum fuerit quodcunque Sphæroides, vel Sphæra; patet reliquam portionem solidam, dempta *MINIMA* nuper inuenta, esse *MAXIMAM* quæsitam.

THEOR. LIII. PROP. LXXXIII.

Conuersum Prop. 79. h. Æquales portiones solidæ eiusdem Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis, si fuerint de eodem Conoide Parabolico habebunt axes æquales. Si de eodem Hyperbolico, vel de Sphæra, aut Sphæroide quocunque, erunt axes proprijs semi-diametris proportionales. At si fuerint de eodem Cono recto, extrema ipsorum axium pertingent ad idem inscriptum solidum simile, & concentricum.

SInt duæ de eodem quocunque prædictorum solidorum portiones æquales, quarum recti Canones concipiantur transferri super eadem sectione ABF per solidi axem ducta (hoc enim fieri posse manifestum est, cum ipsi recti Canones intra solidas portiones intercepti, sint portiones eiusdem sectionis, quæ in reuolutione circa axim solidum genuit) & sint ABC, DEF, quarum bases sint AC, DF, & diametri BG, EH, quæ simul sunt



a 3. Schol. 69. h. axes solidarum a portionum. Dico, in prima figura exhibente Conoides Parabolicum, axes BG, EH esse inter se æquales, & in secunda exhibente Hyperbolicum, atque in tertia Sphæram, vel Sphæroides, quarum centra sint O, esse axim HE ad semi-diametrum EO, vt axis GB ad semi-diametrum BO.

Ex altero axium, videlicet ex EH, secetur in prima figura segmentum EI ipsi BG æquale; & in reliquis, fiat OE ad EI, vt OB ad BG, in

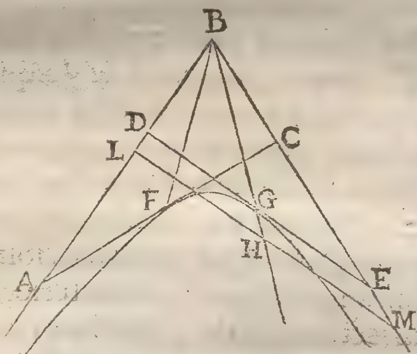
omni-

omnibus verò per I applicetur ordinatim ad E I recta L I M, quæ rectæ D F æquidiſtabit, & per ipſam L I M concipiatur duci planum, quod plano per D F tranſeunti, ſiue baſi portionis ſolidæ D E F æquidiſtet, aliam portionem ſolidam abſcindens L E M, quæ portioni ſolidæ A B C [a] æqualis erit; ſed ponitur etiam D E F eidem A B C æqualis; ergo duæ L E M, D E F inter ſe æquales erunt, ſed vtraque eſt de eodem ſolido, circa communem axim E H I, & ſuper baſes parallelas, quare planum baſis ductum per L M, congruet cum plano baſis, quod tranſit per D F, vnde, & axis terminus I, cum termino axis H. Erit ergo axis E I æqualis axi E H. Sed in prima, factus fuit E I æqualis B G, & in reliquis O E ad E I, vt O B ad B G, quare axis quoque E H, in prima, æquabitur axi B G, in alijs verò erit O E ad E H, vt O B ad B G, & conuertendo H E ad E O, vt G B ad B O. a 79. h.

Sint tandem duæ æquales portiones de eodem Cono recto A B C, D B E, quarum recti Canones concipiantur coaptari ſuper eadem ſectione A B E per ſolidi axem ducta, & ſint A B C, D B E, quarum baſes A C, D E, & diametri B F, B G, (quæ iam ſunt [b] axes ſolidarum portionum.) Et per F cum aſymptotis B A, B C deſcribatur Hyperbole F G; quæ omnino continget [c] A C in F, termino axis B F. Dico iam extremum G axis B G, ad eandem quoque ſectionem pertingere: hoc eſt ſectionem F G ſecare diametrum B G in puncto G. Si poſſibile eſt ſectio F G alibi ſecet axim B G, vt infra G in puncto H, & per H ducatur L H M ipſi D E æquidiſtans: erit D G ad G E, vt L H ad H M, eſtque D G æqualis G E, quare L M quoque bifariam ſecta erit in H: ſed dicitur per H tranſire ſectionem, ergo L M ipſam [d] continget in H, quapropter portio plana L B M æquabitur [e] portioni A B C, & ſi per L M agatur planum ſecans Conum, & ad planum L B M rectum, quod & plano datæ portionis ſolidæ D B E per D E ductum æquidiſtabit, cum hoc ad idem planum L B M ponatur rectum eſſe; erit ſolida portio L B M æqualis [f] portioni A B C, cum earum recti Canones L B M, A B C æquales ſint oſtenſi; ſed D B E quoque eidem A B C data eſt æqualis, ergo duæ portiones L B M, D B E ſimul æquales erunt, totum ſuæ parti, quod eſt abſurdum: non ergo ſectio F G ſecat axim B G infra H; & ob eandem rationem neque ſupra; ergo ſectio F G omnino tranſibit per G extremum axis B G: ſed facta reuolutione anguli, ac ſectionis circa communem axim procreatur Conus, & Conoides Hyperbolicum ſimile, ac concentricum: ergo F, G, extrema puncta axium æqualium portionum ſolidarum A B C, D B E, ex eodem Cono recto, pertingunt ad idem Conoides Hyperbolicum ſimile, & concentricum inſcriptum. Quod vltimò demonſtrandum erat.

b 3. Schol. 69. h.

c 1. Coroll. 68. h.



d ibidem.

e 45. h.

f 78. h.

THEO-

THEOR. LIV. PROP. LXXXIV.

Conuerſ. Prop.78. huius.

Æquales portiones de eodem ſolido, quodcunque ſit ex ſæpius memoratis, habent Canones rectos, in ipſis interceptos, inter ſe æquales.

a 83. h. b 3. Schol. prop. 69. huius. c 40. h. & ex 45. h.

ETenim huiuſmodi portiones ſolidæ æquales, habent axes, [a] vel inter ſe æquales, vel proprijs ſemi-diametris proportionales, vel ad idem Conoides ſimile concentricum, & inſcriptum pertingentes, ſed ijdem axes ſunt quoque [b] diametri prædictorum Canonum, & quando hæ diametri habuerint conditiones huiuſmodi, ipſi Canones recti ſunt [c] æquales, ergo ſolidæ portiones æquales, habebunt rectos Canones inter ſe æquales. Quod erat, &c.

THEOR. LV. PROP. LXXXV.

Conuerſ. Prop.80. huius.

Baſes æqualium portionum ex eodem quocunque prædictorum ſolidorum, ſuperficiem eiuſdem ſimilis inſcripti ſolidi concentrici ad earum centra contingunt.

d 84. h. e 68. h. f 55. h.

POrtiones enim æquales eiuſdem ſolidi habent rectos Canones in ipſis interceptos inter ſe [d] æquales, ſed quando huiuſmodi Canones ſunt æquales (ſi concipiantur tranſlati ſuper eandem ſectionem ſolidi genitricem) ipſorum baſes ad puncta media, eandem concentricam, inſcriptam, & ſimilem ſectionem [e] contingunt, & baſes ſolidarum portionum tranſeunt per has baſes rectorum Canonum, atque ad eos ſunt erectæ, nempe ad planum per axem dati ſolidi, quare eędem baſes ſolidarum portionum contingent ſuperficiem interioris ſolidi concentrici ab inſcripta concentrica ſectioni geniti (dum hæc circa axim conuertatur) ad eadem puncta, [f] in quibus baſes planarum, ſectionem interiorem contingunt; quę puncta ſunt centra axium, vel baſium ſolidarum portionum ex Archimede, & ex iam à nobis animaduerſis.

THEOR. LVI. PROP. LXXXVI.

Solidæ portiones eiuſdem Coni recti, vel Conoidis, ſiue Sphæræ, aut Sphæroidis, quarum axes (pro Cono recto) pertingant ad idem inſcriptum concentricum Conoides Hyperbolicum (vel pro Conoide Parabolico) ſint æquales (ſiue pro reliquis) ad proprias ſemi-diametros eandem habeant rationem, habent baſes altitudinibus reciprocè proportionales.

Eſto vt ponitur dico, &c.

Prop. 79. huius.

ETenim cum axibus huiuſmodi ſolidarum portionum inſint prædictæ conditiones, ipſæ portiones ſolidæ æquales [g] erunt, pariterque earum

recti

recti Canones erunt *a* æquales (eo quod ijdem sint *b* axes solidarum, & diametri Canonum) ac propterea ipsorum bases altitudinibus erunt *c* reciprocè proportionales, sed in æqualibus portionibus de eodem solido, vt sunt bases rectorum Canonum ita sunt *d* bases solidarum portionum, & altitudines tùm portionum, tùm Canonum sunt *e* eædem, ergo in datis portionibus, quibus insunt prædictæ conditiones, erunt quoque bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quod erat, &c. *a* 84. h. *b* 3. Schol. 69. h. *c* 65. h. *d* 2. Coroll. 78. h. *e* 3. Schol. 69. h.

THEOR. LVII. PROP. LXXXVII.

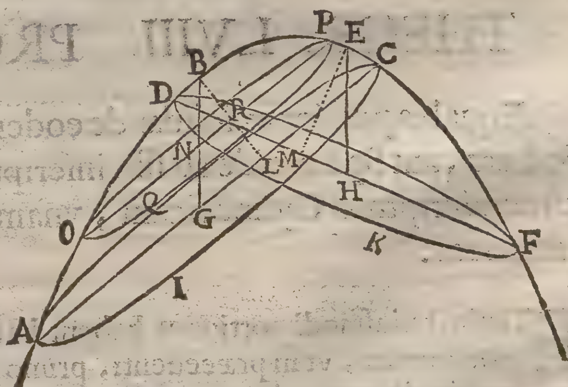
Æquales portiones solidæ de eodem Conoide, vel Sphæra, aut quocunque Sphæroide, vel etiam de Cono recto, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales: & è conuerso.

Si bases portionum de eodem solido fuerint altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

QVando enim huiusmodi portiones solidæ sunt æquales, necessariò earum axes (si portiones fuerint de eodem Conoide Parabolico) erunt æquales (si de eodem Hyperbolico, aut Sphæra, aut Sphæroide) erunt *f* proprijs semi-diametris proportionales; sed in his casibus eædem portiones solidæ habent *g* bases altitudinibus proportionales, ergo; & cum portiones de eodem quocunque prædictorum solidorum fuerint æquales, ipsarum bases altitudinibus reciprocabuntur. *f* 83. h. *g* 86. h.

De portionibus autem æqualibus eiusdem, vel etiam diuersi Coni recti, aut obliqui, iam id ostensum fuit à Commandino in Comment. super Archim. de Conoid. &c. Quod erat primò, &c.

PRæterea sint duæ solidæ portiones A B C, D E F de eodem solido, quodcunque sit ex prædictis (quæ tamen in Sphæroide non excedant eius dimidium) quarum axes sint B G, E H, & bases A I C, D K F, altitudines verò B L, E M, & sit basis A I C ad D K F reciprocè, vt altitudo E M ad B L. Dico has portiones inter se æquales esse.



Concipiantur ipsarum solidarum portionum recti Canones A B C, D E F, quorum diametri, & altitudines eædem *h* erunt atque axes, & altitudines solidarum portionum. *h* 3. Schol. 69. h.

Iam, si huiusmodi Canones sunt æquales, & portiones solidæ æquales *i* erunt. At si dicatur eos inæquales esse, alter ipsorum, vt puta A B C, altero D E F maior erit: vnde *i* 78. h.

& diameter BG erit æquo maior: si igitur ipsa ad æquum reducatur in N, ita vt, vel BN sit æqualis ipsi EH, (dum solidum fuerit Conoides Parabolicum,) vel ita vt BN, & EH ad proprias semi-diametros sint in eadem ratione,) dum solidum fuerit Hyperbolicum, vel Sphæra, aut Sphæroides;) vel ita vt eędem pertingant ad eandẽ similem concentricam sectionem inscriptã; erit BN omnino minor BG, & si per N agatur ipsi AC ęquidistans ONP, quę ad eandem diametrum BG erit ordinatim ducta, atq; minor ipsa AC, fiet portio, seu Canon OBP æqualis [a] portioni, siue Canoni DEF, & ipsa OP secabit BL in R, eritque BR altitudo Canonis OBP, cum ob parallelas sit angulus BRN rectus: & si per rectam OP ducatur planum OQP, quod basi AIC sit parallelum, siue rectum ad Canonem ABC, id abscindet ex dato solido portionem OBP, cuius altitudo erit BR eadem atque Canonis OBP. Cumque Canon OBP æqualis sit Canoni DEF, erit solida portio OBP [b] æqualis solidæ portioni DEF, ac ideo vt basis OQP ad basim DKF, ita [c] reciprocè altitudo EM ad altitudinem BR, estque basis DKF ad basim AIC, ex hypothesi, vt altitudo BL ad altitudinem EM, quare, ex æquali in ratione perturbata, erit basis OQP ad basim AIC, vt altitudo BL ad altitudinem BR, sed est BL maior BR, ergo & basis OQP maior erit basi AIC, quod est falsum; cum sit minor, eò quod OP diameter Ellipsis, aut circuli OQP minor sit homologa diametro AC similis [d] Ellipsis, vel circuli AIC. Non erit ergo Canonum ABC, DEF alter altero maior, quare inter se æquales esse necesse est: ideoque, & portiones solidæ ABC, DEF ęquales [e] erunt. Quod secundò ostendere propositum fuit.

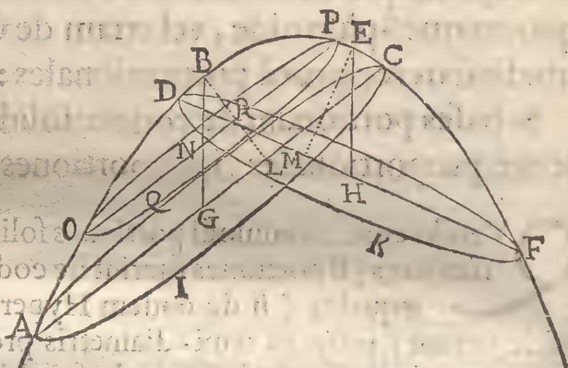
a 40. h. & ex 45. h.

b 78. h.

c ex prima parte huius.

d Coroll. 15. Arch. de Conoid. &c.

e 75. h.



THEOR. LVIII. PROP. LXXXVIII.

Æquales portiones solidæ de eodem quocunque Conoide, aut Sphæra, aut Sphæroide ad sibi inscriptam Coni portionem, vel ad circumscriptum Cylindricum, vnam, eandemque simul habent rationem.

Etenim huiusmodi portiones habent bases altitudinibus reciprocè proportionales, vt in præcedenti, primo loco demonstratum est, sed bases, & altitudines portionum eædem sunt, ac bases, & altitudines inscriptarum Coni portionum, quare, & Coni portionum bases ipsarum altitudinibus erunt reciprocè proportionales; sed eædem portiones Conorum sunt

inter

inter se *a* solida Acuminata proportionalia, & bases altitudinibus reciprocantur, vnde Coni portiones inscriptæ inter se æquales *b* erunt; erit ergo solida portio ad portionem æqualem de eodem solido, vt inscripta Coni portio ad inscriptam Coni portionem (ob æqualitatem) & permutando solida portio ad sibi inscriptam Coni portionem, vt altera æqualis portio ad sibi inscriptam Coni portionem, & sumptis consequentium *c* triplis, solida portio ad circumscriptum Cylindricum, vt reliqua portio ad sibi circumscriptum Cylindricum, &c. Quod erat, &c.

a 70. h.
b 74. h.
c ex Command. in lib. de Conoid. & Spheroid. Archim.

THEOR. LIX. PROP. LXXXIX.

MAXIMA portionum eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis oblongi, vel prolati, & quarum axes sint æquales, ea est, cuius axis congruat cum axe sectionis, quæ solidum genuit; & respectiuè ad Sphæroides, cum minori axe Ellipsis genitricis.

MINIMA verò, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem Ellipsis.

ETenim quando portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis cuiuslibet sunt æquales, & eorum recti Canones sunt *d* æquales, & quando recti Canones siue portiones de eodem angulo, vel Hyperbola, aut Ellipsi æquales sunt, inter ipsorum diametros *MINIMA* est *e* ea, quæ simul sit axis anguli, vel Hyperbolæ, & in Ellipsi, quæ sit axis minor, & *MAXIMA*, quæ sit axis maior, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, vel Sphæroidis fuerint æquales, inter ipsorum axes (qui iisdem sunt, *f* ac diametri rectorum Canonum) *MINIMVS* erit is, qui congruet cum axe Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut cum minori axe Ellipsis Sphæroidis, & *MAXIMVS*, qui congruat cum maiori: quare si primùm axes harum omnium ęqualium portionum, dempta ea circa *MINIMVM* axem, huic *MINIMO* axi æquales secentur, atque ex intersectionibus ducantur plana basibus portionum æquidistantia, auferentur ab ipsis portiones solidæ æqualium axium, sed vnaquæque erit minor quacunque æqualium portionum, (cum sit pars suo toto minor) ac propterea minor ea, è cuius, axe, siue à qua portione nihil ablatũ fuit, quę quidem ea est, cuius axis congruit cum axe Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, & in Sphæroide cum minori axe Ellipsis genitricis. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium axium sunt hac portione minores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum axe dati Coni, vel Conoidis Hyperbolici, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis Ellipsis, earundem omnium portionum, æqualium axium, *MAXIMA*. Quod primò erat, &c.

d 84. h.
e Schol. post 51. h. ad nu. 1.
f 3. Schol. 69. h.

PRæterea si axes omnium æqualium portionum eiusdem Sphæroidis producantur, ac prædicto *MAXIMO* axi (qui iam, vt superiùs, diximus,

congruit cum maiori axe Sphæroidis) æquales secentur, atque ex intersectionum punctis plana ducantur portionum basibus æquidistantia, abscindentur portiones solidæ æqualium axium, & vnaquæque erit maior qualibet æqualium (totum enim sua parte maius est) ac ideò maior ea portione, cuius axi, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum maiori axe Sphæroidis. Itaque si omnes planæ portiones æqualium axium sunt hac portione maiores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis conuenit cum maiori axe Sphæroidis, *MINIMA* earundem omnium portionum æqualium axium, in casibus tamen possibilibus. Quod vltimò demonstrandum erat.

THEOR. LX. PROP. LXXXX.

MAXIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocunque Conoide, aut Sphæroide, & quarum bases sint æquales, ea est, cuius axis sit segmentum maioris semi-axis genitricis sectionis dati solidi, respectiuè ad Sphæroides.

In Sphæroide autem, MINIMA, cuius axis sit segmentum minoris semi-axis Ellipsis, quæ solidum procreat.

QVando enim portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet Conoidis, aut Sphæroidis sunt æquales, & recti earum Canones sunt [a] æquales, & cum recti Canones, vel portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, quæ solidum genuit æquales sunt, inter ipsorum bases, *MINIMA* est [b] ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmentum minoris, atque vt sunt bases æqualium planarum portionum de eodem angulo, vel coni-sectione, ita sunt [c] bases solidarum portionum, quarum ipsæ planæ portiones sint recti Canones, ergo & inter bases æqualium portionum de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide quocunque, *MINIMA* erit ea illius portionis, cuius axis (qui idem est [d] cum diametro recti Canonis) congruat cum maiori axe genitricis sectionis solidi, cuius est portio, & *MAXIMA*, in Sphæroide, erit basis illius portionis, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis genitricis eiusdem Sphæroidis; quare si primò intra has æquales portiones, dempta ea super *MINIMA* basi, ducantur plana basibus æquidistantia, quorum vnumquodque efficiat in portione sectionem prædictæ *MINIMAE* basi æqualem (hoc autem fieri posse, & quomodò infra docebimus) per huiusmodi plana abscindentur portiones solidæ æqualium basium, sed harum quælibet minor erit quacunque æqualium portionum (cum sit pars minor suo toto) ideoque minor ea, à qua nihil ablatum fuit, siue minor ea, cuius axis conuenit cum maiori axe dati solidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium basium hac portione sunt minores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis est segmentum maioris semi-axis sectionis genitricis dati solidi earundem portionum æqualium basium, ac de eodem solido *MAXIMA*, &c.

[a] 84. h.
[b] Schol. post 51. h. ad nu. 2.
[c] 2. Coroll. 78. h.
[d] 3. Schol. 69. h.

Quod

QVod autem in quolibet Sphæroide, inter portiones eius dimidio minores, & æqualium basium, *MINIMA* sit ea, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis datum Sphæroides procreantis, id consimili constructione, atque argumentis ostendetur, vti factum fuit in secunda parte Prop. 50. huius, si tamen super tertia figura lineæ rectæ, & Ellipses ibi animaduersæ, concipiantur tanquam bases solidarum portionum, & veluti Sphæroidalia solida, &c. Quod fuit, &c.

COROLL.

HInc constat *MINIMAM* portionum semi-Sphæroide maiorum, & quarum bases sint æquales, eam esse, cuius axis sit segmentum maioris axis Ellipsis genitricis; *MAXIMAM* autem, cuius axis sit segmentum minoris.

SCHOLIVM.

QVod superius promissimus absoluetur sic, super figuras prædictæ 50. h. Cum ibi sit A C minor H I, erit quoque dimidium D C minus dimidio F I. Detrahatur ergo F P, quę sit media proportionalis inter F I, D C; agatur P R diametro F O æquidistans, & sectioni occurrens in R, atque ex R applicetur R Q S, & facta figurarum reuolutione circa axim B D, concipiantur describi solida, &c. è quibus cum planis per rectas A C, H I, S R ductis, & ad easdem genitrices sectiones erectis, abscindentur portiones solidæ A B C, H O I inter se [a] æquales, & portio S O R. Dico huius basim per S R ductam, æqualem esse basi per A C. a 80. h.

Nam basis per H I ad basim per A C, est [b] vt recta H I ad rectam A C, vel sumptis dimidijs, vt F I ad D C, vel vt quadratum F I, ad quadratum E P, siue ad quadratum Q R, vel sumptis quadruplis, vt quadratum H I ad quadratum S R, sed etiam basis per H I ad basim per S R, est vt quadratum H I ad quadratum S R, cum ob planorum æquidistantiam sint [c] sectiones similes, ergo basis per H I ad basim per A C, erit vt eadem basis per H I ad basim per S R: vnde basis per S R æqualis est basi per A C, &c. Quod facere oportebat. b 2. Coroll. 78. h. c Coroll. 15. Arch. de Conoid.

THEOR. LXI. PROP. LXXXXI.

MINIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocunque Conoide, aut Sphæroide, & quarum altitudines sint æquales ea est, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi.

In Sphæroide, MAXIMA est, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

NAm quando portiones de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide quocunque sunt æquales, & ipsarum recti Canones inter se

sunt

a 84. h. sunt a æquales, quando verò recti Canones, siue portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, quæ solidum procreat æquales sunt, inter ipsarum altitudines *MAXIMA* est b ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, & *MINIMA*, cuius diameter sit segmentum minoris; atque altitudines, & diametri rectorum Canonum, siue planarum portionum eædem sunt, c ac altitudines, & axes solidarum, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis, aut Sphæroidis sunt æquales, inter earum altitudines *MAXIMA* erit ea illius portionis, cuius axis sit segmentum maioris axis genitricis solidi, cuius est portio, & *MINIMA* eius, cuius axis sit segmentum minoris. Itaque si primò altitudines omnium harum æqualium portionum, (dempta ea circa *MAXIMAM* altitudinem) producantur, & huic *MINIMAE* altitudini æquales fiant, atque ex intersectionum punctis ducantur plana portionum basibus æquidistantia, abscindentur ab ipsis portiones solidæ æqualium altitudinum, & vnaquæque maior erit quacunque æqualium portionum (nam totum sua parte maius est) vnde, & maior ea portione, cuius altitudini, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ ea est, cuius axis conuenit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium altitudinum hanc portionem excedunt, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi aliarum portionum æqualium altitudinum *MINIMA*.

b Schol. post 51. h. ad nu. 3.

c 3. Schol. 69. h.

PRo Sphæroide autem, si altitudines omnium prædictarum æqualium portionum (dempta ea circa *MINIMAM* altitudinem, quæ iam ea est circa minorem axem Ellipsis Sphæroidis genitricis) æquales secentur eidem *MINIMAE* altitudini, atque per puncta sectionum, plana solidarum portionum basibus æquidistantia ducantur, hæc à portionibus auferent portiones solidas æqualium altitudinum, sed vnaquæque ipsarum minor erit quacunque æqualium portionum (eò quod pars suo toto sit minor) quapropter & minor ea portione à cuius altitudine, vel à qua portione nihil demptum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum minori axe Ellipsis datum Sphæroides procreantis: si igitur omnes portiones æqualium altitudinum hac portione sunt minores, erit ex aduerso hæc eadem portio, cuius axis conuenit cum minori axe genitricis Ellipsis dati Sphæroidis earundem omnium portionum, æqualium altitudinum, *MAXIMA*. Quod tandem supererat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HVc etiam, prout exposuimus in Scholio post 51. huius, hæc tria sunt animaduertenda. Videlicet.

1. INter axes æqualium portionum eiusdem Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, aut cuiuscunque Sphæroidis, *MINIMVS* est is eius portionis, cuius axis congruat cum axe, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MAXIMVS* eius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem genitricis sectionis.

2. Inter

2. INter bases æqualium portionum de eodem Cono recto, aut de quocunque Conoide, aut Sphæroide *MINIMA* est ea illius portionis, cuius axis sit segmentum axis, & pro Sphæroide sit segmentum maioris axis genitricis sectionis dati solidi. *MAXIMA* verò eius, cuius axis sit segmentum minoris axis eiusdem sectionis genitricis.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem Cono recto, siue de quolibet Conoide, aut Sphæroide, *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MINIMA* eius, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

Quæ omnia, ex hucusque demonstratis, paucis ostendentur (vti factum fuit in præfato Scholio, & super easdem figuras 51. h.) consimilibus, ac ibi argumentis, veruntamen circa solidas portiones versantibus, è quibus denique vniuscuiusque trium proximè præcedentium propositionum veritas iterum elucescet. Sed de his hactenus.

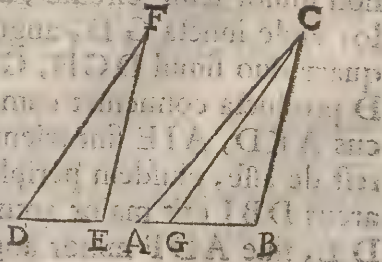
MONITVM.

PLacuit SERENO, Antinsensi Philosopho, in quibuslibet Conis terminatis MAXIMVM, & MINIMVM triangulum per verticem ductum inquirere, liceat nobis tanti Geometræ vestigia insequentibus in Cono pariter terminato quocunque MAXIMAM, & MINIMAM Parabolæ portionem assignare, pro cuius indigatione nonnulla circa plana, nec præter susceptam materiam, nec scitu iniucunda occurrunt afferenda.

LEMMA XVI. PROP. XCII.

Si duo triangula habuerint latus lateri æquale, atque alterum adiacentium angulorum in vno triangulo, alteri adiacentium in reliquo æqualem, sitque reliquus angulus adiacentium in primo, maior reliquo adiacentium in altero, & latus illi oppositum, latere huic opposito maius erit.

SInt duo triangula A B C, D E F, quorum latera B C, E F sint æqualia, & anguli pariter A B C, D E F æquales, angulus verò A C B maior sit angulo D F E. Dico, & latus A B maiori angulo oppositũ, maius esse latere D E oppositum minori.



Fiat angulus B C G æqualis ipsi E F D.

Et

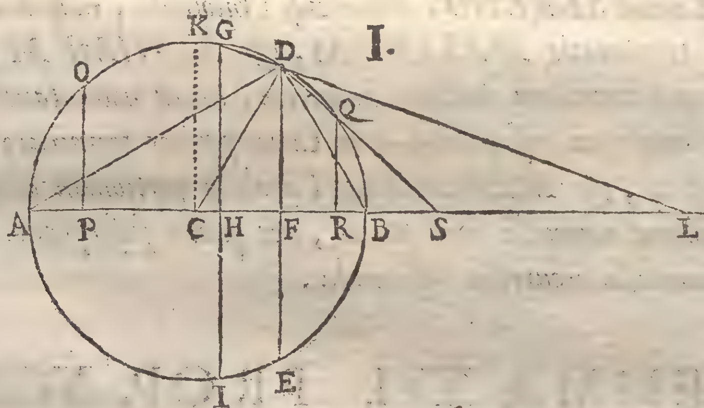
Et quoniam angulus quoque G B C ponitur æqualis angulo D E F, & latus B C lateri E F æquale, erunt in triangulis G C B, D F E reliqua latera G B, D E æqualibus angulis opposita, inter se æqualia, sed est latus A B maius latere B G, cum recta C G secet angulum A C B, ergo latus A B erit quoque maius latere D E. Quod erat probandum.

PROBL. XVI. PROP. XCIII.

A data circuli peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius chorda in sagittam sit MIXIMVM.

1. Esto circulus, cuius diameter A B, centrum C, & exequi oporteat, quod imperatum est.

Sumantur in peripheria, hinc inde à puncto A, duo trientes A D, A E, & iungatur chorda D E secans diametrum A B in F. Dico arcum D A E esse quæsitum; hoc est rectangulum sub eius chorda D E in sagittam A F esse *MAXIMVM*.



Secta enim semi-peripheria A K B bifariam in K, iunctaque K C, ac sumpto in arcu D K quolibet puncto G, quod vel in ipsum K, vel inter K, & D vbicunque cadat, demissaque ex G super diametrum A B perpendiculari G H, quæ producta occurrat peripheriæ in I, iungatur G D.

Et cum arcus A G sit non minor quadrante A K, erit duplus G A I non minor semi-circulo, atque arcus D A I omnino maior semi-circulo; vnde iuncta G D, angulus I G D erit acutus, estque G H B rectus, quare duo simul D G H, G H B duobus rectis minores erunt, ex quo G D producta conueniet cum diametro ad partes D, vt in L. Et cum arcus A K D, A I E sint trientes totius peripheriæ, erit D B E, quod superest de asse, eiusdem peripheriæ triens, siue æqualis arcui A I E, itaque arcus D B I erit maior arcu A I E: si ergo iungatur A D, erit angulus A D E, siue A D F minor angulo I G D, siue parallelarum externo F D L, suntque

ſuntque in triangulis D F A, D F L anguli ad F æquales, cum ſint recti, & latus F D commune, atque angulus A D F minor eſt angulo L D F, quare & latus A F minus [a] erit latere F L, & A H eò minus F L; habebit ergo H F ad F L minorem rationem, quàm eadem F H ad H A, & componendo H L ad L F, ſiue G H ad D F, minorem quàm F A ad A H, vnde rectangulum G H A ſub extremis minus [b] erit rectangulo D F A ſub medijs, & hoc ſemper, vbicunque ſumptum ſit punctum G, vel inter D, & K, vel in ipſo K, nempe rectangulum ad G, vel K, pertingens, minus eſſe rectangulo D F A, ſiue D F A maius eſſe quocunque prædictorum rectangulorum G H A, vel K C A, &c.

a 92. h.

b 16. ſept. Pappi.

Si autem punctum ſumatur in quadrante A K, vt in O; demiſſa perpendiculari O P. Cum ſit K C maior O P, & C A maior A P, erit rectangulum K C A maius rectangulo O P C, ſed rectangulum D F A oſtēſum eſt maius rectangulo K C A, ergo rectangulum D F A eò amplius maius erit rectangulo O P A.

Si denique punctum ſumatur in peripheriæ ſextante D B, veluti in Q, demiſſa perpendiculari Q R, & iuncta D Q, & producta, ipſa conueniet omnino cum diametro A B ad partes B, vt in S, quoniam angulus E D Q eſt in portione E A Q ſemi-circulo maiori, ac propterea acutus, & angulus D F S rectus eſt, &c. Et cum arcus A I E æqualis ſit arcui D B E, vterque enim eſt triens peripheriæ, erit arcus A I E maior arcu Q B E, ac ideo angulus A D E, vel A D F maior angulo Q D E, vel S D F, ſed in triangulis A F D, S F D latus F D eſt commune, & anguli ad F ſunt æquales, eò quod ſint recti, & angulus A D F maior eſt angulo S D F, vnde latus A F maius eſt [c] latere F S, & adhuc maius latere R S, habebit ergo F R ad R S maiorem rationem quàm eadem R F ad F A, & componendo F S ad S R, vel D F ad Q R, maiorem quàm R A ad A F; vnde rectangulum D F A ſub extremis, maius [d] erit rectangulo Q R A ſub medijs, & hoc ſemper vbicunque aſſumptum ſit punctum Q in ſextante D B. Quare cum rectangulum A F D demonſtratum ſit maius omnibus applicatorum, tum in triente A D, tum in ſextante D B, ipſum A F D erit *MAXIMVM*, & ſumptis duplis, rectangulum ſub ſagitta A F in chordam D E, erit *MAXIMVM* rectangulum ſub qualibet alia ſagitta in ſuam chordam. Quod, &c. Quodque alibi aliter enodabimus.

c 92. h.

d 16. ſept. Pappi.

2. AD pleniorem autem doctrinã, in proxima ſequenti ſecunda figura, manentibus poſitione ijſdem punctis K, D, E, dico talium rectangulorum id, quod puncto D propinquius eſt, ſemper maius eſſe remotiori.

Nam de ijs, quæ ad arcum quadrantis A K pertingunt, vtputa de rectangulis A C K, A F R, A H G, &c. patet A C K propinquius puncto D maius eſſe rectangulo A F R, quod ab ipſo D magis remouetur, & A F R maius eſſe A H G, &c. cum, tum altitudines K C, R F, G H, tum baſes C A, F A, H A continuè decreſcant.

De ijs verò, quæ perueniunt ad arcum K D, videlicet in punctis I, L, ita ratiocinabimur. Demittantur ex I, L ad diametrum perpendiculares I M N, L O P, & iungatur I L, quæ producta conueniet ad partes L cum diametro in Q (nam arcus N A L maior eſt ſemi-peripheria, ex

quo angulus NIL est acutus, atque IMO rectus est, ideoque duo simul NIL, IMB duobus rectis minores.) Et cum arcus AE æqualis sit arcui DE, erit arcus AP minor arcu DE, & multò minor arcu LBN: vnde, iuncta AL, erit angulus ALP, siue ALO minor angulo LIN, siue LIM, siue angulo QLO parallelarum externo, estque in triangulis ALO, QLO latus OL commune, & anguli ad O sunt æquales, cum sint recti,
a 92. h. ergo latus AO erit minus [a] latere OQ, & AM eò minus OQ; habebit igitur OM ad MA maiorem rationem, quàm MO ad OQ, & componendo OA ad AM maiorem quàm MQ ad QO, vel quàm IM ad LO, vnde rectangulum AOL sub extremis, quod propinquius est puncto D,
b 16. sept. Pappi. maius [b] erit rectangulo AMI sub medijs, quod à puncto D magis distat.

De rectangulis denique pertingentibus ad puncta in sextante DB, nimirum ad S, T, idem sic demonstrabitur. Ductis enim SVY, TX diametro perpendicularibus, & iunctis AS, & ST, hæc producta conueniet cum AB in Z, quoniam angulus TSY est in portione TAY semi-circulo maiori, nempe acutus, & angulus SVB rectus est, &c. Et cum arcus AEY sit triente maior, & arcus YBT minor EBD, siue minor triente, erit angulus ASY, siue ASV maior angulo YST, siue VSZ, & in triangulis ASV, ZSV sunt anguli ad V æquales, cum sint recti, & latus SV com-
c 92. h. mune, ergo latus AV erit [c] maius latere VZ, & eò maius latere XZ: habebit ergo VX ad XZ maiorem rationem quàm ad VA, & componendo, VZ ad ZX, siue SV ad TX maiorem rationem quàm XA ad A
d 16. sept. Pappi. V: quapropter rectangulum SVA sub extremis, quod propius est puncto D maius erit [d] rectangulo TXA sub medijs, quod à puncto D magis distat. Qnod ex abundanti ostendere propositum fuit.

SCHOLIVM.

Ex eo, quod ad num. 1. superiùs ostensum fuit; facilè constat, in prima figura, quæsitam chordam DE secare circuli diametrum AB in F, in 3. ratione ad 1.

Nam iunctis CB, BD. Cum sit arcus BD circuli sextans, ipsius chorda

da BD erit æqualis radio BC, siue CD, vnde in triangulo æquilatero CDB anguli ad C, B, æquales erunt, & in triangulis CFD, BFD cum anguli ad C, B, sint æquales, atque etiam æquales ad F, cum sint recti, & latus DF commune, erit reliquum latus CF, reliquo FB æquale, estq; AC æqualis CB, ergo AF erit tripla FB.

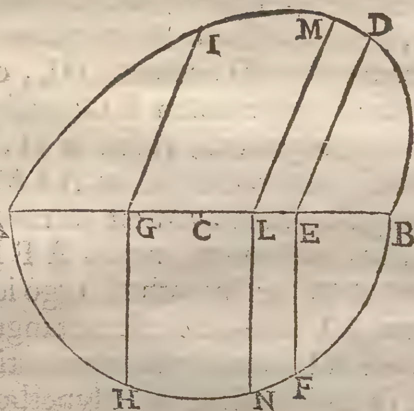
Verum hæc omnia consimili ratione persolui, ac verificari de rectangulis in Ellipsi applicatis, &c. ita sequenti Problemate demonstrabitur.

PROBL. XVII. PROP. XCIV.

Ad diametrum datæ semi-Ellipsis rectam applicare, cuius rectangulum in alterum diametri segmentum sit MAXIMVM.

1. ESto semi-Ellipsis ADB, cuius centrum C, & diameter AB, ad quam applicare oporteat DE, ita vt rectangulum AED sit *MAXIMVM*.
Secetur BC bifariam in E, appliceturque ED, quæ erit quæsita.
Nam descripto super AB semi-circulo AFB, erigatur ex E ipsi AB perpendicularis EF. Patet ex præcedenti Scholio, rectangulum AEF esse *MAXIMVM* in semi-circulo, &c. cum AE sit tripla EB.
Sumatur ampliùs quodlibet aliud punctum G, præter E, applicenturq; tum in semi-circulo, tum in semi-Ellipsi rectæ GH, GI. Et cum sit quadratum EF ad GH vt rectangulum AEB ad AGB, vel vt* quadratum ED ad GI, erit & linea EF ad GH, vt ED ad GI, sed ratio rectanguli AEF ad rectangulum AGH componitur ex ratione EF, ad GH, siue ex ratione ED ad GI, & ex ratione EA ad AG, atque rectangulum AED ad AGI ex iisdem componitur rationibus, vnde rectangulum AEF ad AGH erit vt rectangulum AED ad AGI, & hoc semper, sed est rectangulum AEF *MAXIMVM* in semi-circulo, ergo, & AED erit *MAXIMVM* in semi-Ellipsi. Applicatum est ergo, &c. Quod erat faciendum.

*21. primi conic.



2. QVod autem eorum, quæ hinc inde à puncto D applicantur, nempe de rectangulis ALM, AGI id, quod *MAXIMO* propius est maius sit remotiori, eadem penitus arte nuper adhibita ostendetur, si ex L in semi-circulo applicetur LN. Nam eodem argumento demonstrabitur rectangulum ALM ad AGI, esse vt ALN ad AGH, sed ALN maius est AGH, prout in præcedenti ad num. 2. conclusum fuit, ergo & rectangulum ALM maius erit rectangulo AGI, & hoc semper verum est, tum

 de

de applicatis ad puncta arcus AID, tum de ijs, quæ pertingunt ad puncta reliqui arcus DB, hoc est prædicta rectangula hinc inde à puncto D, continuè decrescere, quò magis distant à *MAXIMO* rectangulo AED.

Hinc soluendum sit obuiam Problema huiusmodi.

PROBL. XVIII. PROP. XCV.

In dato semi-circulo, vel semi-Ellipsi, hinc inde à MAXIMO rectangulo nuper inuento, bina æqualia rectangula reperire.

SIt datus semi-circulus, vel semi-Ellipsis, cuius diameter AB, centrum C, & punctum, ad quod peruenit *MAXIMVM* rectangulum, sit D, (quod habebitur si diameter AB secetur in L, ita vt AL sit [a] tripla LB, & applicetur LD,) sitque exempli gratia è quolibet puncto E arcus AED, applicata EF ad diametrum AB, & oporteat in reliquo arcu DB punctum G reperire, ita vt ducta GH ipsi EF parallela, rectangula AFE, AHG inter se sint æqualia.

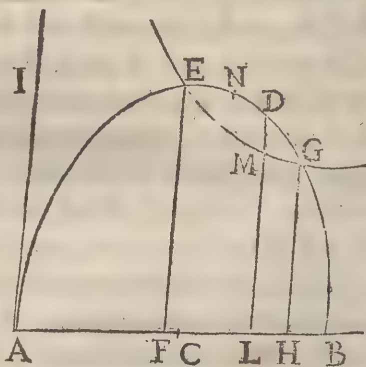
a Schol. 93. h. & ex 94. h.

Ducatur ex A sectionem contingens AI, quę ipsis applicatis æquidistabit, atque in angulo asymptotali IAB per punctum E describatur [b] Hyperbole EG. Dico hanc necessariò in aliquo puncto circuli arcum DB secare, vt in G, & hoc esse quæsitum, atque vnicum.

b 4. sec. Conic.

Etenim demissa ordinata DL, cum hæc asymptoto AI æquidistet, ipsa necessariò Hyperbolen EG secabit, [c] at in vno tantùm puncto, veluti in M, & ob Hyperbolen, erit rectangulum ALM [d] æquale rectangulo AFE, sed est rectangulum ALD maius eodem rectangulo AFE, cum sit *MAXIMVM*, ex hypothesi, ergo idem rectangulum ALD maius erit rectangulo ALM, atq; est AL communis eorum altitudo, quare LD maior erit LM. Hyperbole igitur EG secat omnino DL inter D, & L, vnde & producta necessariò secabit peripheriam arcus DB, cum spatium LDB sit vndique clausum, & Hyperbole sit infinitæ productionis: secet igitur in G. Dico punctum G quæsitum soluere, vt satis patet, cùm rectangulum GHA, ob Hyperbolen, sit [e] æquale rectangulo EFA.

c Coroll. 11. primi huius.
d 12. sec. Conic.
e ibidem.



Quod autem in nullo alio puncto, præter in E, & G, huiusmodi Hyperbole arcui AD, vel arcui DB occurrat, manifestum est: nam si alibi occurreret, vt in N; esset ob Hyperbolen, rectangulum pertingens ad N æquale rectangulo AFE, quod est falsum, quoniam ob circulum, vel Ellipsim, quando punctum N est inter E, & D, rectangulum ad N maius est quàm rectangulum ad E, & si fuerit inter A, & E, ipso rectangulo ad E

minus

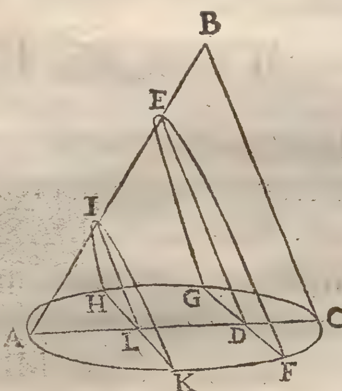
minus est, * prout in præcedenti demonstratum fuit: idemque sequetur, si dicatur Hyperbolen alibi quàm in G arcui DB occurrere. Itaque inuenta sunt in semi-circulo, vel semi-Ellipsi vltrò citròque à *MAXIMO* rectangulo, duo rectangula inter se æqualia. Quod faciendum erat. * 94. h.

PROBL. XIX. PROP. XCVI.

In quocunque Cono terminato, ex infinitis Parabolæ portionibus, quæ à planis inter se æquidistantibus, iuxta quodlibet Coni latus, tanquam regulam ductis, in ipso Cono procreantur, MAXIMAM assignare.

ESto Conus quicunque terminatus ABC, cuius vertex B, basis circulus AC, & quodcunque triangulum per axem ductum sit ABC. Patet, si huiusmodi Conus, & triangulum per axem alio plano secetur, quorum communis sectio DE æquidistet alterutri laterum trianguli per axem, nempe BC, & communis sectio plani secantis per DE cum basi AC, quę sit FG, sit ad basim AC trianguli per axem perpendicularis, patet inquam sectionem in Cono genitam GEF (quam vocò factam iuxta latus BC, quod communi sectioni ED æquidistat) semper esse [a] quandam Parabolæ portionem: quæritur modò, quæ sit *MAXIMA* harum æquidistantium infinitarum Parabolæ portionum in Cono, iuxta latus BC, tanquam regulam, progenitarum. a 1. primi huius.

Secetur diameter AC in D, ita vt AD sit tripla ad DC, & per D agatur planum iuxta regulam BC, vti dictum est, sectionem faciens Parabolen GEF. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.



Secto enim Cono, quocunque alio plano iuxta eandem regulam BC, quod sectionem faciat Parabolen HIK, cuius communis sectio cum triangulo per axem sit IL, cum circulo verò sit KLH, erit DE ipsi LI, & FD ipsi KL [b] parallela, quare angulus FDE angulo KLI æqualis [c] erit, vnde, si concipiantur iungi rectæ FE, KI, triangula FDE, KLI cum sint æquiangula ad D, L, habebunt rationem compositam ex latere ED ad IL, siue ex DA ad AL, & ex DF ad LK, sed rectangulum quoque ADF, ad rectangulum ALK habet rationem ex ijsdem rationibus compositam, ergo triangulum EDF ad ILH erit vt rectangulum ADF ad ALK, sed rectangulum ADF maius est ipso ALK, cum sit [d] *MAXIMVM*, ergo & triangulum EDF ipso ILK maius erit, & sumptis duplis [e] superbipartibus tertijs, erit Parabolæ portio GEF maior Parabolæ portione HIK, & hoc semper, vbicunque æquidistans planum ducatur extra GEF

b 16. vnd. Elem.

c 10. ibid.

d 93. h.

e 17. primi h.

iuxta

iuxta regulam B C: quare Parabolica portio G E F, aliarum, iuxta eandem regulam B C progenitarum, est *MAXIMA*. Quod inuenire propositum fuerat.

COROLL.

Hinc est, quod *MAXIMAE* Parabolæ iuxta quæuis Coni latera genitæ, habent bases æquales: nam ipsæ bases, vti constat ex superiori constructione æqualiter distant à centro circuli (qui est basis Coni) siue per quadrantem sui ipsius diametri, ac propterea inter se sunt æquales.

SCHOLIVM.

SI hinc inde à *MAXIMA* inuenta Parabolica sectione, quærantur binæ æquales, id facili negotio consequetur, & consimilibus argumentis, ac supra demonstrabitur, eas nimirum æquales esse inter se, quæ ductæ sint ex punctis in circuli diametro A C, hinc inde à puncto D æqualia rectangula præstantibus.

Si autem quæratur inter has *MAXIMAS* Parabolicas sectiones, iuxta infinita Coni latera genitas, quæ sit *MAXIMA*, quæue *MINIMA*, hoc, nonnullis præmissis, proximo Problemate venabimur, sed tantummodò in Cono Scaleno, nam in recto, satis superque patet, omnes huiusmodi *MAXIMAS* inter se æquales esse, cùm omnia triangula per axem Coni recti, sint ad basim erecta, æqualia, æquicruria, & æqualium laterum, &c.

THEOR. LXII. PROP. XCVII.

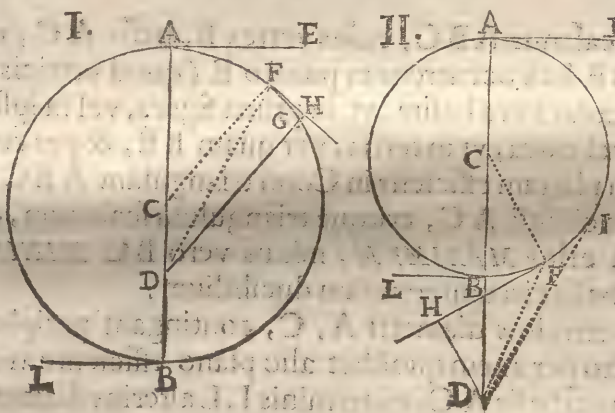
In plano dati circuli, perpendicularium à puncto dato, quod non sit centrum, super rectas eiusdem circuli peripheriam contingentes ducibilium, MAXIMA est ea, in qua centrum, MINIMA verò, si punctum fuerit intra circulum, est reliquum diametri segmentum; si autem datum punctum fuerit in ipsa peripheria, vel extra, tunc non datur MINIMA.

ESto circulus A B, cuius centrum C, & datum punctum vbicunque sit D præter in centro, & iuncta D C, ac producta vsque ad peripheriam in A, B punctis, è quibus ductis contingentibus A E, B L (quæ diametro A B perpendiculares erunt) & ex quolibet alio peripheriæ puncto F, ducta item contingente F H, super qua ex dato puncto D demissa sit perpendicularis D H, &c. Dico huiusmodi perpendicularium *MAXIMAM* esse D A, in qua est centrum C, & in prima figura, in qua punctum cadit intra, *MINIMAM* esse D B: si verò datum punctum D cadat in ipsam peripheriam, vt in B, vel extra, vt in secunda figura, tunc dico non dari *MINIMAM*.

Ex

Ex centro C ad punctum contactus F ducatur radius CF; patet ipsum cum contingente FH rectum angulum efficere, sed angulus quoque DHF, rectus est ex hypothesi, quare DH ipsi CF est parallela, vnde perpendicularis DH, occurrit tangenti extra punctum contactus F. Iungatur denique DF, &c.

Cum enim ex puncto D in circuli peripheriam cadant rectæ DA, DF, DB, &c. patet, ex elementis, DA, in qua est centrum, *MAXIMAM* esse, nempe maiorem DF, sed est obliqua DF maior perpendiculari DH, ergo DA eò magis maior erit DH. Quod DA quoque sit maior DB, patet cum ipsa sit diametri segmentum, in quo est centrum, & hoc semper ostendetur de quibuslibet alijs perpendicularibus ad contingentes; ergo DA, in qua centrum reperitur, est *MAXIMA* in vtraque figura, etiam si datum punctum cadat in ipsam peripheriam.



In prima verò, iam est DB minor DA; item est DB minor DG, estq; DG minor DH, ergo DB eò ampliùs est minor DH, & hoc semper de qualibet perpendiculari ad quamcunque contingentem, præter ad punctum D; quare, dum datum punctum D cadit intra circulum, *MINIMA* est DB reliquum diametri segmentum, dempta *MAXIMA*.

Si autem datum punctum incidat in ipsam peripheriam, vt in B: patet perpendicularem ex B, super contingentem ex eodem B ductam, punctum euadere, ac propterea non dari *MINIMAM*, nisi dicatur illud idem punctum esse *MINIMAM*.

Si tandem punctum D cadat extra, vt in secunda figura: ducta ex D circulum contingente DI, constat pariter perpendicularem ductam ex D super ipsam DI in punctum abire, ac ideo in hoc etiam casu non dari *MINIMAM*, &c. Quod vltimò probandum erat.

THEO-

THEOR. LXIII. PROP. XCVIII.

Perpendicularium à vertice Coni ſcaleni ſuper rectas baſis peripheriam contingentes ducibilium, MAXIMA eſt, quæ ſuper contingentẽ ex termino MAXIMI lateris Coni ducitur, ſiue eſt ipſum MAXIMVM Coni latus: & dum veſtigium verticis cadit intra baſim, vel in ipſius peripheriam, MINIMA eſt, quæ ſuper contingentem ex termino MINIMI lateris, ſiue eſt idem latus MINIMVM: dum autem cadit extra, MINIMA eſt, quæ cadit ſuper contingentem ductam à puncto veſtigij verticis ad eandem baſis peripheriam, ſiue MINIMA eſt ipſa Coni altitudo.

ESto Conus ſcalenus ABC, cuius vertex B, baſis AC, centrum D, & altitudo BE baſi occurrens in puncto E (quod verticis veſtigium voco,) quod vel cadat intra baſim, vt in prima figura, vel in ipſam peripheriã, vt in ſecunda, vel extra, vt in tertia, per quàm BE, & per centrum D concipiatur ductum planum efficiens in Cono triangulum ABC, quod rectum erit [a] ad planum circuli AC, eritque triangulum ſcalenum, cuius maius latus, nempe BA erit [b] *MAXIMVM*, minus verò BC *MINIMVM* laterum, à vertice B ad baſis circumferentiam ducibilium.

a 14. ſecundi Sereni.
b 15. ibid.

Præterea ex terminis diametri A, C, contingant peripheriam rectæ AF, HC, & ducto per axem quolibet alio plano efficiente triangulum IBL obliquũ ad planum baſis AC, ex terminis I, L alterius diametri IDL, agantur contingentes IM, LN, & hoc fiat vt contingit, &c. Dico perpendicularium, quæ à vertice B ad ipſas contingentes AF, CH, IM, LN, &c. duci poſſunt, in ſigulis caſibus, *MAXIMAM* eſſe, quæ ſuper AF, atque eam eſſe ipſum *MAXIMVM* latus BA: in primò autem, & ſecundò caſu *MINIMAM* eſſe, quæ ſuper CH, atque hanc eſſe, ipſum *MINIMVM* latus BC: in tertio denique ſi ex puncto veſtigij E ducatur EG peripheriam baſis contingens. Dico earundem perpendicularium *MINIMAM* eſſe, quæ ſuper EG ducitur, & hanc eſſe ipſam altitudinem BE.

Etenim, in ſingulis figuris, cum triangulum ABC ſit, ex hypotheſi rectum ad planum baſis AC, & ad communem eorum ſectionem AC ſit FA perpendicularis (nam eſt AF contingens circulum, & AD centrum iungens) erit eadem FA recta ad planum ABC, ac propterea recta erit quoque ad AB, quæ eſt in eodem plano ABC, in quo eſt AC, hoc eſt BA perpendicularis erit ſuper contingentem AF; eadem ratione oſtendetur BC perpendicularem eſſe ad contingentem CH.

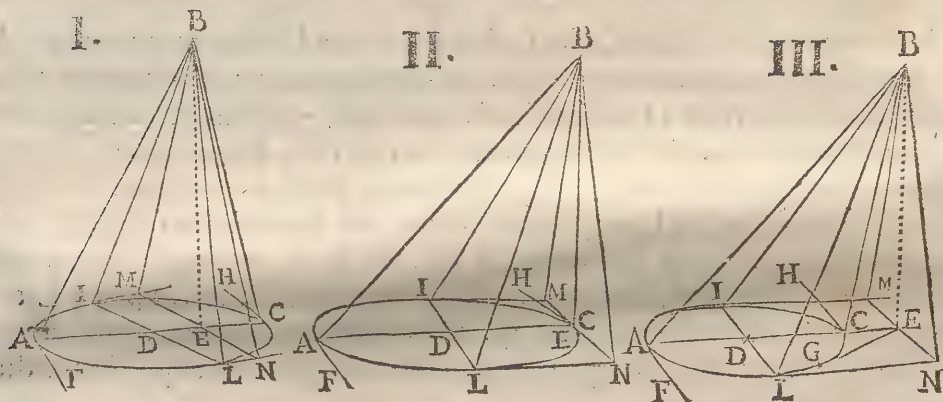
Præterea ducta ex E recta MEN parallela ad IL, cum anguli DIM, DLN ſint recti, à contingentibus cum radijs conſtituti, erunt quoque reliqui parallelarum interni IME, LNE recti. Iungantur denique BM, BN. Et cum BE ſit recta ad planum baſis AC, erit etiam planum trianguli MBN, quod per eam ducitur, rectum [c] ad ipſam baſim, ſiue baſis recta ad triangulum MBN, eſtque IM perpendicularis ad eorum communem ſe-

c 18. vnd. Elem.

ctionem

ctionem MN, vt modò oſtendimus, ergo, & ad rectam MB, quæ eſt in eodem trianguli plano perpendicularis erit, ſiue BM perpendicularis ſuper IM: eodem modo oſtendetur BN perpendicularem eſſe ad LN.

1. IAM perpendicularis BA maior eſt BC, cum BA ſit *MAXIMVM* Coni latus, & BC *MINIMVM*, vt ſupra monuimus; ob eandem rationem eſt BA maior BI, ſed BI maior eſt BM, cum BM ſit perpendicularis ad IM, ac ideo *MINIMA* ad ipſam IM, ergo BA eò magis maior erit perpendiculari BM: eodem modo demonſtrabitur BA maiorem eſſe perpendiculari BN, & hoc ſemper, &c. quare in ſingulis caſibus *MAXIMVM* Coni latus BA eſt *MAXIMA* prædictarum perpendicularium.



2. QVo autem ad *MINIMAM* in prima figura. Eſt BC minor BA, cum ea ſit *MINIMVM* Coni latus. Ampliùs eſt [a] perpendicularis EC minor perpendiculari EM, vnde, & quadratum EC minus eſt quadrato EM, & communi addito quadrato EB, erunt duo ſimul quadrata CE, EB, ſiue vnicum quadratum BC, minus duobus ſimul quadratis ME, EB, ſiue vnico quadrato BM (ponitur enim BE recta ad baſim, ac ideo cum omnibus EC, EM, &c. rectos efficit angulos) hoc eſt recta BC, quæ perpendicularis eſt ad contingentem CH, minor erit recta BM, quæ eſt perpendicularis ad contingentem IM; eadem ratione oſtendetur BC minorem eſſe perpendiculari BN, vel quacunque alia ex B ad quamlibet contingentium ducta: quare BC eſt ipſarum perpendicularium *MINIMA*. *a 97. h.*

In ſecunda verò cum altitudo BE congruat cum perpendiculari BC ad contingentem CH, cumque eadem BE ſit [b] *MINIMA* ad planum baſis AC, erit etiam perpendicularis BC *MINIMA* ad idem planum, hoc eſt *MINIMA* quarumlibet perpendicularium. In primo igitur, ac ſecundo caſu recta BC, quæ eſt *MINIMVM* Coni latus, perpendicularium ad prædictas contingentes eſt *MINIMA*. *b 52. h.*

3. IN tertia denique, cum ſit recta BE ad planum baſis perpendicularis, ipſa cum contingente EG rectos efficiet [c] angulos, ſed ipſa BE eſt [d] *MINIMA* ad ipſum baſis planum, quare, & *MINIMA* quoque erit prædictarum quarumlibet perpendicularium. Quod vltimò oſtendere proponebatur. *c 3. def. 11 Elem.* *d 52. h.*

COROLL. I.

Ex hac igitur constat in Cono scaleno, tum *MAXIMVM*, tum *MINIMVM* latus perpendiculare esse ad rectas ex eorum extremis terminis basis peripheriam contingentes.

Nam superiùs primo loco demonstrauimus rectam BA, quæ est *MAXIMVM* Coni latus, rectum angulum efficere cum contingente AF, & rectam BC, quæ est latus *MINIMVM*, cum contingente CH rectum pariter angulum constituere.

COROLL. II.

Patet quoque in eodem Cono scaleno, perpendicularem ex vertice ductam super aliam contingentem ad extrema basis cuiuscunque trianguli per axem non recti ad basim Coni, eam esse, quæ iungit eundem verticem cum intersectione ipsius tangentis cum ea recta linea, quæ à vestigio verticis ipsi basi prædicti trianguli per axem æquidistans ducitur.

In triangulo enim IBL per axem ducto, sed super basim AICL obliquo, ibi demonstratum fuit rectas BM, & BN perpendiculares esse super contingentes IM, & LN, ductas ex terminis I, & L basis IL eiusdem trianguli, atque iam puncta M, & N sunt intersectiones ipsarum tangentium cum recta MEN, quæ per verticis vestigium E æquidistans ducitur ad IL basim trianguli.

THEOR. LXIV. PROP. IC.

In quocunque Cono scaleno, Parabolæ portiones iuxta quælibet Coni latera genitæ, & quarum diametri, in earum triangulis per axem ab ijsdem lateribus proportionaliter distent, vel quarum bases sint æquales, habent altitudines proportionales perpendicularibus, quę ducuntur à Coni vertice super rectas basis peripheriam contingentes ad puncta, quibus eadem latera occurrunt.

Esto Conus scalenus ABC, cuius vertex B, basis circulus AC, centrum D, & Coni altitudo sit BE, per quam, & per axim ductum sit planum ad basim erectum, efficiens in Cono triangulum ABC: & iterum sectus sit Conus quocunque alio plano per axem efficiente triangulum super basim obliquũm GBH, atque iuxta vtriusque horum triangulorum latera BA, BG tanquam regulas, cõcipiantur duci - plana, parabolicas portiones efficientia, ita vt communis sectio Parabolæ genitæ iuxta latus BA cum triangulo ABC sit recta PI, (quæ in triangulo ABC æquidistabit lateri BA [a] eritque Parabolæ diameter) & cum basi AC sit recta LIM (quæ rectæ ADC erit perpendicularis, atque eiusdem Parabolæ basis) communis autem sectio Parabolæ genitæ iuxta latus BG cum triangulo GBH, sit recta QS, (quæ parallela erit ipsi BG, ac item erit [b] diameter Parabolæ)

[a] 1. primi huius.

[b] ibidem.

& cum

& cum basi AC erit recta NSO, (quæ ad rectam GDH erit perpendicularis, & ipsius Parabolæ basis) quæ bases inter se æquales erunt, cum sint rectæ in circulo AC à centro D æqualiter distantes, atque huiusmodi Parabolarum diametri PI, QS proportionaliter distent à lateribus, seu ab ipsarum regulis BA, BG, ita vt sit BP ad PC, vel AI ad IC, vt BQ ad QH, vel GS ad SH. Dico altitudinem Parabolæ per PI ad altitudinem Parabolæ per QS (quæ sunt Parabolæ æqualium basium) habere eandem rationem, ac perpendicularis ex vertice B super contingentem ex A, termino lateris BA, ad perpendicularem ex B super contingentem ex G, termino lateris BG. Et è conuerso, &c.

Nam sit AF basim contingens ad A, siue perpendicularis ad diametrum AC, quę erit [a] quoq; cum AB perpendicularis: sitque GR contingens ad G, quæ item cum diametro GDH rectos angulos efficiet; atque ex E Coni verticis vestigio, ducatur ER parallela ad HDG, iungaturque BR, quæ super contingentem GR erit [b] perpendicularis, iunctaque HR, quæ rectam GSN secet in T, agatur recta QT.

a 1. Coroll. 98. h.

b 2. Coroll. ibid.

Iam cum sit IM parallela ad AF, (vtraque enim perpendicularis est ad AC) & IP ad AB, erit angulus PIM [c] æqualis angulo BAF, nempe rectus, quare ipsa PI erit altitudo Parabolicæ portionis, quæ ducitur per PI iuxta latus BA, cum sit MIL eius basis. Præterea cum sit RH ad HT, vt GH ad HS, (ob parallelas RG, TS in triangulo GHR) vel vt BH ad HQ (ob æquidistantes GB, SQ in triangulo GHB) erit in triangulo RHB recta BR parallela ad QT, estque RG parallela ad TS, ergo angulus QTS æquabitur [d] angulo BRG, siue rectus erit, ex quo ipsa QT erit altitudo Parabolicæ portionis ductæ per QS iuxta latus BG, cum NSO sit basis ipsius Parabolæ. Et quoniam demonstrata est BR parallela ad QT, erit BR ad QT, vt BH ad HQ in triangulo BHR, vel vt BC ad CP, ex hypothesi, vel vt BA ad PI, ob parallelas in triangulo ABC, & permutando BR, quæ est perpendicularis ex vertice B super contingentem GR, ad BA, quæ est perpendicularis ex B super contingentem AF, ita QT, quæ est altitudo Parabolæ per QS, ad PI, quæ est altitudo Parabolæ per PI, & hoc semper; quare patet propositum.

c 10. vnd. Elem.

d ibidem.

COROLL.

Hinc est, quod Parabolarum in Cono genitarum, iuxta quodlibet latus trianguli per axem ad basem recti, eędē sunt diametri, ac altitudines. Superius enim ostendimus diametrum Parabolæ per PI in triangulo per axem ABC iuxta latus BA, esse quoque altitudinem eiusdem Parabolæ.

PROBL. XX. PROP. C.

In dato quocunque Cono scaleno, MAXIMAM MAXIMARVM, & MAXIMARVM MINIMAM Parabolæ portionem assignare.

ESto Conus scalenus A B C, cuius vertex B, basis B C, centrum D. Oportet inter *MAXIMAS* Parabolas, & *MAXIMAM*, & *MINIMAM* assignare.

Secetur Conus plano per axem, & ad basim erecto, efficiente triangulum A B C. Patet alterum ipsius laterum, vt puta B A esse [a] *MAXIMVM*, alterum verò B C *MINIMVM*.

a 15. sec. Sereni.

Radius D A ad partes *MAXIMI* lateris secetur bifariam in E, ita vt C E sit tripla ad E A; & per E iuxta regulam *MAXIMI* lateris B A concipiatur ductum planum efficiens Parabolen: patet hanc esse [b] *MAXIMAM* iuxta idem latus B A, quam dico esse quoque *MAXIMARVM MAXIMAM*, vbicunque cadat punctum H vestigium verticis.

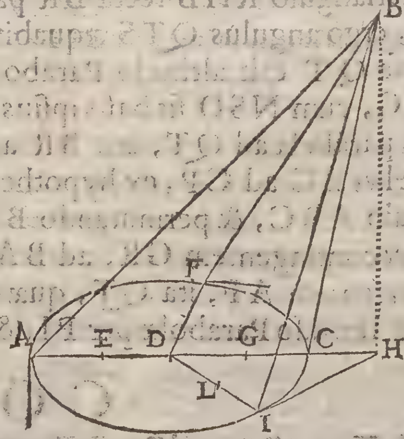
b 96. h.

Nam *MAXIMA* Parabole, ducta per E iuxta latus B A, ad quamlibet aliam *MAXIMAM* Parabolen iuxta aliud quodcunque latus, nempe iuxta B F (cum ipsæ sint [c] æqualium basium) est homologè, vt altitudo [d] vnius ad altitudinem alterius, sed altitudo ad altitudinem est vt [e] perpendicularis ex B super contingentem circuli B C peripheriam ad punctum A; [f] quæ est ipsum latus B A, ad perpendicularem ex B super contingentem ad punctum F, atque perpendicularis B A maior est perpendiculari ex B super contingentem ad F, cum ipsa B A sit [g] earundem perpendicularium *MAXIMA*, ergo, & *MAXIMA* Parabole ducta per E iuxta latus B A erit maior *MAXIMA* Parabola ducta iuxta latus B F, & hoc semper, vnde ipsa ducta per E iuxta *MAXIMVM* Coni latus B A, erit *MAXIMARVM MAXIMA*: quod primò erat, &c.

c Coroll. 96. h.
d 15. primi h.
e 99. h.
f 1. Coroll. 98. h.
g 98. h. ad num. 1.

Præterea si H vestigium verticis B ceciderit, vel intra circulum B C, vel in ipsius peripheriã: secto radio D C, (qui est ad partem *MINIMI* lateris B C Coni A B C) bifariam in G, & per ipsum ducto plano iuxta regulam lateris B C efficiente *MAXIMA* [h] Parabola. Dico hanc esse *MAXIMARVM*, *MINIMAM* quæsitam.

h 96. h.



Etenim *MAXIMA* Parabole per G iuxta latus B C, ad quamcumque aliam *MAXIMAM* iuxta quodcunque aliud latus B F, est homologè [i] vt altitudo vnius ad altitudinem alterius, cum ipsæ sint [l] æqualium basium; sed altitudo ad altitudinem est vt [m] perpendicularis, ex B super contingentem ad C, quæ [n] est ipsum *MINIMVM* latus B C, ad perpendicularem ex B super contingentem ad F, & per-

i 15. primi huius.
l Coroll. 96. h.
m 99. h.
n 1. Coroll. 98. h.

& perpendicularis B C minor est perpendiculari ex B super contingentem ad F, cum ea B C sit ipsarum perpendicularium [a] *MINIMA*, ergo, & *MAXIMA* Parabole per G ducta iuxta Coni latus B C, erit minor *MAXIMA* Parabola genita iuxta latus B F, & hoc semper; quapropter ipsa *MAXIMA* Parabole, ducta per G iuxta *MINIMVM* Coni latus B C, in his casibus, erit *MAXIMARVM MINIMA*. Quod secundò erat, &c. *a 98. h. ad num. 2.*

Si tandem vestigium verticis H ceciderit extra basim Coni, vti apparet in hac figura. Ducta contingente H I, atque iuncta B I, si radius D I bifariam secetur in puncto L, per quod iuxta latus B I ducatur planum Parabolen efficiens, quæ erit *MAXIMA*. Dico hanc esse *MAXIMARVM MINIMAM*.

Quoniam *MAXIMA* per L iuxta latus B I ad *MAXIMAM* iuxta aliud quodcunque latus B F, est vt [b] altitudo ad altitudinem, cum ipsæ Parabolæ sint [c] æqualium basium, sed altitudo ad altitudinem est vt [d] perpendicularis ex B super contingentem ad I, quæ est ipsa B H Coni altitudo (quæ ad omnes rectas in plano basis Coni ad punctum H pertingentes est [e] perpendicularis) ad perpendicularem ex B super contingentem ad F, & perpendicularis B H minor est perpendiculari ex B super contingentem ad F, cum ipsa sit [f] huiusmodi perpendicularium *MINIMA*, quare, & *MAXIMA* Parabole iuxta latus B I, iungens Coni verticem, & contactum rectæ lineæ H I, quæ à vestigio H ad peripheriam basis ducitur, minor erit *MAXIMA* Parabola iuxta latus B F, & hoc semper, vnde, ipsa *MAXIMA* Parabole per L iuxta latus B I, erit, in hoc casu, *MAXIMARVM MINIMA*. Quod vltimò faciendum erat, quodque esto DIVINATIONIS, ac

b 15. primi h.
c Coroll. 96. h.
d 99. h.
e ex def. 3. vnd. Ele.
f 98. h. ad num. 3.

LIBRI SECVNDI FINIS.

AD-

ADDENDA LIB. II.

Pag. 53. Coroll. I. ita restituendum.

HInc est, quod applicatæ ex terminis ęqualium diametrorum in Parabola, vel (in reliquis sectionibus) ex punctis proportionaliter diuidentibus semi-diametros ad quemlibet angulum constitutas; nempe quod bases ęqualium portionum de eadem coni-sectione, vel circulo, omnino se mutuò secant inter diametros; & quod rectæ lineæ, tum harum applicatarum, vel basium portionum puncta media, tum extrema iungentes, rectæ semidiametrorum terminos iungenti æquidistant.

Demonstratum est enim rectas HI, EC, quæ sunt bases æqualiũ portionum HEI, ABC, secare se mutuò in M inter diametros ED, BD; & iunctas HC, GF, AI ipsi EB esse parallelas.

Pag. 59. post Coroll. adde sequens

SCHOLIVM.

QVod in Ellipsi demonstratum fuit de portionibus ABC, HMI, semi-Ellipsi minoribus, idem sequitur de maioribus AHC, HCI, quarum bases AC, HI similem concentricam interiorem Ellipsim contingunt; nempe has quoque inter se æquales esse. Nam ipsæ portiones AHC, HCI sunt partes superstites de eadem Ellipsi ABCH, demptis æqualibus portionibus ABC, HMI.

Pag. 61. post Coroll. II.

COROLL. III.

PAtet denique in Parabolis parallelis, vel in similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus, vel Circulis ABC, DEF, omnia rectangula sub segmentis applicatarum, inter se, & prædictæ contingenti AEC æquidistantium (quorum vnum est rectangulum GDH, vel GFH) esse inter se æqualia, cum quodlibet ipsorum æquale sit eidem quadrato semitangentis AE.



VINCENTII VIVIANI AD LIB. DE MAX. ET MIN. APPENDIX.



MONITVM.



ACTENVS habes Amice Lector plurima eorum, quæ iamdiu occasione Diuinationis in V. Conicor. excogitauimus, dum ex tribus illis fasciculis SERENISS. LEOPOLDI inuicto testimonio comprobatis, de quibus latiùs in Proæmio, priorem exinaniuimus, alterum extenuauimus. Ex eorum reliquijs tertium saltem librum efformare statueramus, circa MAXIMAS pariter, ac MINIMAS magnitudines versantem, atque ampliùs illas eiusdem nominis, quæ à MAXIMIS, & MINIMIS plus minusue recedunt excutientem; quod raro hucusque, ac tantùm necessitate cogente demonstrauimus, quodque de industria omisimus, tum ne à suscepta materia longiùs discederemus, tum vt ipsam expeditiùs persolueremus. Verùm graues, ac diuturnæ egritudines, quæ nos, huic editioni incumbentes, exagitarunt, ita ipsimet remoram fecere, totque è contra sunt stimuli ad hoc in vulgus manandum, vt cætera ad aliud tempus proferre cogamur, si hæc tibi grata comperiamus. Liceat tamen ex tertio libro quasdam Propositiones aliunde receptas desumere, atque Appendicis nomine huc apponere, ad id præsertim impulsi, tum quod nostræ harum Propositionum demonstrationes huic tertio libro sint penitus inutiles, tum quia pollicitam quorundam fidem, solidam, incorruptamque prorsus non inuenerimus.

Duo potissimùm sunt Problemata, quibus hæc Appendicula conflatur.

Primum (vti constat ex quadam variarum Propositionum narratione, quæ inter summum Geometram Torricellium, præstantioresque Gal-

liæ, ne dicam Europæ Mathematicos intercessere, quales, inter hos D. Fermat Senator Tholosanus, D. Roberuallius in Parisiensi Academia Regius Mathematum Professor, ac D. de Verdus) præfatus Cl. Vir de Fermat ipsi Torricellio olim proposuerat, qui licet statim in ipsius solutionem non incidisset, inde mox animaduertens Problema determinatum esse, illud demum triplici via, altera nimirum per locos planos, reliquis per solidos demonstrauit, nobisque postmodum exercitationis gratia in hunc, qui sequitur modum enodandum tradidit.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit graduum 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectæ educantur ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

Quod, vt vera fatear, non nisi iteratis oppugnationibus tunc nobis vincere datum fuit, sed aggressione omnino ab alijs discrepante, ac, ni decipimur, satis iucunda, & ad ipsiusmet Problematis propagationem valde accommoda, dum non tantum ad tria data puncta, (qualia sunt vertices angulorum propositi trianguli) verùm etiam ad quotquot libuerit, ex alio quæsito puncto, MINIMVM eductarum aggregatum reperiri queat, manente tamen determinata eorum positione, prout determinatum est prædictum triangulum.

Alterum Problema præclarissimum Virum, & Auorum splendore, & morum integritate conspicuum agnoscit Auctorem: P. Honoratum Fabbri, natione Gallum, in Iesuitarum celeberrima Societate magni nominis Theologum, omnigena historiarum, humaniorumque literarum eruditione decoratum, Mathematicum præstantissimum, Philosophum acutissimum, qui olim Lugduni apud Gallos Philosophiam publicè edocens, summam egregij acuminis famam sibi peperit, quod manifestò testantur (ita nobis asserente alibi iam, sed parùm commendato nobilissimo Adolescente Laurentio Magalotti tanti Viri amantissimo, & obsequentissimo) quædam ipsius PROPOSITIONES PHYSICAE, CVM BREVISSIMIS RATIONVM MOMENTIS, tunc ibidem publici iuris factæ, & prout fusiùs, Deo dante, patebit ex nouis eiusdem geometricis, ac physicomathematicis contemplationibus, quibus Literatorum Respublica aliquando se locupletaturam expectat.

Hoc igitur Problema, anno 1656. idem Cl. Adolescens Laurentius Magalotti, (dum in Pisano Lyceo Iurisprudentiam excoleret) à prædicto P. Fabbri, tunc Romæ immorante receperat, nobisque per epistolam, Pisis, sub 27. Decembris datam communicarat, cui post triduum rescribentes, vniuersaliorem quæsiti propositionem, ita exposuimus;

Dua-

Duabus datis rectis lineis terminatis, non modò ad rectum, ſed ad quemlibet angulum conſtitutis, & per vnius ipſarum terminum alia alteri ipſarum æquidiſtanter ducta, ad contrarias tamen partes, & in infinitum producta: oportet per extremum terminum alterius, rectam ducere æquidiſtanti occurrentem, quæ cum bina ſimilia triangula ad verticem conſtituat, ipſorum aggregatum ſit MINIMA quantitas.

ſimulque noſtram Problematis enodationem his verbis enunciauimus;

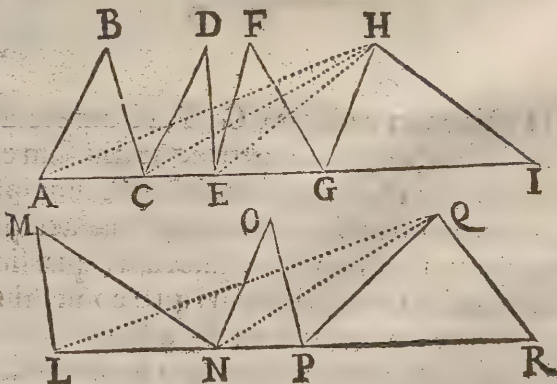
Diuidatur ſecanda linea, ita vt ſegmentum ipſius propè terminatam parallelam, ad ſegmentum reliquum ſit in ratione diametri cuiuslibet quadrati ad exceſſum diametri ſuper latus: nam pũctum interſectionis erit quæſitum.

ac demum de inuentione binorum æqualium ex triangulis aggregatorum, tam ſupra, quàm infra punctum MINIMI aggregati eundem Cl. Adoleſcentem commoneſecimus. Sed iam Appendicem aggrediamur.

LEMMA I. PROP. I.

Si fuerint duo ordines quotcunque triangulorum æqualem altitudinem habentium; erit aggregatum baſium triangulorum primi ordinis, ad aggregatum baſium triangulorum ſecundi, vt aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum ſecundi ordinis.

Sit vnus ordo triangulorum ABC, CDE, EFG, GHI, alter verò triangulorum ordo LMN, NOP, PQR, & omnia ſint æqualis altitudinis, vtriuſque autem ordinis triangula ſint ad eaſdem partes, & ipſorum baſes in directum diſponãtur, quarum baſium aggregatum, in primo ſit AI, & in ſecundo ſit LR. Dico aggregatum AI, ad aggregatum LR eſſe vt aggregatum triangulorum primi ordinis ad aggregatum tr iangulorũ ſecũdi,



Quoniam iunctis rectis AH, CH, EH; & LQ, NQ: erit triangulum ABC ęquale triangulo AHC, (cum ſint ſuper eadem baſi AC, & habeant ex hypotheſi eandem altitudinem) & CDE ęquale CHE, ac EFG æquale EHG; vnde communi addito GHI, erunt omnia ſimul primi ordinis æqualia vnico AHI: item oſtẽdetur omnia ſimul ſecundi ordinis æqualia eſſe vnico LQR; ſed triangulum AHI ad LQR eſt vt baſis AI ad LR, cum po-

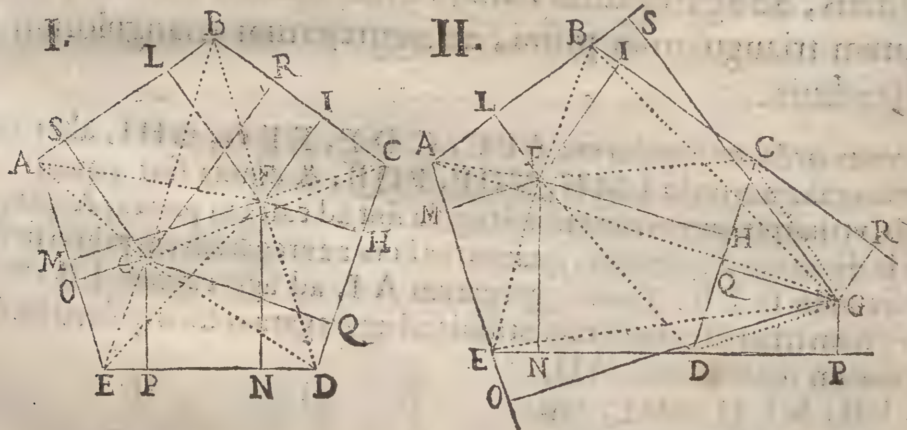
T nan-

nantur æqualium altitudinum, quare aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum secundi ordinis erit, vt A I ad L R, vel vt aggregatum basium primi ordinis ad aggregatum basium secundi. Quod erat, &c.

LEMMA II. PROP. II.

In quocunque polygono regulari, aggregata perpendicularium ex quibuscunque punctis, (quæ tamen non sint extra perimetrum polygoni) super omnia eius latera eductarum, inter se sunt æqualia. Si verò alterum punctorum fuerit extra perimetrum, aggregatum perpendicularium ex eo eductarum, maius semper erit quolibet prædictorum aggregatorum ex puncto, quod non sit extra.

ESto polygonum regulare A B C D E, & duo quælibet puncta F, G, in prima figura, vel intra, vel in ipsius perimetro, à quibus super eius latera eductæ sint perpendiculares F N, F H, F I, F L, F M; & G O, G P, G Q, G R, G S. Dico talium perpendicularium aggregata inter se æqualia esse. Si verò alterum punctorum G, cadat extra, vt in secunda figura, dico aggregatum perpendicularium ex G maius esse quolibet prædictorum aggregatorum, vtputa perpendicularium ex F.



Ductis enim rectis ex G, F ad omnes àngulos polygoni, vt in figuris: Patet ipsum polygonum vtrinque diuisum esse in duos triangulorum ordines æquales altitudines habentium, quæ sunt ipsa polygoni latera, super quæ cadunt perpendiculares, (si nempe hæ accipiantur tanquam bases) erit ergo aggregatum basium triangulorum, quæ simul conueniunt in F, ad aggregatum basium triangulorum, quæ conueniunt in G, * vt aggregatum triangulorum, primi ordinis ex F, ad aggregatum triangulornm secundi ex G, sed hæc triangulorum aggregata in prima figura sunt æqualia (nam ipsa idem polygonum complent) ergo, & aggregata basium eorundem, hoc est aggregata perpendicularium ex F, & G, super polygoni latera eductarum, sunt

* per primam Append.

sunt æqualia. In secunda verò figura, aggregatum triangulorum ex G maius est aggregato triangulorum ex F, vt satis patet (cum illud, ipsum polygonum excedat) quare, & aggregatum basium triangulorum ex G, (quæ sunt ipsæ perpendiculares ex G) maius est aggregato basium triangulorum ex F, (quæ sunt perpendiculares ex F.) Quapropter, &c. Quod erat, &c.

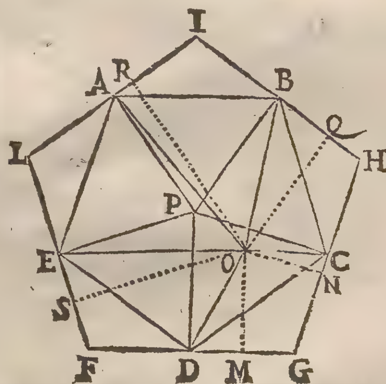
COROLL.

HInc est, quod aggregatum perpendicularium ex centro dati polygoni super eius latera eductarum, semper est non maius quolibet ex alio puncto perpendicularium aggregato, vbicunque assumptum sit punctum hoc, vel intra, vel in perimetro, vel extra perimetrum dati polygoni.

THEOR. I. PROP. III.

In quocunque polygono regulari, aggregatorum linearum ex punctis vbicunque assumptis ad ipsius angulos eductarum, MINIMVM est, quod ex centro.

SIt polygonum regulare ABCDE, cuius centrum P, à quo ad angulos eductæ sint rectę PA, PB, PC, PD, PE, sumptoq; vbicunque alio puncto O, vel intra polygonum ABCDE, vel in eius perimetro, vel extra, iungantur item OA, OB, OC, OD, OE. Dico aggregatum eductarum ex centro P, minus esse aggregato ductarum ex O.



Ex punctis enim A, B, C, D, E, erigantur ipsis PA, PB, PC, PD, PE perpendiculares LI, IH, HG, GF, FL vtrinq; productæ. Patet has simul conuenire, & polygonum LIHGF dato simile constituere circa idem centrum P, ad cuius latera ex puncto O ducantur perpendiculares OR, OQ, ON, OM, OS.

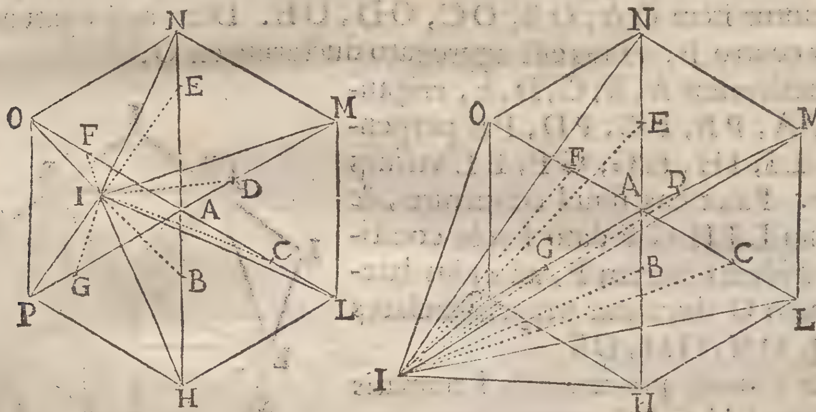
Iam per Coroll. præcedentis Lemmatis in polygono IHGFL aggregatum perpendicularium, quæ ex centro P est non maius aggregato perpendicularium, quæ ex puncto O vbicunq; assumpto, sed aggregatum perpendicularium ex O, minus est aggregato obliquarum OA, OB, OC, OD, OE, super ijsdem lateribus circumscripti polygoni eductarum, (est enim perpendicularis OR, minor obliqua OA, & OQ minor OB; ON minor OC; OM minor OD, & OS minor OE) ergo aggregatum perpendicularium ex P, hoc est ad angulos dati polygoni ABCDE eductarum, est omnino minus aggregato obliquarum ex O, nempe eductarum ad eosdem angulos dati polygoni à puncto O, vbicunque sit ipsum O. Quare aggregatum ductarum ex centro ad angulos polygoni regularis *MINIMVM* est. Quod erat, &c.

THEOR. II. PROP. IV.

Si quotcunque rectæ lineæ terminatæ (non minus verò quam tres) cuiuslibet longitudinis, ad vnum idemque punctum occurrant, totidem angulos inter se æquales constituentes, & quatuor rectos complentes. Erit aggregatum harum simul omnium occurrentium, MINIMVM aggregatorum rectarum, à quibuscunque alijs assumptis punctis, ad eosdem datarum terminos eductarum.

Sint quotcunque rectę AB, AC, AD, AE, AF, AG terminatę, quę ad punctum A simul occurrant, constituantque angulos BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB inter se æquales, & simul sumpti ęquales quatuor rectis: dico aggregatum harum omniũ minus esse aggregato linearum, quæ ex quolibet alio puncto I ad eosdem terminos B, C, D, E, F, G, educi possunt, quales sunt IB, IC, ID, IE, IF, IG.

Sit enim AG *MAXIMA* ductarum ex A, super qua sumatur AP ipsa AG non minor, cui demantur æquales AH, AL, AM, AN, AO, & compleatur polygonum HLMNOP, quod erit æquilaterum, & æquiangulũ, siue regulare, cum anguli ad A sint æquales, eiusque centrum erit A; denique iungantur IH, IL, IM, IN, IO, IP.



Iam aggregatum ductarum AH, AL, AM, AN, AO, AP ex centro A ad angulos polygoni, cum sit * *MINIMVM*, erit minus aggregato ductarum IH, IL, IM, IN, IO, IP ex puncto I, sed harum aggregatum minus est aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; nam IB, BH maiores sunt IH, & IC, CL maiores IL, &c. quare eò magis aggregatum, ex A ductarum, AH, AL, AM, AN, AO, AP minus erit aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; demptis ergo communibus segmentis BH, CL, DM, EN, FO, GP, erit reliquum aggregatum datarum AB, AC, AD, AE, AF, AG minus reliquo aggregato ductarum IB, IC, ID,

* per 3. Append.

ID, IE, IF, IG ex assumpto puncto I ad datarum terminos B, C, D, E, F, G; itaque aggregatum ductarum ex A totidem æquales angulos inter se efficientes, est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

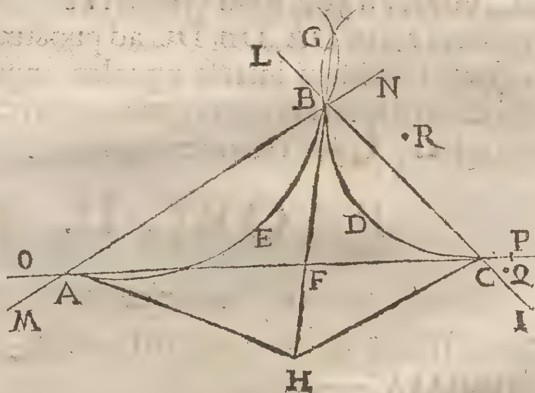
LEMMA III. PROP. V.

Si in triangulo ABC fuerit vnusquisque angulorum, minor grad. 120. & super duo latera BA, BC describantur ad partes basis AC similes circuli portiones AEB, CDB capientes angulos graduum 120. Dico ipsarum peripherias, præter in B, se mutuò secare intra triangulum ABC.

NOn enim se contingunt in B. Nam, si hoc esset, ducta recta FBG vnam harum portionum contingente in B, ipsa, & alteram quoque contingeret: quare angulus GBA à contingente, & secante confectus, æqualis esset ei, qui fit in alterna portione AEB, nempe esset grad. 120, & ob eandem rationem angulus GBC esset grad: 120; vnde reliquus ABC è quatuor rectis esset pariter grad: 120; quod est contra hypothesim, cum sit minor. Quare peripheriæ se mutuò secant in B.

Non autem altera peripheriarum intersectio cadit extra triangulum, vt in G, in angulo LBN ad verticem ipsius ABC. Quoniam, ducta GB, esset angulus GBA minor eo, qui fieret à recta contingente per B arcum ABG, cum secante BA, siue minor facto in alterna portione AEB, qui est grad: 120. itemq; GBC minor esset grad: 120; vnde reliquus ABC è grad: 360. maior esset grad: 120. quod item est cótra hypothesim cum sit minor.

Non est in basi AC, vt in F. Quoniam ex constructione angulus AFB esset grad: 120, siue maior recto; & CFB pariter maior recto: quapropter duo simul deinceps ad F, duos rectos excederent; quod est falsum, cum duos tantùm rectos adæquent.



Non infra basim, inter productas BA, BC, vt in H. Nam iunctis AH, CH, essent pariter, ex constructione, duo simul anguli ad H, siue vnicus AHC, maior duobus rectis; quod est falsum.

Non in altera linearum ICBL, MABN. Nam si v. gr. peripheria circuli CDB pertingeret ad L in recta CBL, hæc ad tria puncta C, B, L, eidem circuli peripheriæ occurreret; quod est impossibile.

Non extra ad partes laterum AB, BC, inter productas OA, BL; vel CP, BN. vt in R. Iunctis enim AR, BR, CR; esset angulus ARB in portione super AB descripta grad: 120; & angulus CRB in portione, quæ superest ad CDB ad partes R, esset grad: 60. pars nempe ARB maior toto CRB. Absurdum.

Non in punctis A,C. Nam si v. gr. in C; angulus ACB in portione super AB descripta ad partes C, esset grad: 120; sed minor datus est. Quare &c.

Non in ipsa A C producta, vt in P. Quoniam, iuncta BP, angulus item A P B esset grad. 120, sed A C B minor datus est; quare in triangulo BCP externus angulus interno, & opposito minor esset; quod est falsum.

Denique, non in altero angulorum OAM, ICP, vt in Q. Etenim iunctis A Q, B Q, esset angulus A Q B minor comprehenso A C B, sed AQB ex constructione est gr. 120, ergo ACB esset maior gr. 120. Contra hypot.

Cum igitur harum peripheriarum intersectio, præter ad B, non cadat extra triangulum A B C, neque sit in eiusdem perimetro, reliquum est eam necessariò cadere intra ipsummet triãgulũ ABC. Quod erat demonstrãdũ.

PROBL. I. PROP. I.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit gr. 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectæ educantur, ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

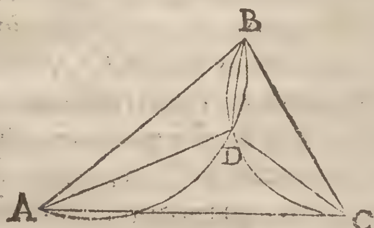
Esto triangulum ABC vt ponitur, & inuenire oporteat punctum quale imperatum est.

Super latera BA, BC ad partes basis AC describantur circuli portiones ADB, CDB capientes angulos gr. 120. quarum portionum arcus omninò

* 5. App. se mutuò * secabunt intra triangulum ABC; sitque eorum intersectio punctum D. Dico ipsum esse quæsitum.

Nam iunctis DA, DB, DC; erunt anguli ADB, CDB graduum 120. vnde reliquus ADC, vsque ad 360. item erit gr. 120. Cum ergo tres rectæ DA, DB, DC ad punctum D coeuntes totidem interse æquales angulo*

* 4. App. efficiãt, erit ipsarum aggregatum *MINIMA* quantitas. Quod inueniendum erat.



PROBL. II. PROP. VII.

Datam rectam lineam terminatam ita diuidere, vt sumpta partium ipsius tertia proportionali, aggregatum extremarum sit MINIMA quantitas.

Esto data linea A B, quam secare oporteat, vt imperatum est. Erigatur ex A ipsi AB perpendicularis, & æqualis A D, iunctaq; DB, secetur D E æqualis D A, & ex E super A B perpendicularis demittatur E C. Dico punctum C quæsitum soluere,

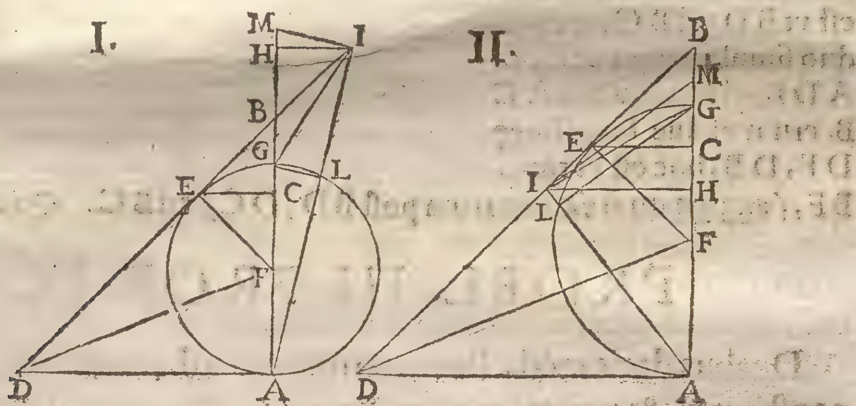
Nam bifariam secto angulo ADE per rectã DF, secãte AB in F, & iuncta FE: cũ sit latus DA equale DE, & DF cõmune, & anguli ADF, EDF equales, erunt bases FA, FE æquales, & reliquus angulus FED reliquo FAD æqualis, siue rectus: quare si cum cẽtro F, interuallo FA circulus describatur AEG, is transibit quoque per E, & vtramq; D A, D B continget in A, E.



Iam

Iam cum in semi-circulo sit AC ad CE, vt CE ad CG, sitq; CB æqualis CE (cum etiam AD sit æqualis AB) erit AC ad CB, vt CB ad CG. Vnde aggregatum extremarum post segmenta AC, CB erit AG; quod esse *MINIMVM* sic demonstrabitur.

Sumpto enim in data recta A B quocunque alio puncto H, vel in ipsius parte producta vltra B, vt in prima figura, vel in ipsa A B, vt in secunda, & ex H ducta H I perpendiculari ad A B, secante diagonalem D B, in I, ductaque A I secante circuli peripheriam in L, iunctisque G L, G I: erit angulus A L G rectus, atque externus trianguli L I G; quare internus L I G acutus erit, ac ideo recta I M, quæ ex I erigitur perpendicularis ad I A, hoc est, quæ ipsi L G æquidistat, secabit A B vltra punctum G, vt in M, ac ideo erit A G minor A M. Et cum in triangulo rectangulo A I M, sit vt A H ad H I, ita H I ad H M, sitque H I æqualis H B, erit A H ad H B, vt H B ad H M, ergo A M est aggregatum extremarum proportionalium post partes A H, H B, sed est A G minor A M, vt modò ostendimus: ergo aggregatum A G minus est aggregato A M: & hoc semper vbicunque assumptum fuerit punctum H extra C: quare A G est *MINIMVM* aggregatum quæsitum, & recta A B secta est in C, vt imperatum fuit. Quod erat &c.



SCHOLIVM.

SI quæratur iuxta quam rationem repertum punctum C diuidat datam A B: id ex ipsa Theorematis constructione elicietur. Nam cum triangula D A B, B E F sint similia inter se, erit B D ad D A, siue diameter quadrati ad latus, vt B F ad F E, vel ad F A; & cum sit B C ad C E, vt C E ad C F, sitque B C æqualis C E (cum & B A ęqualis sit A D) erit etiam C E, siue C B æqualis C F. Quare si data B A diuidatur, ita vt pars B F ad reliquam partem F A, sit vt diameter cuiusdam quadrati ad eius latus, & maior pars B F secetur bifariam in C, hoc ipsum punctum erit quæsitum.

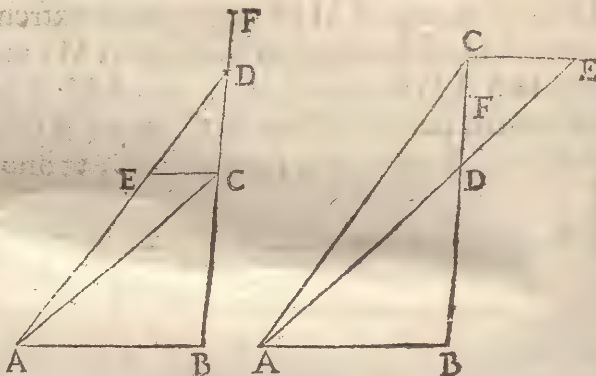
Vel. Cum rectę A B, A D sint æquales, & perpendiculariter constitutæ, erit A D, siue D E latus quadrati, & D B diameter, & E B excessus diametri super latus, sed est A C ad C B, vt D E ad E B: ergo quæsitum punctum C secat datam rectam A B, ita vt maior pars A C ad minorem C B, sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum sui diametri super latus; quę ratio, vt iam constat, cadit inter terminos incommensurabiles.

LEMMA

LEMMA IV. PROP. VIII.

Si in triangulo A B C, cuius basis A B, ex vertice C ducta sit C E ipsi B A parallela, vel ad easdem, vel ad oppositas partes, & ducatur quælibet A D E vtranque B C, C E secans in D, & E: dico aggregatum triangulorum A D B, D C E ad triangulum A C B esse vt aggregatum extremarum post B D, D C, ad B C.

Sumatur D F tertia proportionalis post B D, D C. Iam triangulum D C E ad A D C est vt E D ad D A, vel vt C D ad D B, vel vt D F ad D C; & triangulum A D C ad triãgulum A B C, est vt D C ad C B, ergo ex ęquali triãgulũ D C E ad A B C, erit vt D F ad C B; sed triangulum A D B ad idem A B C est vt B D ad B C, quare duo simul triangula D C E, A D B, ad triangulum A C B, erunt vt duę simul lineę D F, D B, hoc est vt tota B F, (aggregatum extremarum post B D, D C) ad B C. Quod erat, &c.



PROBL. III. PROP. IX.

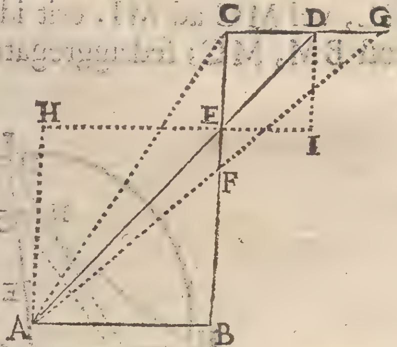
Duabus datis rectis lineis terminatis ad quemlibet angulum constitutis, & per vnius terminum data alia alteri datarum æquidistanter ducta, & in infinitum extensa: oportet per terminum alterius, rectam diagonalem ducere aliæ datarum, & ęquidistanti occurrentem, ita vt, cum ipsa diagonalis bina similia triangula ad communem verticem constituat, horum aggregatum sit MINIMA quantitas.

Sint A B, B C rectę lineę terminatę ad quemcunque angulum A B C compositæ, sitque C D in infinitum producta ipsi B A parallela; oportet ex A diagonalem ducere, qualis est A D, ita vt aggregatum similium triangulorum A E B, C E D ad communem verticem E, sit *MINIMVM* huiusmodi aggregatorum, vbicunque cadat ipsorum communis vertex, vel in rectam B C, vel in ipsam productam vltra C.

Diuidatur B C in E, ita vt B E ad E C sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum sui diametri super latus: dico punctum E esse quæsitum.

Nam ducta qualibet alia A F G; iunctaque A C: cum aggregatum extremarum proportionalium post B E, E C sit *MINIMVM* (per Scholium prop.

prop. 7. huius) ipsum erit minus aggregato extremarum post BF, FC; quare primum aggregatum, ad rectam BC minorem habebit rationem, quam secundum aggregatum ad eandem BC, sed primum ad BC est * vt aggregatum triangulorum AEB, DEC ad triangulum ACB, & secundum ad eandem BC est vt aggregatum triangulorum AFB, GFC ad idem triangulum ACB, quare aggregatum AEB, DEC ad triangulum ACB minorem habebit rationem quàm aggregatum AFB, GFC ad idem triangulum ACB, vnde aggregatum ex AEB, DEC minus erit aggregato ex AFB, GFC, ac propterea aggregatum triangulorum ad punctum E erit *MINIMVM*. Quod faciendum erat. *8. App.

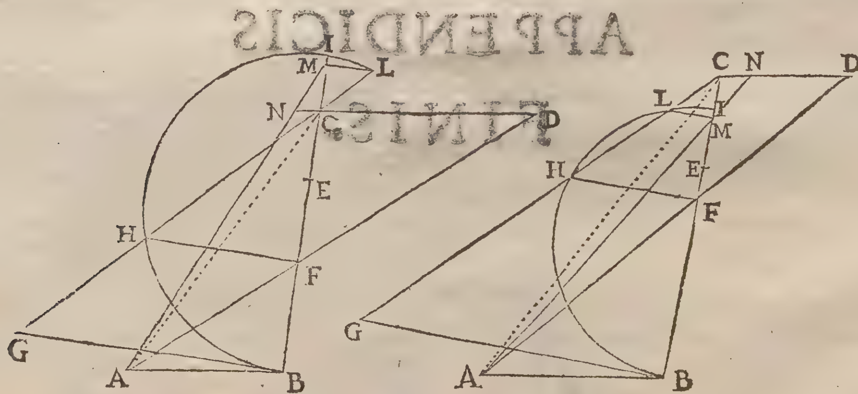


COROLL.

Hinc, cum sit vt subduplum ad subduplum, ita duplum ad duplum, si compleantur parallelogramma BH, CI, ipsorum aggregatum erit *MINIMVM*, &c.

PROBL. IV. PROP. X.

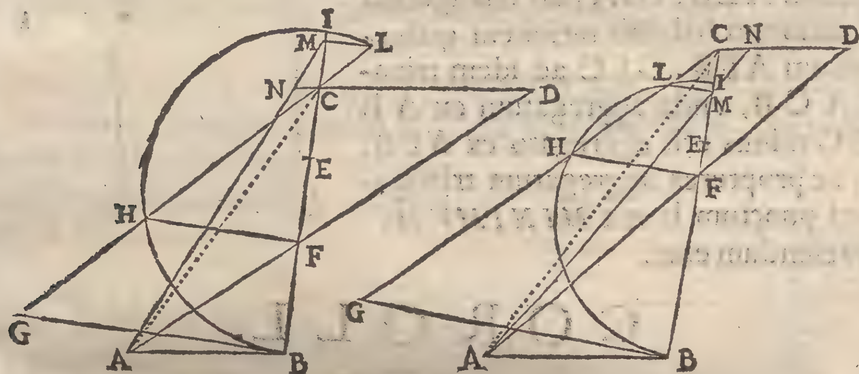
Ijsdem positis, ac in præcedenti. Si datum sit in linea BC, quodlibet aliud punctum F inter inuentum punctum E, & extremum B, & oporteat aliud in ipsa punctum assignare, quæ simul exhibeant aggregata triangulorum ad verticem inter se æqualia.



Erigatur BG perpendicularis, & æqualis ipsi BC, iungatur GC, & per F agatur FH æquidistans BG, & fiat vt BF ad FH, ita FH ad aliam FI, & circa diametrum BI circulus describatur rectam GC secans in H, & L, & ex L ducatur LM parallela ad GB; dico punctum M esse quæsitum, hoc est si producantur AF, AM rectam CD secantes in D, & N;

& N; aggregatum triangulorum A F B, D F C, æquale esse aggregato triangulorum A M B, N M C.

Quoniam cum sit vt BF ad FH, ita FH, vel FC ad FI, erit BI aggregatum extremarum BF, FI, post BF, FC. Item cum sit BM ad ML, vt ML, vel MC ad MI, erit idem BI aggregatum extremarum BM, MI, post BM, MC; sed aggregatum triangulorum ad F ad triangulum ABC



*8. App. (iuncta A C) est * vt aggregatum extremarum post BF, FC ad BC, & aggregatum triangulorum ad M ad idem triangulum ABC est vt aggregatum extremarum post BM, MC ad eandem BC, suntque prædicta extremarum aggregata inter se æqualia, cum vtrinque conficiant eandem BI, quare, & aggregatum triangulorum AFB, DFC, æquale erit aggregato triangulorum AMB, NMC. Quod faciendum erat.

APPENDICIS FINIS.



LECTOR BENEVOLE.

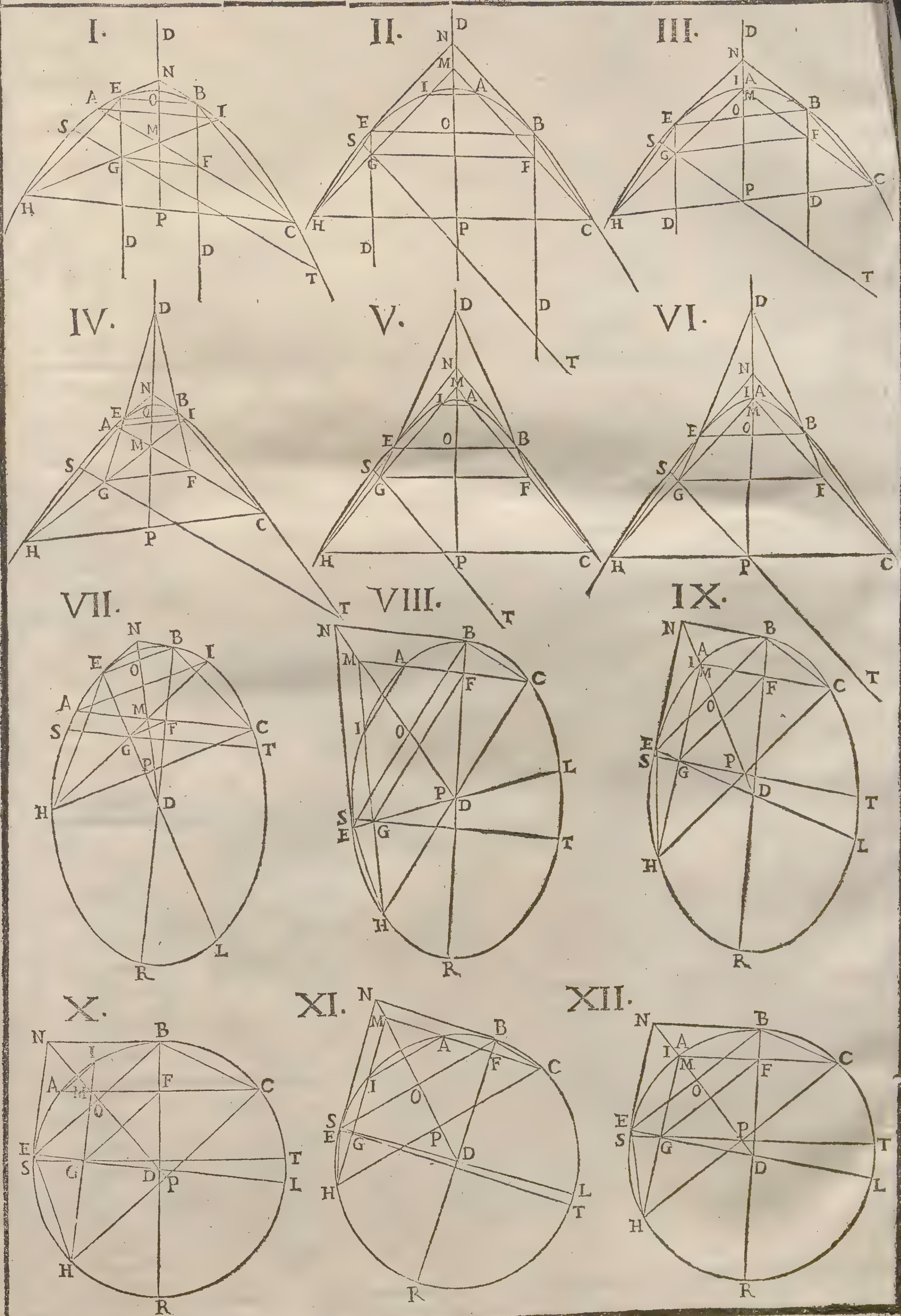
Errata, quæ non niſi peracta Operis impreſſione pacato animo adnotare potuimus, & quæ partim ob noſtrum authographum multis lituris, & contractionibus conſperſum, in Amanuenſis tranſcriptione exciderunt, partim ex Typothetæ incuria irrepſerunt, quæque ipſo calamo reſtitui nequeunt, antequam ad lectionem accedas, ita ſuis locis corrigere te rogatum volumus. Reliqua minutiora ad orthographiam præſertim pertinentia, veluti, & quaſdam paucas citationes turbatas, vel omiſſas æquiſſimo iudicio tuo relinquimus emendandas.

Pag. 17. verſ. 12. ductæ diametro BD - ductæ ad diametrum BD | p. 18. v. 10. & diametro - & ad diametrum v. 14. & diametro - & ad diametrum | p. 26. v. 6. & ab ipſa ex - & ex ipſa à | p. 31. v. 9. A B C, ABC - A B C, ADC | v. 11. & quod de - & quod priùs de | v. 38. 40. 41. ALCE - DLCE | p. 38. v. 5. à quadam ſectionis - à quadam in ſectione | p. 47. v. 7. eſt MINIMA ſibi - eſt MAXIMA ſibi | p. 49. v. 4. Hyperbolen AEC, - Hyperbolen HBL | v. 17. MAXIMAM - MINIMAM | v. 35. regula LE - regula LF | p. 51. v. 1. in margine deeſt citatio - *a*. 1. coroll. 19. h. | p. 55. v. 2. regula I G - regula ſit ducta I G | v. 14. C I, & quidem - C I, eſt quidem | p. 57. v. 5. circũſcripta: - circumſcripta: quam dico eſſe MINIMAM | p. 58. v. 8. conueniret - conueniret ſupra C v. 43. GI cum - GL cum | p. 59. v. 17. verſum AF - verſum CF | p. 68. v. 34. & Hyperbole - & ſimilis Hyperbole v. 35. M G, rectum G N, aſymptotos O P, & ipſarum - MI, rectum I N, aſymptotos OP, & ex ipſarum | p. 74. v. 3. Parabolis hactenus - Parabolis in hac | p. 75. v. 3. AB, BE, item altera - AB, D E, item latera | p. 77. v. 35. ex vertice BG; - ex vertice ſit B G; | p. 78. v. 13. adſcriptarum aſymptotos - adſcriptarum regulas, & aſymptotos | p. 79. v. 21. Hyperbolæ, per - Hyperbolæ ABC, per | p. 83. v. 7. Iam, cum rectangulum GE 3 ſit - Iam, rectangulũ GE 3 eſt | p. 92. v. 10. in puncto Q, - in puncto P, | v. 32. tamen eas eligemus, quę apportunæ - tamen eas in reliquis eligemus, quæ opportunæ | p. 96. v. 14. Hyperbolen circumſcribere - Hyperbolen concentricam circumſcribere | v. 22. eſſe MAXIMAM - eſſe MINIMAM | p. 99. in prima figura, Hyperbole N E concipiatur punctata, & HEK continuata | p. 100. v. 9. latere MINIMAM - latere BR MINIMAM | p. 101. v. 22. rectus latus - tranſuerſum latus | p. 107. v. 10. remotiori; - remotiori GH, | v. vlt. LEG - IEG | p. 109. v. 29. Et enim - Eſt enim | p. 110. v. 6. Sumatur D E - Iungatur B D, & producatur, & ſumatur DE | v. 7. diametro AE - diametro BE | p. 111. v. vlt. adſcribitur, cum recto - adſcribitur, ſed cum recto | p. 112. v. 3. ſed BH - ſed BA | v. 4. ipſa BH - ipſa BA | v. 24. OM aſymptoto - OM aſymptotos | v. 39. punctum D - punctum D, & cum dato ſemi-tranſuerſo E. | p. 114. v. 30. MBN - ABC | p. 120. v. 30. in qua cum - & cum | p. 122. v. 1. in portione - portioni | v. 2. in triangulis - triangulis | v. 8. in Parabola - Parabolæ | v. 11. in ea inſcripti - ei inſcripti | p. 123. v. 23. cum quælibet - nam quælibet | v. 32. Parabolæ DGF - Parabolæ BGF | p. 125. v. 2. ęquale rectangulo, æquale, vel minus rectangulo | v. 8. æquale poſitum - æquale, vel minus poſitum | v. 12. ſecabit ſibi - ſecabit aliam ſibi | p. 127. v. 22. vt OF ad FB, & KF - vt OF ad FB, & permutando OK ad OF, vt KB ad BF; & eſt OK maior OF, ergo, & KB maior eſt FB, & KF | p. 129. v. 5. cum æquali - cum circumſcriptæ æquali | v. 10. ſit ipſo - ſit ipſi | p. 130. v. 12. vt in 83. - vt in 82. | v. 22. vt AF - vt OF | p. 131. v. 1. ALCO - A LCN | v. 12. & è contra, quæ - & è contra, eam, quę | v. 35. ſi igitur Ellipſis - ſi igitur | p. 132. v. vlt. KEI maiora - KFI æqualia | p. 133. v. 11. EG, GN - EG, EN | p. 135. v. 42. eſſe axis - eſſe minoris axis | p. 142. v. 37. cum LH - cum ſit LH | p. 143. v. 12. LH maior - LH minor | v. 13. & HC maior - & HC minor | p. 144. v. 30. pertinentium - pertingentium | p. 146. v. 14. inter *a* contactum - inter contactum | v. 15. cadet totus intra, & ſi - cadet *a* totus intra Ellipſim, & ſi | p. 148. v. vlt. ſitque DF - ſitque BF | pag. 149. v. 20. I A - LH.

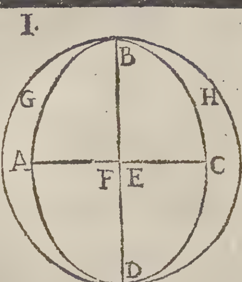
Lib. II. errata ſic reſtituenda.

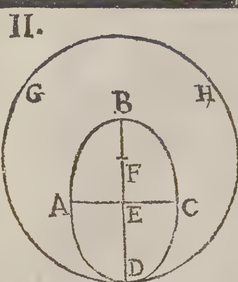
Pag. 1. verſ. 14. ipſi BC. - ipſi AC. | p. 5. v. 7. rectangulo æquale eſt - rectangulo cum quadrato DM æquale eſt | p. 8. v. 5. in O; cum - in O; FI ſecet GH in N. Et cum | p. 9. v. 33. MINIMA erit - minor erit quacunque ducibilium | p. 11. v. 25. & reliquam B D - & in ſecunda figura, reliquam E D | p. 12. v. 11. à vertice diſtet - à vertice B diſtet | p. 16. v. 4. prouenire - peruenire | p. 21. v. 6. BD quibus - BD, atque | p. 23. v. 40. Quod, &c. - Quod, &c. Sed FC æqualis eſt ipſi FA: ergo in hoc caſu duæ ſunt MINIMAE. | v. 42. vel extra - vel intra | v. 43. ex recta F FG - ex F recta FG | p. 32. v. 9. erit - eſſet | p. 34. v. 12. MAXIMA ad incluſam - MAXIMA ducibilium ad incluſam | p. 37. v. 2. ademptum - adeptum | v. 34. ſumantur - addantur | p. 38. v. 31. ſit minor - ſit maior | citat. 25. pr. conic. - 27. pr. conic. | p. 42. v. 39. rectangulum GEC - rectangulum GEF | p. 43. v. 25. quadratum Q P - quadratum OP | v. 25. contingente Q P - contingente OP | v. 26. quadrato Q P - quadrato OP | p. 50. v. 3. latera AD - latera parallela AD | p. 51. v. 40. D, M, - D, N, | v. 41. ſiue erit - atque erit | p. 53. In Coroll. II. dele ea verba in 4. 5. 6. 7. & 8. figura | p. 56. v. 23. communi B E - communi G E | p. 60. v. 9. ex quo NE - ex quo DE | p. 61. v. 5. Hyperbolis, aut Ellipſibus - Hyperbolis, vel circulis, aut Ellipſibus | p. 62. citat. 46. h. - 10. ſec. conic. & 46. h. | v. 18. Iam, ducta - Iam, in prima figura, ducta | p. 63. v. 2. Hyperbole - Hyperbolæ | v. 11. BD - BE | v. 13. in D - in E | p. 72. v. 18. producta conueniet - producta, vel conueniet | v. 20. verticis B; qua propter - verticis B; vel in ſecunda figura aliquando axi æquidiſtabit, quapropter | v. 24. Coni ſuperficiem - Coni, vel Cylindri ſuperficiem | v. 33. Coni à latere - Coni, vel Cylindri à latere | v. 34. Conicam ſuperficiem - Conicam, vel Cylindricam ſuperficiem | p. 75. v. 41. latera, &c. - latus A C, &c. | p. 76. v. 1. in plano NL - in plano DAC | p. 79. v. 5. ex 20. 22. ac 23. huius - ex 20. ac 22. huius | v. 11. DEB - DE | v. 30. DEB - DE | p. 121. v. vlt. eſſet alter - eſſe, alter | p. 129. v. 33. rectangulum - rectangulorum | p. 130. v. penult. in 3. ratione ad 1. - in ratione 3. ad 1.

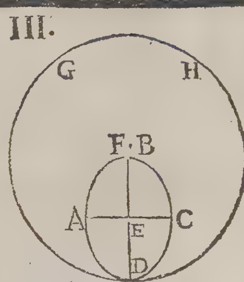
Schematiſmus Tertius pro Prop. 40. & 77. Lib. II.

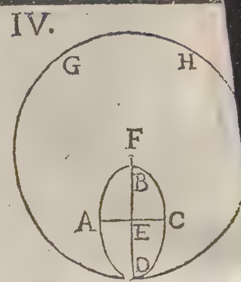


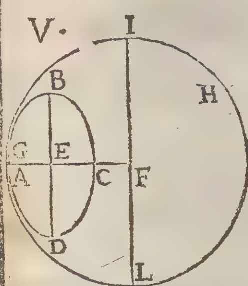
Schematismus 4. pro Prop: 62. Lib II. ad pag. 79.

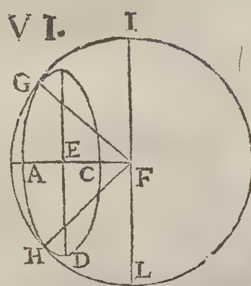


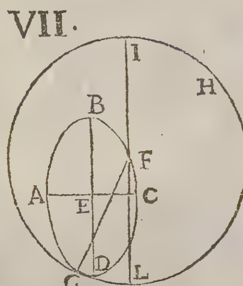


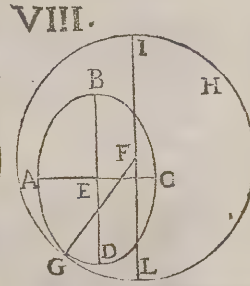


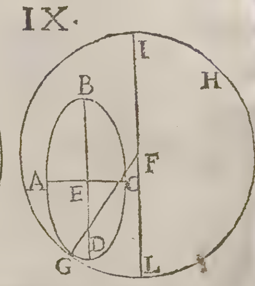


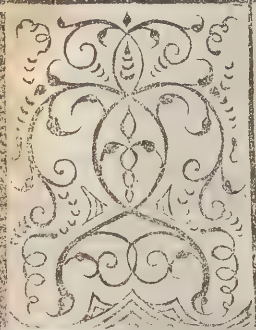


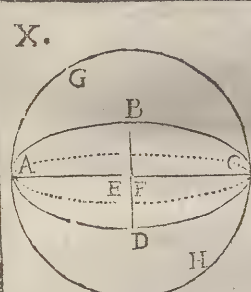


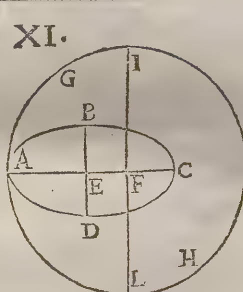


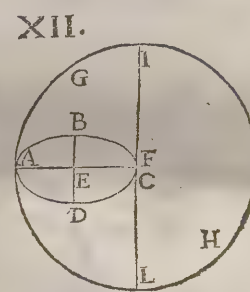


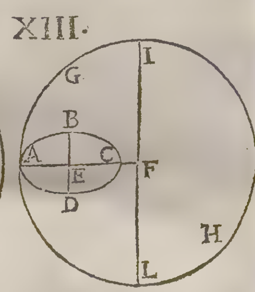


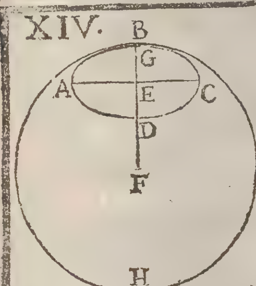


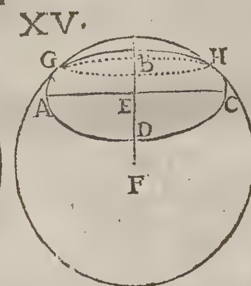


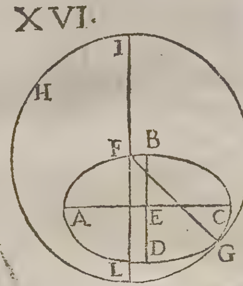


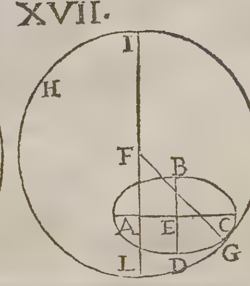


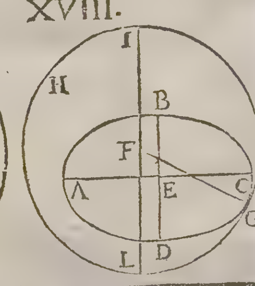


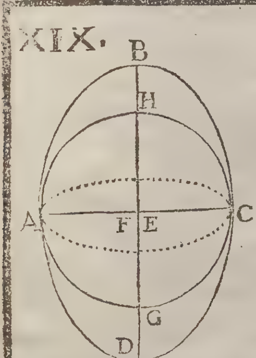


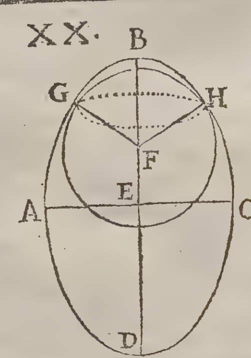


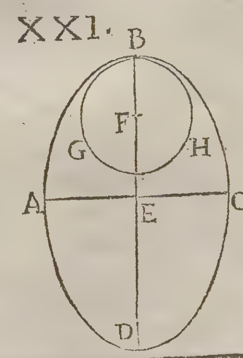


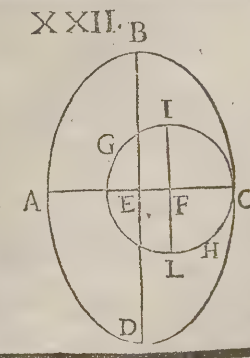


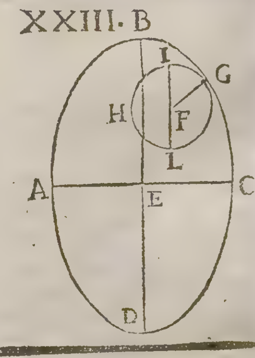


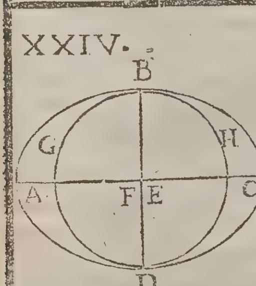


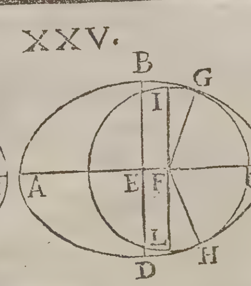


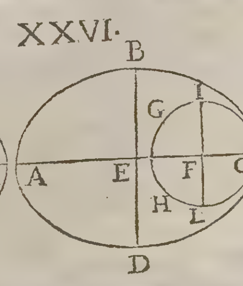


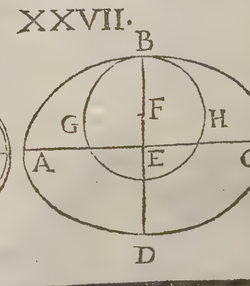


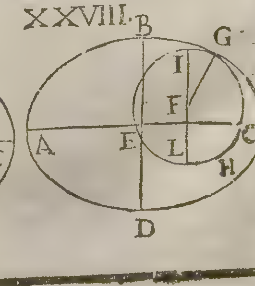












Imprimatur seruatis seruandis 18. Martij 1658.

Vinc. de Bardis Vic. Gen. Florentiæ.

Excellentissimus Dominus Augustinus Coltellinus Aduocatus, & S. Officij Consultor, videat hoc Opus inscriptum DE MAXIMIS, & MINIMIS, &c. & referat, die 9. Aprilis 1659.

F. Gabriel Pierotius Florentinus S. Officij Flor. Cancell. &c.

Sic diuinare licet Reuerendiss. Pater, nec malè de arte sua audiet Mathematicus, dum per retortos linearum tramites itur ad rectam geometricæ veritatis; bonis interim lætantibus, cum nihil obliquum ab orthodoxa fide inueniatur S. R. E. inuisum, prout refero. Die xvj. April. MDCLIX.

Augustinus Coltellini manu propria.

Stante prędicta attestatione imprimatur. Hac die 19. April. 1659.

F. Gabriel Pierotius S. Officij Flor. Cancell. de mandato.

Alexander Victorius Sereniss. Magni Ducis Auditor.



VIVIAN
DE
MAXIM



calibrite
colorchecker CLASSIC
mm